

23ο ΘΕΜΑ

Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g , για τις οποίες ισχύουν

(1) Η ευθεία $(\varepsilon) : y = 5x - 2$ εφάπτεται στη C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x-1)-1}{x-2} = 4.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + \lambda x + 5} - x + 1 \right) = 2, \text{ όπου } \lambda \text{ η κλίση της } f \text{ στο } x_1 = 3.$$

α) Να δείξετε ότι $f(1) = 3, f'(1) = 5, f'(3) = 2$ και $g(1) = 1, g'(1) = 4$.

(6 μονάδες)

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης του διαγράμματος της συνάρτησης $h(x) = f(x) \cdot (f \circ g)(x)$, $x \in \mathbb{R}$ στο σημείο με τετμημένη 1.

(4 μονάδες)

Δίνεται επιπλέον ότι η f' είναι γνησίως μονότονη. Να δείξετε ότι

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f'(x^4 - 4x + 7) < 2$.

(5 μονάδες)

δ) Η εξίσωση $2 + f\left(\frac{x}{10}\right) = \frac{x}{2}$, έχει μοναδική λύση $x = 10$.

(5 μονάδες)

ε) Ισχύει $7 < f(3) < 13$.

(5 μονάδες)