

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x \ln x$, $x > 0$.

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \frac{-1}{4}$ έχει ακριβώς δυο λύσεις.

3. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2 στο $(0, +\infty)$ τέτοιοι, ώστε να ισχύει

$$(e^{-1} - x_1)f'(\xi_1) + (x_2 - e^{-1})f'(\xi_2) = 0, \text{ όπου } x_1, x_2 \text{ οι λύσεις της (1).}$$

4. Να αποδείξετε ότι: $(x^2 - x)f'(x) \leq f(x^2) - f(x) \leq (x^2 - x)f'(x^2)$ για κάθε $x > 0$.

5. Να αποδείξετε ότι $x \ln x \geq x - 1$ για κάθε $x > 0$ και στη συνέχεια, να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της στο σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=e$.