

13ο θέμα (έως 2.4)

Δίνεται πολυωνυμική συνάρτηση f , βαθμού $n \geq 2$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f(8+h) - 2f(8-h)}{3h} = 1.$$

(α) Να δείξετε ότι $f'(8) = \frac{3}{4}$.

(4 μονάδες)

(β) Αν η εφαπτόμενη (ε) του διαγράμματος της f στο σημείο της $A(8, f(8))$

διέρχεται από την αρχή των αξόνων τότε

(i) Να δείξετε ότι $f(8) = 6$ και να βρείτε την εξίσωση της (ε).

(4 μονάδες)

(ii) Να βρείτε το όριο $\ell = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{xf(x) - 48}{\sqrt{x+1} - 3}$.

(4 μονάδες)

(γ) Σημείο $M(x, y)$, $0 \leq x < 8$ κινούμενο πάνω στην ευθεία (ε) : $y = \frac{3}{4}x$

απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων με ταχύτητα $v = 2 \text{ m / sec}$.

Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M .

(5 μονάδες)

(δ) Αν για την δοθείσα συνάρτηση f ισχύουν τα παραπάνω και επιπλέον

ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $8f(x) = 39 + 16[f'(x)]^2$ να δείξετε ότι

(i) $v = 2$

(2 μονάδες)

(ii) $f(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{4}x + 8, x \in \mathbb{R}$.

(6 μονάδες)