

Διαγώνισμα στα Μαθηματικά Θετικών Σπουδών

Ημερομηνία 06-12-2024

Ονοματεπώνυμο:

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. (Μονάδες 10)

A2.

1) Διατυπώστε το Θεώρημα του Bolzano για μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$. (Μονάδες 05)

2) Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$; (Μονάδες 05)

A3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με **Σωστό (Σ)**, αν είναι σωστή, ή με **Λάθος (Λ)**, αν είναι λανθασμένη:

α) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

β) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και αυτές είναι υποχρεωτικά ίσες.

γ) Μία συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

δ) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) < g(x)$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 . (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x)(2x - f(x)) = x^2 - \ln^2(e^x + 1)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -\infty$

B1. Να δείξετε ότι $f(x) = x - \ln(e^x + 1), x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

B2. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού κ , ώστε η εξίσωση $f(x) = \kappa^2 + \kappa - 2$ να έχει μοναδική λύση. (Μονάδες 10)

B3. Να λύσετε την εξίσωση $e^{f(-f(x))} = \frac{2}{3}$. (Μονάδες 10)

B4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x + 1) + \eta \mu x)$. (Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$, $x \in A_f$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- Η $\psi = -x$ είναι εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τεταγμένη $\psi_0=0$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot f'(x)) = 1$.

Γ1. Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ . (Μονάδες 08)

Αν $f(x) = \ln(-x+1)$, $x \in (-\infty, 1)$

Γ2. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f . (Μονάδες 05)

Γ3. Να αποδείξετε ότι:

α. Η f είναι γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 02)

β. Η εξίσωση $\frac{f(\ln \kappa)}{x-1} - \frac{f(1+\sigma \nu \lambda)}{x+2} = 2024$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(-2, 1)$, όπου $\kappa \in (0, 1)$ και $\lambda \in (2, 3)$. (Μονάδες 10)

Γ4. Να λυθεί η εξίσωση $f(\eta \mu x) + f(e^{-x} - 1) = f(x) + f(0)$, $x \in \left(-\ln 2, \frac{3}{2}\right)$. (Μονάδες 10)

