

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x = (x + 1) \ln(x + 1)$, $x > 0$ έχει ακριβώς μια λύση, την $x_0 = \xi$, που βρίσκεται στο διάστημα $(e-1, e^2-1)$.

ii. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} & , x > 0 \\ A + B - 1 & , x = 0 \end{cases}$, όπου $A = \int_0^{\kappa} x e^x dx$ και $B = \int_{\kappa}^1 \ln x dx$, $\kappa \geq 1$.

α) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα A και B.

β) Να βρείτε το κ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

γ) Για $\kappa = 1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

δ) Να δείξετε ότι ισχύει $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\xi}}{\xi + 1}$ για κάθε $x \geq 0$.

ε) Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{\eta_{\mu} x - x}{f(x) - f(\xi)}$.