

$$\Deltaίνεται η συνεχής συνάρτηση g με $g(x) = \begin{cases} (e^x - 1)\ln x & , x \in (0, +\infty) \\ \int_{\ln \alpha}^{\alpha-1} (te^t - e^t + 1)dt & , x = 0 \end{cases}.$$$

Επίσης, έστω G μια αρχική της g στο $(0, +\infty)$.

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

ii) Να μελετήσετε τη G ως προς τη μονοτονία.

iii) Να αποδείξετε ότι ισχύει $2(e^{x^2} - 1)\ln x < G(x^2 + 1) - G(x^2) < (e^{x^2+1} - 1)\ln(x^2 + 1)$ για κάθε $x > 1$.

iv) Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sin(x-1)}{G(x) - G(1)}$.

v) 1. Να δείξετε ότι η G είναι κυρτή στο $[1, +\infty)$

2. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{G(x)}$.

vi) Να αποδείξετε ότι ισχύει $0 < \int_1^{\ln 3} g(x)e^x dx < (6 - 2e)\ln(\ln 3)$.