

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x + x^2 - 5x + 4 & , x > 0 \\ \alpha & , x = 0 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

α) Να βρείτε το α ώστε η f να είναι συνεχής.

Για $\alpha=4$,

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x) \geq -x_0^2 - x_0 + 4$ για κάθε $x \geq 0$ με $x_0 \in (1, 2)$.

γ₁) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες, τις $\rho_1=1$ και $\rho_2>2$.

γ₂) Να αποδείξετε ότι: $2 \int_1^{\rho_2} \left| \frac{f(x)}{f(x_0)} \right| \eta \mu x \, dx < \rho_2^2 - 1.$

δ) Να δείξετε ότι $2f(x) - f(x_0) > f'(\rho_2)(x - \rho_2)$ για κάθε $x \geq 0$.