

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι  $f'(x_0) = 0$ .

Μονάδες 7

**A2.** Έστω η συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

**A3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση  $f$  ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , αν για κάποιο  $x_0 \in \mathbb{R}$  ισχύει  $f'(x_0) = 0$ , τότε το  $x_0$  είναι θέση σημείου καμπής της  $f$ »

**α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα  $A$ , αν είναι αληθές, ή το γράμμα  $\Psi$ , αν είναι ψευδές.

**β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**.

Μονάδες 4

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[a, \beta]$ , τότε  $\int_a^\beta f(x) dx = G(\alpha) - G(\beta)$ .

**β)** Μία συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$ , ώστε  $f(x_1) < f(x_2)$ .

**γ)** Αν ένα σημείο  $M(a, \beta)$  ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης  $f$ , τότε το σημείο  $M'(\beta, a)$  ανήκει στη γραφική παράσταση  $C'$  της  $f^{-1}$ .

**δ)** Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $(a, \beta)$ , αν  $f(a) = f(\beta)$ , τότε υπάρχει ακριβώς ένα  $\xi \in (a, \beta)$  τέτοιο ώστε  $f'(\xi) = 0$ .

**ε)** Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , αν ισχύει  $\int_a^\beta f(x) dx = 0$ , τότε  $f(x) = 0$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$ .

Μονάδες 10

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\alpha x}{x-1}$ ,  $x < 1$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ .

Αν η κλίση της  $C_f$  στο σημείο της  $M(-1, f(-1))$  είναι ίση με  $-1$ :

**B1.** Να δείξετε ότι  $\alpha = 4$ .

Μονάδες 4

**B2.** Για  $\alpha = 4$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την  $f^{-1}$ .

Μονάδες 7

Αν  $f^{-1}(x) = \frac{x}{x-4}$ , όπου  $x < 4$  τότε :

**B3.** Υπολογίστε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( f^{-1}(x) \sin \frac{1}{x} \right)$ .

Μονάδες 7

**B4.** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $\frac{f^{-1}(x)}{\sin x} + 1 = 0$ , έχει μία ακριβώς ρίζα στο  $\left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$ .

Μονάδες 7

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = e^{-x} \ln x$ ,  $g(x) = x \ln x - 1$  με  $x > 0$ .

**Γ1.** Να μελετήσετε τη  $g$  ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 5

**Γ2.** Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα  $x_0 \in (1, e)$  τέτοιο, ώστε  $g(x_0) = 0$  και στη συνέχεια, να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης  $g$ .

Μονάδες 5

**Γ3.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και να δείξετε ότι η  $f$  έχει ολικό μέγιστο στη θέση  $x_0$ , το  $f(x_0) = \frac{1}{x_0 e^{x_0}}$ .

Μονάδες 3

**Γ4.** Δίνεται επιπλέον  $F$  μία αρχική της  $f$  στο  $(0, +\infty)$  με  $F(1) > 0$  και η συνάρτηση

$$\Phi(x) = F^2(x), \quad x > 0.$$

Να δείξετε ότι η  $\Phi$  έχει ολικό ελάχιστο.

Μονάδες 7

**Γ5.** Να αποδείξετε ότι  $\int_1^e F(x) dx > eF(e) - F(1) + \frac{1-e^2}{2x_0 e^{x_0}}$ .

Μονάδες 5

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω  $f$  μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f''(x) \neq 0$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει:

$$f''(x)e^{-x} - (f'(x))^2 = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad 2f'(0) + 1 = 0 \quad \text{και} \quad f(0) = \ln 2.$$

**Δ1.** Να δείξετε ότι ισχύει:  $f'(x) + 1 = \frac{e^x}{1 + e^x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Μονάδες 4

**Δ2.** Να δείξετε ότι:  $f(x) = \ln(1 + e^x) - x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Μονάδες 3

**Δ3.** Να μελετήσετε την συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.

Μονάδες 4

**Δ4.** Να δείξετε ότι ισχύει:  $2f(x) + x \geq \ln 4$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Μονάδες 4

**Δ5.** Να λύσετε την εξίσωση  $f'(\eta\mu x) + f'(x^3) = f'(x) + f'(2x^3)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Μονάδες 4

**Δ6.** Αν  $E$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$ , τον άξονα  $y'y$  και την ευθεία  $x=1$ , να δείξετε ότι :

$$\ln \frac{4}{\sqrt{e}} < 2E < \ln \frac{2e + 2}{e}.$$

Μονάδες 6