

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^x}.$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$.

ii. $4f(x) > 2 - x$, για κάθε $x > 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .

γ) Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τους άξονες x' και y' και την ευθεία $x = \lambda$, με $\lambda > 0$.

i. Να υπολογίσετε το $E(\lambda)$.

ii. Να αποδείξετε ότι $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = \ln 2$.

δ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f , τέμνει τη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη x_0 , με $0 < x_0 < 1$.

ε) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = (e^x + 1) \cdot \ln [x_0 \cdot (e^x + 1)] - (e^x - e^{x_0}).$$

όπου x_0 ο αριθμός του ερωτήματος γ). Να αποδείξετε ότι ο άξονας x' εφάπτεται στη γραφική παράσταση της g σε μοναδικό σημείο και να βρείτε το σημείο αυτό.