

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΤΕΤΑΡΤΗ 12/01/2022

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε μία συνάρτηση λέγεται συνεχής στο $[\alpha, \beta]$; μονάδες 03

A2. Πότε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέμε ότι είναι συνάρτηση 1-1; μονάδες 03

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής. μονάδες 05

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές, ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \text{ τότε θα ισχύει οπωσδήποτε } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

β) Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε θα είναι κατ' ανάγκη συνεχής στο α και στο β .

γ) Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι « 1 – 1 », αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς $x \in A$.

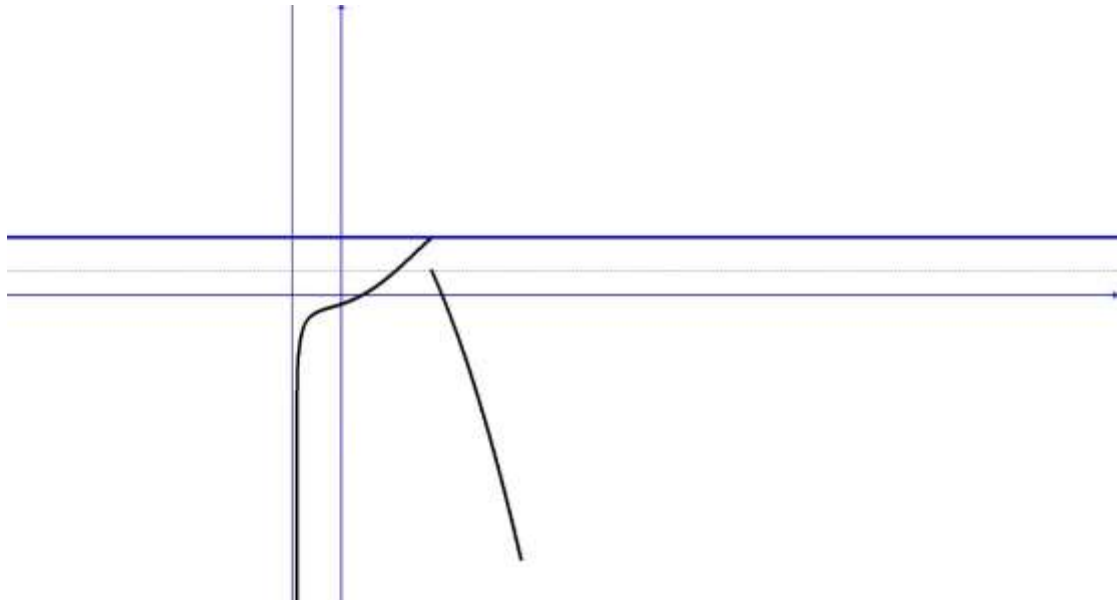
δ) Αν ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε πάντοτε ισχύει $f \circ g \neq g \circ f$.

ε) Ισχύει $|\eta \mu x| < |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

στ) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι πάντα διάστημα.

η) Αν η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο $[\alpha, \beta]$, τότε έχει πάντοτε μέγιστη τιμή και ελάχιστη τιμή στα άκρα του διαστήματος. μονάδες $7 \times 2 = 14$

ΘΕΜΑ Β



B1. Να βρεθούν: το πεδίο ορισμού της f , το σύνολο τιμών της f και τα ολικά ακρότατα.

μονάδες 04

B2. Να αιτιολογήσετε ότι η f δεν είναι συνεχής στο $x_0=3$, ενώ είναι συνεχής στο $[α,3]$

μονάδες 06

B3. Να εξετάσετε, αν υπάρχει, το όριο: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\eta\mu x - x}{f(f(x))}$.

μονάδες 05

B4. Αν $g(x) = \sqrt{x-1}$, $x \geq 1$

α. να αποδείξετε ότι συνάρτηση $g \circ f$ ορίζεται στο $[α,3]$.

μονάδες 04

β. να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (α,3)$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$g(f(x_0)) = -x_0 + 3.$$

μονάδες 06

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και

ισχύει $f^2(x) + 2f(x) + \sin^2 x \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα και

ισχύει $|g(x)\eta\mu x - 3x| \leq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

μονάδες 08

Γ2. Αν επιπλέον είναι f, g συνεχείς,

i) να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{e^{f(x)+x}-1}{x-1} = \frac{e^{g(x)-\frac{3x}{2}}-1}{x-2} + 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$. μονάδες 06

ii) να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός α , αν

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(e^{x-1}-1) - \eta\mu(x-1) + \alpha(x^2-1)}{\sqrt{x^2+3}-2} = 15g(0) - 3f(0). \quad \text{μονάδες 05}$$

iii) να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(f^{-1}(0) - g^{-1}(4))x^{2022} - x^{200} + 1}{x^{2021} + x^{100} - 1}$. μονάδες 06

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

$$\triangleright (x-1)f(x) = \sqrt{x^2+8} - 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\triangleright g^2(x) + 2xg(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ με } g(1) > -1$$

$$\Delta 1. \text{ Να δείξετε ότι } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x-1} & , x \neq 1 \\ \frac{1}{3} & , x = 1 \end{cases}. \quad \text{μονάδες 06}$$

$$\Delta 2. \text{ Να δείξετε ότι } g(x) = \sqrt{x^2+1} - x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad \text{μονάδες 06}$$

$\Delta 3.$ Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = (\sqrt{g(x)})^2 - x$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$.
μονάδες 05 (3+2)

$\Delta 4.$ Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως μονότονη, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον πραγματικός αριθμός ξ τέτοιος, ώστε να ισχύει $g(f(\alpha)) = g(h(\xi) + \alpha)$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.
μονάδες 08

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ