

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x - e + \int_1^e \ln^2 x dx$, $x \in \mathbb{R}$.

A. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^e \ln^2 x dx$.

B. Αφού δείξετε ότι $f(x) = x^3 - 3x - 2$, $x \in \mathbb{R}$,

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

ii) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

iii) Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = -3x - 2$ διαπερνά και εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f .

iv) Αν $A(x_1, 0)$, B το σημείο τομής της ε με την $x=x_1$, όπου $x_1 > 0$ η ρίζα της $f(x)=0$, Γ το σημείο καμπής, και O η αρχή των αξόνων να αποδείξετε ότι η C_f χωρίζει το τραπέζιο $OAB\Gamma$ σε δύο χωρία, που ο λόγος των εμβαδών τους είναι $\frac{3}{2}$.