

Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δυο φορές παραγωγίσιμη με f'' συνεχή, για την οποία ισχύουν:

➤ $f(1)=0$

➤ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+2}{x} = 0$

➤ $f(x) - x^2 - 3x \geq -4$ για κάθε $x \geq 1$

➤ $\int_0^1 f''(x) dx \leq 5$.

A. Να δείξετε ότι: $f(0) = -2$ και $f'(1) = 5$

B. Αν, επιπλέον, η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι ισχύει:

B1. $f(x) \geq 5x - 5$ για κάθε $x \geq 0$.

B2. $\int_0^1 e^x f(x) dx > -5e + 10$