

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \alpha x e^{\beta-x}$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Η εφαπτομένη στο σημείο $M(2, g(2))$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

A. Να δείξετε ότι $g(x) = x e^{2-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

B. Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

Γ. Να δείξετε ότι η Cg έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Δ. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $e^{x-2} - 2x = 0$.

Δ. Να βρείτε το εμβαδό $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη Cg , την εφαπτομένη στο M και τις ευθείες $x=1$, $x=2$.

E₁. Να βρείτε τη συνάρτηση f , αν $f(x) = g(\ln x)$, $x > 0$

E₂. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης f .

Στ. Αν $f(x) = e^2 \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$, να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται

σε σημείο με τετμημένη $x_1 \in (1, 2)$.