

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} xe^{-x+1} + \alpha x + \beta & , x < 1 \\ -(x-1)^2 + 1 & , x \geq 1 \end{cases}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

A. Να δείξετε ότι $\alpha = \beta = 0$.

B. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Γ. Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.

Δ. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

Ε. Σημείο $M(x, \psi)$ κινείται στη γραφική παράσταση της g , όπου $g(x) = xf(x)$, $x \in \mathbb{R}$ με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $x'(t) = 2$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$.

Στ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\int_0^2 f(x)dx + 1}{-e^x + 1} + \frac{-\int_0^2 f(x)dx + 2}{e^{-x+2} - 1} = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(0,2)$.