

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει:

- f'' συνεχής στο $\mathbb{R}$
- $f(4) = f(0) + 20$

Να αποδείξετε ότι:

- i) Υπάρχουν πραγματικοί $\xi_1, \xi_2 \in (0, 4)$ τέτοιοι, ώστε να ισχύει $f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) = 20$.
- ii) Υπάρχει σημείο $M(\rho, f(\rho))$ της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $x + 5y - 2025 = 0$.
- iii) Να αποδείξετε ότι $\int_0^\rho x f''(x) dx = 5(\rho - 4) - f(\rho) + f(4)$.