

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΟΡΙΑ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 + \alpha_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το Κριτήριο Παρεμβολής.

Μονάδες 4

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό .

« Για κάθε συνάρτηση f με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ ή $-\infty$.»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παρακάτω ισχυρισμό γράφοντας στην κόλλα σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής ή με το γράμμα Ψ , αν είναι ψευδής.

Μονάδες 1

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α).

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος , αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ισχύει $|ημx| < |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

β. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

γ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2n+1}} = +\infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

δ. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και

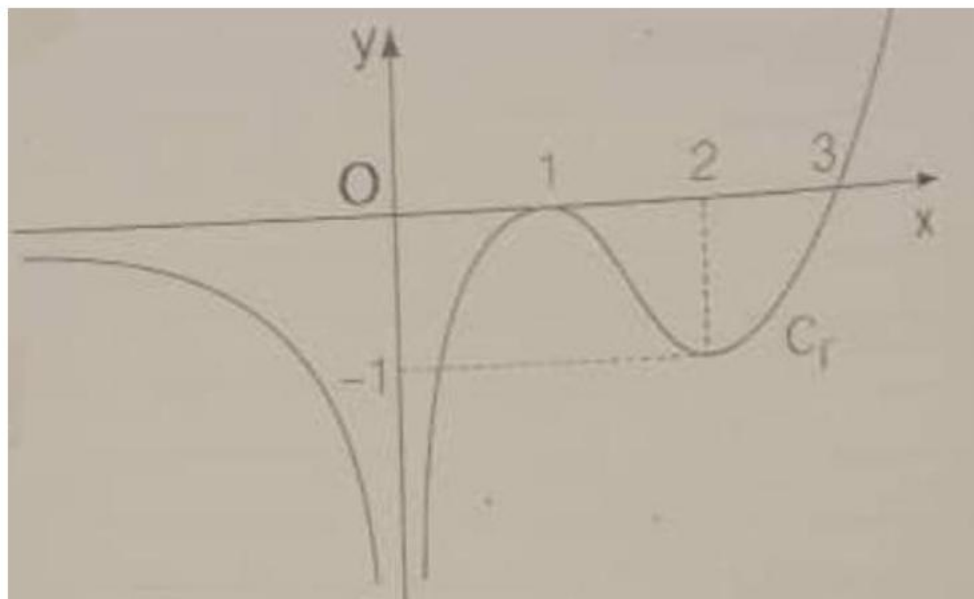
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = 0$

ε. Για κάθε f, g για τις οποίες υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0 και $f(x) \leq g(x)$, τότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x)$



B1. Να βρείτε τα παρακάτω όρια

ι) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ιι) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)}$

ιιι) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{f(x)}$

Μονάδες 6

B2. Να βρείτε τα όρια :

ι) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)}$

ιι) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)+1}$

ιιι) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{f(x)}$

Μονάδες 9

B3. Ομοίως τα όρια :

ι) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)} \right)$

ιι) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) \left(\sigma\upsilon\nu \frac{1}{f(x)} - 1 \right) \right]$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sqrt{4x^2 + 12x + 10}$, $x \in \mathbb{R}$ για τη οποία ισχύει ότι το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \alpha x)$ είναι πραγματικός αριθμός.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.

Μονάδες 3

Γ2. Να βρείτε τα όρια :

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad B = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\eta\mu x + f(x))$$

$$\Gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(f(5x) - f(x)) \cdot \eta\mu \frac{1}{x}]$$

Μονάδες 9

Γ3. Να βρεθεί ο θετικός πραγματικός λ ώστε να ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda f(x) + 2x \ln \lambda}{xf(x) - 2x^2 + \eta\mu x} = \frac{2}{3}$$

Μονάδες 7

Γ4. Για τις διάφορες τιμές του $\kappa > 0$ να βρείτε το όριο :

$$E = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{f(x)+1} - \kappa^{f(x)}}{e^{f(x)} + \kappa^{f(x)+1}}$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - ex, x > 0$

και $g(x) = \ln \frac{x+2}{x-1}, x < -2$ ή $x > 1$

Δ1. Να βρείτε τα όρια των f, g στα ανοικτά άκρα των πεδίων ορισμού τους.

Μονάδες 7

Δ2. Να βρεθεί το πρόσημο της $f(x)$ και το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu x - x}{f(x)}$ αν υπάρχει.

Μονάδες 5

Δ3. Να δείξετε ότι η $g(x)$ αντιστρέφεται και να βρεθεί η αντίστροφη g^{-1} .

Μονάδες 6

Δ4. Αν $g^{-1}(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}, x \neq 0$, να βρείτε τα όρια :

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} g^{-1}(x), \quad B = \lim_{x \rightarrow -\infty} g^{-1}(x), \quad \Gamma = \lim_{x \rightarrow 0^+} g^{-1}(x)$$

Μονάδες 3

Δ5. Να βρείτε την τιμή του $\lambda > 1$ για την οποία ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x \cdot e^{\frac{1}{\lambda-1}} + \lambda \cdot f(x)}{x+1} \right) = -e$$

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει . Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση.
2. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή .

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Ο ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ

ΙΩΑΝΝΗΣ ΣΑΛΑΜΑΝΗΣ