

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = x \cdot \ln x + e^x - 1, x \in (0, +\infty)$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση φ έχει ολικό ελάχιστο σε θέση $\rho \in \left(\frac{1}{e^4}, \frac{1}{e^2}\right)$ με $\varphi(\rho) < 0$.

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{-x} \cdot x \cdot \ln x + 1 - e^{-x} = 0$ έχει ακριβώς μια λύση $\xi \in \left(\rho, \frac{1}{e}\right)$.

γ. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (1 - e^{-x}) \cdot \ln x & , x \in (0, +\infty) \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.

γ₁. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

γ₂. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ₃. Να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx \geq f(\rho)$

γ₄. Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $[0, 1]$.

γ_{4.1} Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.

γ_{4.2} Αν E το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα $x'x$,

να αποδείξετε ότι $E < \frac{e-1}{2e}$.