

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g$  με τύπους

$f(\sqrt{x}) = \sqrt{x+1}$ ,  $x \in [0, +\infty)$  και  $g(x) = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  αντίστοιχα.

α) Να δείξετε ότι  $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ ,  $x \in [0, +\infty)$ .

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση  $h = g \circ f$ .

γ) Έστω  $h(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

γ<sub>1</sub>) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h$  είναι γνησίως αύξουσα.

γ<sub>2</sub>) Να αποδείξετε ότι ισχύει  $h(x) \geq e$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

γ<sub>3</sub>) Να λυθεί η εξίσωση  $h(x) = e^2$ .

γ<sub>4</sub>) Να λυθεί η ανίσωση  $h(\ln x) + h(x^2 - 1) \leq 2e$ .

γ<sub>5</sub>) Να λυθεί η ανίσωση  $h(x^2) \geq e^{\sqrt{2}}$ .

γ<sub>6</sub>) Να λυθεί η εξίσωση  $h(x) + h(x^3) = h(x^2) + h(x^4)$ .