1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\ln x$, $x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $x-1\le x\ln x \le (1+\ln x)(x-1)$ για κάθε $x\ge 1$.

β) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\frac{e}{3},e)$ τέτοια ,ώστε να ισχύει:

$$\ln(\xi_1\cdot\xi_2)+2=3-\ln\frac{e}{3}$$

2. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-\sigma\upsilon\nu x+1}{x}=0$ και $\lim\limits_{x\to e}\frac{x-e}{(f(x)-e^2)^3}=+\infty$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0)=0$, $f(e)=e^2$

β) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,e)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=e^2-1$.

γ) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,e)$ τέτοια , ώστε να ισχύει $\frac{e^2-1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=e$

3. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,+\infty)$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν: $f(1)=e$, $f'(1)=\frac{3e}{2}$ και $f''(x)-f'(x)=\frac{(2x-1)\,e^x}{4x\sqrt{x}}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ Να αποδείξετε ότι :

α. $f(x)=\sqrt{x}\,e^x$, $x\in[0,+\infty)$.

β. Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$ τέτοιοι, ώστε να ισχύει

$f'(\xi_1)-e=0$ και $2f''(\xi_2)\cdot(1-\xi_1)=e$.

4. Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:R\to R$ με $g(x)=e^{2x}$,

$\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\sqrt{t^2+(f^2(x)-3x^4)t-2}-t\right)=3x^4$ και $f(-1)=f(1)<0$.

i) Να δείξετε ότι $f(x)=-3x^2$, $x\in R$.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(-3x)=x+1$ έχει ακριβώς μία λύση, που βρίσκεται στο $\left(-1,\frac{-1}{3}\right)$.

iii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f , g έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη.

iv) Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση $h(x)=f(x)+g(x)$, $x\in(-\infty,0]$, είναι αντιστρέψιμη.

β) Αν επιπλέον η h^{-1} είναι παραγωγίσιμη και $h\big((-\infty, 0]\big) = R$, να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της $C_{h^{-1}}$ στο $\left(1, h^{-1}(1)\right)$.

5. Α. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = xe^x - 2e^x + x + 2, x \in R$.
Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημό της.

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^x}{e^x - 1} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$

Β1. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

Β2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή.

Β3. Να λύσετε την εξίσωση $xe^x - \alpha e^x + \alpha = 0$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του α.

Β4. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x \to 0}\left[(e^{f(x)-1} - 1)\ln(f(x) - 1)\right] = 0$.

Β5. Να δείξετε ότι: $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f(x)}{x} dx = \ln(\sqrt{e} + 1)$.

6. Έστω η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:(0, +\infty) \to R$ για την οποία ισχύει:

- $f\left(\dfrac{x}{\psi}\right) = f(x) - f(\psi)$ για κάθε x , ψ > 0 .
- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x f\left(\frac{x}{2}\right)}{x - 2} = 0$

α) Να αποδείξετε ότι:

α₁) $f(1) = 0$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$ για κάθε $x > 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x > 1$.

α₂) $\lim\limits_{x \to e} f(x) = f(e)$

α₃) η f είναι συνεχής .

β) Να λύσετε την ανίσωση: $f\left(\dfrac{\ln^2 x}{x}\right) + f\left(\dfrac{1}{4}\right) + f(x) > 0$, $x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$.

7. Έστω f μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$, για την οποία ισχύει:
$f''(x)e^{-x} - (f'(x))^2 = 0$ για κάθε $x \in R$, $2f'(0) + 1 = 0$ και $f(0) = \ln 2$.

i) Να δείξετε ότι ισχύει: $f'(x)+1=\dfrac{e^x}{1+e^x}$, $x\in R$.

ii) Να δείξετε ότι: $f(x)=\ln\left(1+e^x\right)-x$, $x\in R$.

iii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.

iv) Να δείξετε ότι ισχύει: $2f(x)+x\geq \ln 4$ για κάθε $x\in R$.

v) Να βρείτε τα όρια: α) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

vi) Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}της f και να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0^+} f^{-1}(x)$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)$

vii) Αν Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$, τον άξονα $\psi'\psi$ και την ευθεία x=1, να δείξετε ότι :

4E + 1 > ln16 4E + 1 > ln16

8. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συναρτήση $f:R\to R$ με

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{e^{2t}+(x^2+2x)f(x)e^t+1}-e^t\right)=\frac{x^2 f'(x)}{2} \text{ και } f''(0)=2,\ f(0)=f'(0)=0 .$$

i) Να δείξετε ότι $f(x)=x^2e^x, x\in R$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

iv) Αν ρ_1,ρ_2 οι τετμημένες των σημείων καμπής, να αποδείξετε ότι ισχύει:

$f(\rho_1)f(\rho_2)=\dfrac{f(-2)}{e^2}$.

v) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=-2$ και $x=0$.

vi) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x^2=\alpha e^{-x}$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

9. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύουν:

- $f^2(x)-2xf(x)-1=\eta\mu x$
- $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>\dfrac{\pi}{2}$

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\sqrt{x^2+\eta\mu x+1}+x$, $x\in R$.

β) Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=α έχει μια τουλάχιστον πραγματική λύση για κάθε α>0 .

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(x)}{x}=3$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική λύση στο $(0,+\infty)$.

10. Έστω f μια παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση και g η συνάρτηση που ορίζεται από την ισότητα $g(\ln x)=f(x^3-x+1)+\lambda e^{\lambda(x-1)}+\lambda^2\ln\lambda\,,x,\lambda>0$.
Να βρείτε το λ, αν η εφαπτομένη της C_f στο A(1,f(1)) εφάπτεται της C_g στο B(0,g(0)) .

11. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$, η οποία έχει στο σημείο $A(\alpha,\alpha)$ της C_f εφαπτομένη παράλληλη στην $\psi=\alpha x$.

Επίσης, έστω η συνάρτηση $g(x)=f(x^2-\ln\alpha\, x+\alpha)\,,x\in R\,,\alpha>0$.
Να αποδείξετε ότι, υπάρχουν ακριβώς δύο τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε οι εφαπτόμενες της C_g στην αρχή των αξόνων να διέρχονται από το σημείο $B(1\,,\frac{1}{\alpha})$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\ln x+1, & x>1 \\ e^{x^2-x}(2x-1), & x\le 1\end{cases}$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.
ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημό της.
iii) Να υπολογίσετε το εμβαδό E(t) του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\frac{1}{2}$ και $x=t$, όπου $t>\frac{1}{2}$.

iv) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(1,e)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f(\xi)=e$
v) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\rho\in(1,e)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $(\ln\rho+1)(\xi-1)=e-1$

vi) Να αποδείξετε ότι:
α. Η f είναι αντιστρέψιμη.
β. Η εφαπτομένη της f^{-1} στο σημείο $M\left(e,f^{-1}(e)\right)$ έχει εξίσωση

$$\psi=\frac{\xi}{\xi+e-1}x-\frac{e\xi}{\xi+e-1}+\xi$$

13. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει:
$$f(\ln x)=\int_1^x(\ln t+\frac{1}{t}-1)\,dt+x-\ln x-1\,,x>0 .$$
α. Να βρείτε το τύπο της συνάρτησης f .
β. Αν $f(x)=xe^x-e^x+1\,,x\in R$,να αποδείξετε ότι:
β_1. $ef(x)\le -x+e-3\,,x\le -1$ και $ef(x)\ge -x+e-3\,,x\ge -1$.
β_2. Η γραφική παράσταση της f έχει στο $-\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη, την ψ=1.
γ_1. Να υπολογίσετε το εμβαδό E(λ) του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική

παράσταση της f ,την ψ=1 και τις ευθείες με εξισώσεις x=1, x=λ, όπου $\lambda \in R$.

γ_2. Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} E(\lambda)$, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)$

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} xe^{-x} & ,x<0 \\ e^{-\alpha}+\alpha-1 & ,x=0 \\ \ln(x+1) & ,x>0 \end{cases}$, $\alpha \in R$,

που είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

i) Να αποδείξετε ότι α=0.

ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι: $f(x) \le x$ για κάθε $x \in R$.

iii) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ξ_1, $\xi_2 \in (-1,1)$ τέτοια, ώστε

να ισχύει: $\xi_1 - 2 - \dfrac{e^{\xi_1}}{(\xi_2+1)^2} = \dfrac{1-4e}{2} e^{\xi_1}$.

iv) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

15. A. Να αποδείξετε ότι: $\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \le \int_\alpha^\beta |f(x)dx|$.

B. Να δείξετε ότι ισχύει: $-e < 2\int_0^1 x\eta\mu x\, e^{x^2} dx < e$.

16. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R \to R$ με f' συνεχή για την οποία ισχύουν:

- $\int_0^1 (f'(x))^2 dx + 4\int_0^1 f(x)dx + 1 = 0$.
- $\left(f'(x) - 2x\right)^2 \ge \left(2x+1\right)^2$ για κάθε $x \in R$.
- $f'(1) = 5$, $f'(-1) = -3$, $f(1) = -1$

α. Να αποδείξετε ότι ισχύει :

α_1. $\int_0^1 (2x+1)^2 dx = \dfrac{13}{3}$ $\quad$ α_2. $\int_0^1 (f(x) + x f'(x))\,dx + 1 = 0$

β. Να δείξετε ότι $f(x) = 2x^2 + x - 4$, $x \in R$.

17. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R \to R$ με $f(0)=1$.

Επίσης, δίνεται $\int_{e^{-x}f'(x)}^{e^{-x}f(x)+1} \left(e^{x} - x - 1\right)dx = 0$.

i) Να δείξετε ότι $f(x) = (x+1)e^{x}$, $x \in R$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

iii) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση C της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

iv) Να δείξετε ότι ισχύει: $ef(x) \geq x+1$ για κάθε $x \geq -3$.

v) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C της f ,την $g(x) = \frac{1}{e}x + \frac{1}{e}$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = -1$, $x = 1$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$f^{3}(x) + f(x) = 2e^{x}$ για κάθε $x \in R$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R .

δ) Να αποδείξετε ότι :

$δ_1$) $e^{\frac{x}{3}} \leq f(x)$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$.

$δ_2$) $f(R) = (0,+\infty)$.

ε) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της.

στ) Να αποδείξετε ότι: $\int_{0}^{\ln 5} f(x)dx + \int_{1}^{2} \frac{2}{x^{2}+1}dx = 3$.

19. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(R) = R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $f(f(x)) + f(x) = 2x$ για κάθε $x \in R$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in R$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = x_0$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, να δείξετε ότι ισχύει $f(x) = x$, $x \in R$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-α}^{α} f(f(x))dx = \int_{α}^{-α} f(x)dx$.

20. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$\Phi(x)=\begin{cases} x^2\ln x+e^{x^2-x}, & x>0 \\ c, & x=0 \end{cases} \quad ,c\in R$$

$$\varphi(x)=\begin{cases} (2\ln x+1)x+(2x-1)e^{x^2-x} & ,x>0 \\ -1 & ,x=0 \end{cases}$$

i) Να βρείτε τον πραγματικό c, αν η συνάρτηση Φ είναι συνεχής στο $x_0=0$.

ii) Αν c=1, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση Φ είναι παράγουσα της φ.

iii) Να δείξετε ότι $\int_0^{\alpha}(2\ln x+1+2e^{x^2-x})x\,dx+\int_{\alpha}^{0}e^{x^2-x}dx=\alpha^2\ln\alpha+e^{\alpha^2-\alpha}-1$, α>0.

iv) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\Phi(x)\,\eta\mu\frac{1}{x}\right)$

v) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $2\xi\ln\xi+\xi=(1-2\xi)e^{\xi^2-\xi}$.

vi) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\rho_1,\rho_2\in(0,1)$ τέτοια, ώστε $\frac{1}{\varphi'(\rho_1)}+\frac{2}{\varphi'(\rho_2)}=1$

21. Β. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$G(x)=\begin{cases} x^2\ln x & ,x>0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases} \quad ,$$

$$g(x)=\begin{cases} 2x\ln x+x & ,x>0 \\ \alpha & ,x=0 \end{cases} \quad \alpha\in R$$

B_1 i) Να βρείτε τον πραγματικό α, αν η συνάρτηση g είναι συνεχής.

ii) Αν α=0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παράγουσα της g.

B_2 Να δείξετε ότι: $\int_0^{e}g(x)dx-\int_{e^2}^{e}g(x)dx=2e^4$.

B_3 Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $2\xi\ln\xi=\frac{1}{2}-\xi$.

B_4 Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\rho_1,\rho_2\in(0,1)$ τέτοια, ώστε $\frac{1}{G''(\rho_1)}+\frac{1}{G''(\rho_2)}=2$.

22. Έστω η συνάρτηση $f(x)=xe^x+x$, $x\in R$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα, τα σημεία καμπής και να βρείτε το πρόσημό της.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στην αρχή των αξόνων.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε(α) του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την εφαπτομένη (ε) και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = \alpha$, όπου $\alpha > 0$.

δ) Να βρείτε το $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} E(\alpha)$

23. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(-1,+\infty) \to R$ με σύνολο τιμών το R για την οποία ισχύουν:

· $3f^2(x)+1 = \dfrac{1}{(x+1)f'(x)}$ για κάθε $x > -1$.

· $f(0) = 1$

Γ$_1$. Να δείξετε ότι $f^3(x) + f(x) = \ln(x+1) + 2$, $x > -1$.

Γ$_2$. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη με $f^{-1}(x) = e^{x^3+x-2} - 1, x \in R$.

Γ$_3$. Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $[\mathbf{0}, +\infty)$ και να δείξετε ότι ισχύει $f(x) \le \dfrac{1}{4}x + 1$ για κάθε $x \ \geq \ 0$.

Γ$_4$. Αν Ε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = e^8 - 1$, να αποδείξετε ότι ισχύει: $E + 2 < 2e^8$.

24. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(0) = 0$ και $f(1) = e - \dfrac{3}{2}$, για την οποία ισχύει $f'(x) \ge 1$ για κάθε $x \in R$.

Γ$_1$ Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \dfrac{1}{2}$.

Γ$_2$ Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το R.

Γ$_3$ Αν Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f ,τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$, $x = 1$, να αποδείξετε ότι $0 < E \le e - 2$.

Γ$_4$ Να αποδείξετε ότι:

i) Υπάρχουν $\rho_1, \rho_2 \in (0,1)$ τέτοια, ώστε $\dfrac{1}{f'(\rho_1)} + \dfrac{2e-4}{f'(\rho_2)} = 2$.

ii) Ισχύει $1 \le f'(\rho_2) \le 2e - 4$

25. Δίνεται συνάρτηση $f:R \to R$ με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύει $\int_0^1 f^2(x)\,dx + \int_0^1 x^2 f'(x)\,dx = f(1) - \frac{1}{3}$.

Να δείξετε ότι ισχύει $f(x) = x$, $x \in R$.

26. B. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$G(x) = \begin{cases} x^2\ln2x + \beta x + \gamma & ,x > 0 \\ 1 & ,x = 0 \end{cases} \quad ,\beta,\gamma \in R \text{ και}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x\ln2x + x + 1 & ,x > 0 \\ \alpha & ,x = 0 \end{cases} \quad ,\alpha \in R .$$

B_1 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α,β,γ αν η συνάρτηση g είναι συνεχής και η G παραγωγίσιμη στο 0 με $G'(0) = 1$.

B_2 Αν α=β=γ=1 ,να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση G είναι αρχική της g στο $[0,+\infty)$.

ii) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $2\xi\ln2\xi = \frac{1}{2} - \xi$.

iii) Υπάρχει $x_0 \in (0,\frac{1}{2})$ τέτοιο, ώστε $G(x_0) = \frac{5}{4}$.

iv) Υπάρχουν $\rho_1,\rho_2 \in (0,\frac{1}{2})$ τέτοια, ώστε $\frac{1}{g(\rho_1)} + \frac{1}{g(\rho_2)} = 2$.

v) $\int_0^1 (g(x)-1)\,dx = \ln2$

B_3 Να δείξετε ότι:

i) Η G είναι κυρτή στο $[\frac{1}{2e^{\frac{3}{2}}},+\infty)$.

ii) Ισχύει $(x+1)G(x) < G(x^2) + x(2+\ln2)$ για κάθε $x > 1$.

iii) Ισχύει $G(x) + G(x^2+1) \geq \frac{3}{2}x^2 + \frac{15}{4}$ για κάθε $x \in [\frac{1}{2},+\infty)$.

27. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R \to R$ με συνεχή παράγωγο, για την οποία ισχύει: $\int_0^1 xf'(x)dx + f(x) = -\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)dx + xe^x + x + e$.

Να δείξετε ότι: $f(x) = xe^x + x$, $x \in R$.

28. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R \to R$ με συνεχή παράγωγο, για την οποία ισχύουν:

i) $\int_0^1 xf'(x)dx + xf'(x) = -2\int_0^1 f(x)dx + (x^2+x)e^x + e + 1,\ x \in R$.

ii) $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$ και $f(1) = e$.

α. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C της f ,τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις x=0, x=1.

β. Να δείξετε ότι $f(x) = xe^x, x \in R$.

γ. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

δ. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x = \alpha e^{-x}$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

29. Έστω συνάρτηση $f:R \to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη με f'' συνεχή και $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$. Αν ισχύει:

- $f(1) = e$ και $f(x) \geq e$ για κάθε $x \in R$.
- Η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $M(0, f(0))$ είναι

παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $\psi = -2x$.

- $\int_0^1 \left(f(x) - f''(x)\right)e^{-x}dx = \kappa$, όπου κ θετικός πραγματικός αριθμός

να αποδείξετε ότι:

α. $f(0) = \kappa + 3$

β. Υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f(x_0) = 3$.

γ. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$ τέτοια, ώστε να ισχύει $(e-3)f'(\xi_1) - \kappa f'(\xi_2) = f'(\xi_1)f'(\xi_2)$.

30. Β. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)e^x + x & ,x \neq 0 \\ \alpha & ,x = 0 \end{cases} \quad , \ \alpha \in R$$

$$g(x) = \begin{cases} (x+2)e^x + 1 & ,x \neq 0 \\ 3 & ,x = 0 \end{cases}$$

B_1 i) Να βρείτε τον πραγματικό α, αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

ii) Αν α=1, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παράγουσα της g.

B_2 Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $(\xi+1)e^{\xi} = 2e - \xi$.

B_3 Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $\psi = x$, $x = 1$.

31. Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : R \to R$ με $g(x) = e^{2x}$,

$\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{t^2+(f^2(x)-3x^4)t-2}-t\right)=3x^4$ και $f(-1) = f(1) < 0$.

i) Να δείξετε ότι $f(x) = -3x^2$, $x \in R$.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(-3x) = x+1$ έχει ακριβώς μία λύση, που βρίσκεται στο $(-1, \frac{-1}{3})$.

iii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f , g έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη.

iv) Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση $h(x) = f(x)+g(x)$, $x \in (-\infty , 0]$, είναι αντιστρέψιμη.

β) Αν επιπλέον η h^{-1} είναι παραγωγίσιμη και $h((-\infty , 0]) = R$, να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της $C_{h^{-1}}$ στο $\left(1, h^{-1}(1)\right)$.

32. Έστω η συνεχής συναρτήση $f : R \to R$ με

$\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{e^{2t}+(x+2)e^{x+t}+1}-e^t\right)=\frac{f'(x)}{2x}, x \neq 0$ και $f(0) = 0$.

i) Να δείξετε ότι $f(x) = x^2e^x, x \in R$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να δείξετε ότι η f έχει δυο σημεία καμπής.

iv) Αν ρ_1, ρ_2 οι τετμημένες των σημείων καμπής, να αποδείξετε ότι ισχύει:

$f(\rho_1)f(\rho_2) = \frac{f(-2)}{e^2}$.

v) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη της στο σημείο $M(-2, f(-2))$ και τον άξονα $\psi'\psi$.

vi) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x^2 = \alpha e^{-x}$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

33. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x+\frac{1}{x}+1$, $x \in A$ με $A = (0, +\infty)$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα .

ii) $f(A)=R$

β. Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της f.

γ. Να αποδείξετε ότι $f^{-1}(1)=f(1)$.

δ. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση C της f^{-1} είναι πάνω από την ευθεία ε: ψ=-x+1 για κάθε $x \in (-\infty, 1)$.

ε. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2f^{-1}(x)+x}{x+\eta\mu x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2f^{-1}(x)+x}{x+\eta\mu \frac{1}{x}}$

34. Δίνεται η συνάρτηση f: $(0,+\infty) \to R$ για την οποία ισχύει $f(x) = (x\ln x - x + 1)\ln x$, $x > 0$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
β. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής με οριζόντια εφαπτομένη.

γ. Να δείξετε $0 < I < 1$, όπου $I = \int_1^e f(x)dx$.

δ. Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\frac{1}{e}, e)$ τέτοια, ώστε να ισχύει: $f'(x_1) + f'(x_2) = 1$.

35. Δίνεται η συνάρτηση f: $f: R \to R$ για την οποία ισχύει $f(x) = (xe^x - e^x + 1)x$, $x \in R$.
α. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
β. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής.
γ. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1, x = 0$.

δ. Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-1,1)$ τέτοια, ώστε να ισχύει: $f'(x_1) - f'(x_2) = \dfrac{-2}{e}$.

ε. Αν $I = \int_{-1}^{0} |f(x)|\, e^x\, dx$, να δείξετε ότι $I < (e - 2)^2$.

στ. Αν $I_1 = \int_1^2 (xe^x - e^x + 1)x^2 e^{x^2} dx$, να δείξετε ότι $\dfrac{e^4 - e}{2} < I_1 < (e^4 - e)(e^2 + 1)$

36. Δίνεται η συνάρτηση f: $(0,+\infty) \to R$ με $f(x) = x^{x+1}$, $x \in (0,+\infty)$ και η συνάρτηση g: $(0,+\infty) \to R$ με $g(x) = \ln x + \dfrac{x+1}{x}$, $x \in (0,+\infty)$.

α. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
β. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
γ. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1, x = 2$.

δ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 x^{x+1}\left(\ln x + \dfrac{x+1}{x}\right) dx$

ε. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{e^4 - e}{2} < \int_1^2 x^{x+2} e^{x^2} dx < 4(e^4 - e)$

37. Δίνεται η συνάρτηση f: $(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x$, $x \in (0,+\infty)$ και το σημείο A(0,1) .

α. Να βρείτε το σημείο B της γραφικής παράστασης C της f που απέχει από το σημείο A τη μικρότερη απόσταση.
β. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C της f στο B είναι κάθετη στην AB.
γ. Σημείο M(x,f(x)) με $x \geq 1$ κινείται στη γραφικής παράστασης C της f με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $x'(t) > 0$. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης C της f τη χρονική στιγμή που ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ABM είναι $\frac{2}{3}x'(t)$.

38. Δίνεται η συνάρτηση f: $(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) = (x\ln x - x + 1)\ln x$, $x > 0$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
β. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής με οριζόντια εφαπτομένη.

γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^e f(x)\,dx$

δ. Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\frac{1}{e}, e)$ τέτοια, ώστε να ισχύει: $f'(x_1) + f'(x_2) = 1$

ε. Αν g μια αρχική της f στο $(0,+\infty)$ με $g(e) = \frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$(f(x))^{\frac{3}{2}} + \left(g(x) - \frac{1}{2}\right)\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1,e).

ή η εξίσωση $2(f(x))^2 + \left(g(x) - \frac{1}{2}\right)f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1,e).

39. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(\ln x) = (x^2 + x)e^x$, $x > 0$ και f(0)=e.

α. Να δείξετε ότι $f(x) = e^{x+e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.
β. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
γ. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα.
δ. Να δείξετε ότι η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη.
ε. Να δείξετε: $1 < \frac{I}{e} < e^e$, όπου $I = \int_0^1 f(x)\,dx$.

40. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύουν: $f(0) = 1$ και $f'(x) \geq 1$ για κάθε $x \in R$. Να δείξετε ότι:

i) $f(2) \geq 3$

ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

iii) Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 2$.

iv) Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0,2)$ τέτοια, ώστε $f'(x_2) \geq \dfrac{f'(x_1)}{2f'(x_1) - 1}$.

v) $2\int_0^1 f(x)\,dx \geq 3$.

vi) Αν επιπλέον ισχύει $f(x) + f(-x) = 2x^2 + 2$ για κάθε $x \in R$,

να δείξετε ότι: $3\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 8$.

41. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + e^x - x - 2$, $x \in R$.

$Γ_1$ Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

$Γ_2$ Να δείξετε ότι η εξίσωση $x(x-1) = 2 - e^x$ έχει δυο ρίζες $ρ_1, ρ_2$ με $ρ_1 < ρ_2$ ετερόσημες.

$Γ_3$ Αν επιπλέον ισχύει: $(2x + e^x - 1)g(x) \neq (x^2 + e^x - x - 2)g'(x)$ για κάθε $x \in R$, όπου $g: R \to R$ παραγωγίσιμη με $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in R$ και h μια συνάρτηση με $h(x) = e^x g(x)$, $x \in R$, να δείξετε ότι:

α) $g(ρ_1)g(ρ_2) \neq 0$

β) Η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα, που βρίσκεται ανάμεσα στις $ρ_1, ρ_2$

γ) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ \in (ρ_1, ρ_2)$ τέτοιο, ώστε $f(ξ)(1 + e^{g(ξ)}) = -g(ξ)$.

δ) Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (ρ_1, ρ_2)$ τέτοια, ώστε $ρ_2 - ρ_1 = \dfrac{-e^{ρ_1} g(ρ_1)}{h'(x_1)} + \dfrac{e^{ρ_2} g(ρ_2)}{h'(x_2)}$.

42. Δίνεται η συνάρτηση f: $(0, +\infty) \to R$ για την οποία ισχύει $f(e^u) = (e^u + u - 2)(e^u + 1)$, $u \in R$.

α. Να δείξετε ότι $f(x) = (x + \ln x - 2)(x + 1)$, $x > 0$.

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

δ. Να δείξετε ότι η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

ε. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μια ακριβώς λύση στο (1,2).

στ. Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1,2)$ τέτοια, ώστε να ισχύει: $\dfrac{2}{f'(x_1)} + \dfrac{3\ln 2}{f'(x_2)} = 1$.

η. Να δείξετε $2I > (\ln 2)^2$, όπου $I = \int_1^2 \left|\dfrac{f(x)}{x}\right| dx$.

43. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $R \to R$ για την οποία ισχύουν:

$6 \le \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+3h)-f(x)}{h} \le 12$, το σημείο $A(0,1) \in C_f$. Να δείξετε ότι:

α. $2 \le f'(x) \le 4$ και $11 \le f(5) \le 21$

β. Υπάρχει $x_0 \in (0,5)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f(x_0) = x_0 + 2$.

γ. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,5)$ τέτοια, ώστε να ισχύει $\dfrac{1}{f'(\xi_1) - 1} + \dfrac{f(5) - 7}{f'(\xi_2) - 1} = 5$

ή

β. Υπάρχει $x_0 \in (0,5)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f(x_0) = -x_0^2 + 4x_0 + 10$.

γ. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,5)$ τέτοια, ώστε να ισχύει $\dfrac{9}{f'(\xi_1) + 2\xi_1 - 4} + \dfrac{f(5) - 5}{f'(\xi_2) + 2\xi_2 - 4} = 5$.

44. Α. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = (1 - 2\ln x)x^2 - 1,\ x > 0$.

i) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii) Να μελετήσετε την g ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

Β. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x^2 - 1} & x \in (0,1)\cup(1,+\infty) \\ \alpha & x = 1 \end{cases}$, $\alpha \in R$.

i) Να αποδείξετε ότι είναι: $\alpha = \dfrac{1}{2}$ και $f'(1) = \dfrac{-1}{2}$

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία .

iii) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

iv) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης C της f .

v) Να δείξετε ότι E<1, όπου E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = e-1$, $x = e^2-1$.

45. Έστω συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

- $f(0) = 0$, $f'(0) = f''(0) = 1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f''(x) = +\infty$

Επίσης, δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x) - x}{x^2}$, $x \ne 0$.

Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) - \xi = \xi^2$.

46. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύουν:

- $f(0) = 1, f'(0) = 2$

Επίσης, δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x\left(f(e^{-x}) - 1\right), x \in R$.

Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

47. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & ,x<1 \\ e^{x-1}+\ln x-2 & ,x\geq 1 \end{cases}$

i) Να μελετηθεί η f ως προς τη συνέχεια.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα (1,2).

iv) Να εξετάσετε αν η f αντιστρέφεται.

v) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

vi) Να αποδείξετε ότι για κάθε κ>1 υπάρχει μοναδικό $\xi \in (1,+\infty)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f(\xi) = \dfrac{f(\kappa) + \kappa f(\kappa+1) + (\kappa+1)f(\kappa+2)}{2(\kappa+1)}$.

48. Δίνεται η συνάρτηση $\Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} + \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt & , x < 0 \\ \displaystyle\int_1^2 f(t)\,dt & , x = 0 \\ x\ln x - x + 1 & , x > 0 \end{cases}$, όπου f συνεχής στο R και Φ συνεχής.

α) Να δείξετε ότι

i) $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 0$ και $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,dt = 1$.

ii) η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον λύση στο (0,1) .

iii) η εξίσωση $g(x) = \dfrac{1}{2}$ έχει ακριβώς μια λύση στο (1,e) ,

όπου $g(x) = x\ln x - x + \displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt$.

β) Να μελετήσετε την Φ ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

49. Δίνεται η συνάρτηση $\Phi(x) = x\ln x - \left(\int_0^1 f(t)\,dt \int_1^2 f(t)\,dt\right)(x^2 - 3x + 2)$, x>0, όπου f συνεχής στο R, για την οποία ισχύει $\Phi(x) \geq 0$ για κάθε x>0.

α) Να δείξετε ότι

i) $\int_0^1 f(t)\,dt \cdot \int_1^2 f(t)\,dt = -1$

ii) η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον λύση στο (0,2) .

iii) η εξίσωση $g(x) = \frac{1}{2}$ έχει ακριβώς μια λύση στο (1,e) ,

όπου $g(x) = x\ln x - x + \left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2 - \int_0^1 f(t)dt \int_0^2 f(t)dt$.

β) Να μελετήσετε την Φ ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ_1) Να βρείτε το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C της Φ , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες x=1, x=λ>1.

γ_2) Να βρείτε το $\lim_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$

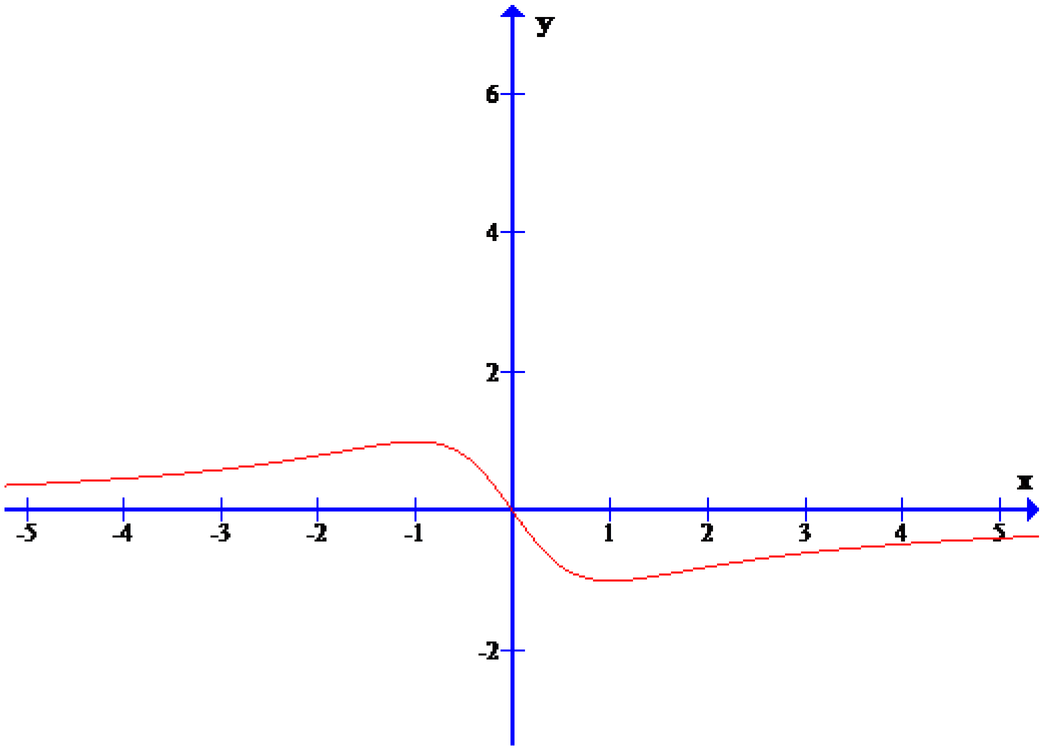
50. Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to R$ τρείς φορές παραγωγίσιμη με $f^{(3)}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, $f([\alpha,\beta]) = [-1,5]$ και f(α)=0 , f(β)= 3

i) Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια, ώστε να ισχύει $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $2f(x) \cdot f'(x) + 2f'(x) \cdot f''(x) = 3f(x)$ έχει μια τουλάχιστον λύση .

51.



Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$ με γραφική παράσταση C της f' να δίνεται από το παραπάνω σχήμα. Επίσης, ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
- $f(0) = 0$, $f(-1) = f(1) = \alpha$, όπου α<0
- $\int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{1} f(x)dx = \frac{-1}{5}E(\Omega)$, όπου Ε(Ω) το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση C της f , την ψ=α και τις ευθείες x=-1, x=1

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

iii) Να εξετάσετε αν η f έχει ασύμπτωτες και να φτιάξετε την γραφική παράσταση C της f .

i) Να υπολογίσετε το εμβαδό Ε(Ω) συναρτήσει του α και στη συνέχεια , αν είναι $E(\Omega) = \frac{10}{7}\ln 2$, να βρείτε το α.

52. Δίνεται η συνάρτηση $\Phi(x) = x\ln x - \left(\int_{0}^{1} f(t)dt \int_{1}^{2} f(t)dt\right)(x^2 - 3x + 2)$, x>0, όπου f συνεχής στο R, για την οποία ισχύει $\Phi(x) \geq 0$ για κάθε x>0.

α) Να δείξετε ότι: $\int_{0}^{1} f(t)\,dt \int_{1}^{2} f(t)\,dt = -1$

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $G(x)=\frac{1}{2}$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(1,e)$,

όπου $G(x)=x\ln x - x + \left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2 - \int_0^1 f(t)dt \int_0^2 f(t)dt$.

γ) Να μελετήσετε την Φ ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της

$δ_1$) Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε(Ω) του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων Φ' , G' και τις ευθείες $x=\frac{1}{2}$, x=2 .

$δ_2$) Να βρείτε $\lambda \in (\frac{1}{2},2)$, ώστε η ευθεία x=λ να χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

53. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\sqrt{\beta x^2+1}$, $x\in R$ για την οποία ισχύουν:

- Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο A(0,f(0)) είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση ψ=-x+2018 .
- Η ψ=0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της f στο $-\infty$

i) Να δείξετε ότι α=1 και β=1 .
ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα.

iv) Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της f στο $+\infty$ και την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο της A(0,f(0)) .

v) Αν Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφικής παράσταση C_f της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία x=3 ,να δείξετε ότι Ε>10.

vi) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την συνάρτηση f^{-1}.

iv) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης $C_{f^{-1}}$ της συνάρτησης f^{-1}.

54. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ με συνεχή παράγωγο, για την οποία ισχύουν:

- $\int_1^e \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 dx + \int_1^e (\ln x)^2 f'(x)\,dx = 2$, $x\in R$
- $f(e)=e$

α. Να δείξετε ότι: $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e-2$

β. Να δείξετε ότι $f(x)=x\ln x$, $x>0$

γ. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

δ. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή και ισχύει: $x-1 \le x\ln x \le (1+\ln x)(x-1)$ για κάθε $x \ge 1$

ε. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x = e^{\frac{\kappa}{x}}$, $x>0$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού κ.

στ. Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες στα σημεία Α(1,f(1)) και B(e,f(e)) έχουν εξισώσεις ε_1:ψ=x-1 , ε_2:ψ=2x-e αντίστοιχα και να βρείτε το σημείο τομής τους.

η. Αν Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C της f ,τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις x=1, x=e, να δείξετε ότι $E > \frac{(e-1)^2+1}{2}$

$$\int_1^e \frac{(f(x))^2}{x}dx + \int_1^e (\ln x)^2 (\sqrt{x}f(x))' dx = 2$$

$f(e) = \sqrt{e}$

Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x}\ln x$, $x>0$

55. Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν: $\left(f'(x) - xe^x - 2e^x\right)\left(f(x) - xe^x - e^x + 1\right) = 0$ για κάθε $x \in R$ και f(0)=0 .

α. Να δείξετε ότι ισχύει $f(x) = xe^x + e^x - 1, x \in R$.

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα ,την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

δ. Να δείξετε ότι $0 < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x f(\eta\mu x)dx < \frac{e\pi^2}{4}$

ε. Να δείξετε ότι: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x f(\eta\mu x)dx = \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(\eta\mu x)dx$ και στη συνέχεια

$$-\pi^2 < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x f(\eta\mu x)dx < (2e-1)\pi^2$$

56. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(x) = xe^x - e^x + x + 1, x \in R$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να την μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

β. Να δείξετε ότι η ευθεία $\psi = x+1$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$.

γ. Σημεία M(x, f(x)) , N(x,ψ) κινούνται στη γραφική παράσταση της f και την $\psi = x+1$ αντίστοιχα, έτσι ώστε να έχουν την ίδια τετμημένη x, όπου x>1 με ρυθμό $x'(t)>0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της κατακόρυφης απόστασης d των σημείων Μ, Ν την χρονική στιγμή t_0, όπου $x(t_0)=x_0$, να είναι $d'(t_0)=3x'(t_0)$.

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , την ασύμπτωτη $\psi = x+1$ και τις ευθείες $x=0$, $x=2$.

ε. Να δείξετε ότι: $\dfrac{-16}{3e} < \int_{-1}^{1} f(x^3)g(x)\,dx < \dfrac{16}{3}$, όπου $g(x)=x^2-x+1,\ x\in R$.

57. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=\begin{cases} \left(\int_0^{-1} f(t)dt\right)\ln(x+e)+\int_2^0 f(t)dt & ,x\ge 0 \\ x^2-\dfrac{2}{e}x+\left(\int_2^{-1} f(t)dt\right) & ,x<0 \end{cases}$

όπου f συνεχής στο R με f(x)>0 για κάθε $x \in R$.

Γ1. Να μελετήσετε την φ ως προς τη συνέχεια στο $x_0=0$.

Γ2. Να μελετήσετε την φ ως προς την μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Γ3. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $\varphi(x)=\alpha$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

Γ4. Αν επιπλέον $\int_0^{-1} f(t)dt=-2$ και $\int_0^{2} f(t)dt=11$ και φ παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, να δείξετε ότι:

Γ4.1 Είναι $\varphi'(0)=-\dfrac{2}{e}$.

Γ4.2 Το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=-1$, $x=2$, είναι 13.

Γ4.3 Ισχύει $E<14e$, όπου Ε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της φ , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=e$.

58. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=\begin{cases} \left(\int_0^{-1} f(t)dt\right)\ln(x^2+e)+\int_2^0 f(t)dt & ,\ x\ge 0 \\ \left(\int_2^{-1} f(t)dt\right)(x^3+1) & ,\ x<0 \end{cases}$

όπου f συνεχής στο R με f(x)>0 για κάθε $x \in R$.

Γ1 Να μελετήσετε την φ ως προς τη συνέχεια στο $x_0=0$.

Γ2 Να μελετήσετε την φ ως προς την μονοτονία, να δείξετε ότι η φ είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.
Γ3 Να λυθεί η εξίσωση $\varphi(\ln(x+1)) = \varphi(e^x - 1)$.
Γ4 Αν επιπλέον $\int_{-1}^{0} f(t)dt = 2$ και $\int_{0}^{2} f(t)dt = 11$,

Γ4.1 Να μελετήσετε την φ ως προς την κυρτότητα και να βρεθούν τα σημεία καμπής της.
Γ4.2 Να δείξετε ότι: $13\sqrt{e} < E < (\ln 4 + 13)\sqrt{e}$, όπου E το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της φ, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=\sqrt{e}$.

Ή

Γ4.3 Να δείξετε ότι: $13\sqrt{e} < E < (\ln 2 + 13)\sqrt{e}$, όπου E το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της φ, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=\sqrt{e}$.

59. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{x + e^x - 1}{e^x - 1}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$, όπου $\alpha = \int_0^1 2xe^x dx$

και η συνάρτηση $g(x) = (1-x)e^x - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Γ1 Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $g(x)=0$ και το πρόσημο της g.

Γ2 Να δείξετε ότι :
Γ2.1 $\alpha=2$ και

Γ2.2 Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $\varphi'(0) = -\frac{1}{2}$.

Γ3 Να δείξετε ότι η φ είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού $D_{\varphi^{-1}}$ της αντίστροφης.
Γ4 Να λυθεί η ανίσωση $\varphi(\eta\mu x^3) - \varphi(x^3) < 0$.
Γ5 Να δείξετε ότι: $\frac{e}{2} < \int_0^1 xe^{x^2}\varphi(x)dx < e - 1$.

Γ6 Να αποδείξετε ότι $E>6$, όπου E το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της φ, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=6$.
Γ7 Αν επιπλέον η φ είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι $E>7$, όπου E το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της φ, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=6$.

60. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 2x\ln x + x & , x\in(0,+\infty) \\ 0 & , x=0 \end{cases}$

α. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.
β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=\begin{cases} x^2\ln x & , x\in(0,+\infty) \\ 0 & , x=0 \end{cases}$

είναι μία παράγουσα της f στο $[0,+\infty)$.

δ$_1$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^t f(x)dx$, t>0 .

δ$_2$. Αν επιπλέον $\int_0^t f(x)dx = 1 - \text{συν}t$ για κάποιο t>0, να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=ημx έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,t) .

61. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}-1 & , x\le 1 \\ \ln x & , x>1 \end{cases}$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, με $f'(1)=1$.

ii) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

iv) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη με $f^{-1}(x)=\begin{cases} \ln(x+1)+1 & , -1<x\le 0 \\ e^x & , \quad x>0 \end{cases}$

v) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)= f^{-1}(x)$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(-1,0]$.

62. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : R \to R$ με $f(x)=xe^x$ και $g(x)=e^{-x}+1$, $x\in R$

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η fog^{-1}.

β. Αν $h(x)=\dfrac{-\ln(x-1)}{x-1}, x>1$

β1. Να μελετήσετε την h ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα ,την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

β2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της h.

β3. Να λυθεί η εξίσωση h(x)=0.

β4. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της h , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες x=2, x= e+1 .

β5. Να δείξετε ότι ισχύει $(x+1)\ln(x-1) > \ln(x^2-1)$ για κάθε $x>e+1$.

63. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(3x) = \dfrac{16^x - 4^{-x}}{16^x + 4^{-x}}$.

Α. Να δείξετε ότι $f(x) = \dfrac{4^x - 1}{4^x + 1}, x \in R$.

Β. Να βρείτε τα όρια: i) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Γ. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την f^{-1}.

Δ. Αν $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{\ln 4} \cdot \ln \dfrac{x+1}{1-x}$, $x \in (-1,1)$, να λυθεί η ανίσωση $f(f(e^{2\eta\mu x} - 1)) \geq 0$ στο διάστημα $(-\pi, \pi]$.

Ε. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \kappa, \kappa \in R$, για τις διάφορες τιμές του κ.

64. Έστω $f: R \to R$ μια συνάρτηση με $f^3(x) + 3f(x) + 1 = x$, $x \in R$.

Α. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Β. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και να βρείτε την $f'(1)$.

Γ. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο M(1,f(1)).

Δ. Να αποδείξετε ότι: i) f(R)=R ii) η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την f^{-1}.

65. α. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^2 - 4x - x\ln x + 1 = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(1, e)$.

β. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \kappa x^2 + \mu x - 1, x \in R$ και $g(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

β1. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, μ, αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν στο σημείο $M(x_0, \psi_0)$ κοινή εφαπτομένη (ε) , που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = \dfrac{\pi}{4}$ και στη συνέχεια, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) .

β2. κ=0 , μ=1

Σημείο $A(\alpha, 0)$ με α>1, κινείται στον άξονα $x'x$ με ρυθμό $\alpha'(t) > 0$.
Αν Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΣΤ, όπου $M(1,0)$, $\Sigma(\alpha, g(\alpha))$ και $T(\alpha, f(\alpha))$,
να δείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή t_0 με $\alpha(t_0) \in (1, e)$, ώστε να ισχύει
$E'(t_0) = \dfrac{1}{2}\alpha'(t_0)$.

66. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν:

- $x^2 f'(x) = f(x)(x-1)$ για κάθε $x>0$
- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x>0$
- $f(1) = e$

Γ1 Να δείξετε ότι $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$, $x>0$.

Γ2 Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία , τα ακρότατα , τα κοίλα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της .

Γ3 Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

Γ4 Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $\ln(\frac{\alpha}{x})^x = 1$, $\alpha>0$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

Ή … το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $\ln(\frac{3}{x})^x = 1$.

Γ5 Να αποδείξετε ότι ισχύει $e^{\frac{1}{x}} \geq -e^2 + \frac{e^2}{x}$ για κάθε $x>0$.

Γ6 Να δείξετε ότι: $(x_1+x_2)e^{\frac{2}{x_1+x_2}} < x_1 e^{\frac{1}{x_1}} + x_2 e^{\frac{1}{x_2}}$ για κάθε $x_1, x_2 > 0$ με $x_1 < x_2$.

Γ7 Να αποδείξετε ότι $E > \frac{4e - e^2}{8}$, όπου Ε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\frac{1}{2}$, $x=1$.

Γ8 Αν επιπλέον $\varphi(x) = F(x+1) - F(x)$, $x \geq 1$, όπου F μια παράγουσα της f στο $[1,+\infty)$, να αποδείξετε ότι:

Γ8.1 Η φ' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και

Γ8.2 Ισχύει: $F'(x+1) - F'(x) < F(x+2) - 2F(x+1) + F(x) < F'(x+2) - F'(x+1)$, $x>1$

Γ9 Να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim_{x\to 0}(f(x)\eta\mu x)$ β) $\lim_{x\to+\infty}\left((e^{\frac{1}{f(x)}} - 1)\ln\frac{1}{f(x)}\right)$

67. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει:

$(x-1)f(x) = \ln x$ για κάθε $x>0$.

α) Να βρεθεί ο τύπος της f .

β) Αν $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1}, & 0<x\neq 1 \\ 1, & 1 \end{cases}$

β1) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1)=-\dfrac{1}{2}$.

β2) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και κυρτή .

β3) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

β4) Να λυθεί η εξίσωση: $(\dfrac{1}{2}-\ln 2)(x+1)x^2 = x-(x+1)\ln(x+1), x>-1$

β5) Να αποδείξετε ότι ισχύει $\dfrac{2\ln x}{x-1}\geq -x+3$ για κάθε $x>0$.

β6) Να αποδείξετε ότι: $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{(x-1)^2}dx=\ln(e+1)-\frac{e}{e+1}$.

γ) Αν επιπλέον F μια παράγουσα της f στο $(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι:

γ1) $\displaystyle\int_1^e F(x)dx=(e-1)F(e)-1$.

γ2) Ισχύει: $F(x^2)+F(x^2+2)<F(x^2+1)+F(x^2+3)$, για κάθε $x\neq 0$.

68. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει:

$(x-1)f(x)=x\ln x$ για κάθε $x>0$.

α) Να βρεθεί ο τύπος της f.

β) Αν $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\ln x}{x-1}, & 0<x\neq 1 \\ 1, & 1 \end{cases}$

β1) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1)=\dfrac{1}{2}$.

β2) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη.

β3) Να βρείτε οι το σύνολο τιμών της f και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

β4) Να αποδείξετε ότι ισχύει $\dfrac{2x\ln x}{x-1}\geq x+1$ για κάθε $x>0$.

γ) Αν επιπλέον F μια παράγουσα της f στο $(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι:

γ1) $\int_1^e F(x)\,dx = (e-1)F(e) - \frac{e^2+1}{4}$.

γ2) Ισχύει: $F(x^2) + F(x^2+2) < F(x^2+1) + F(x^2+3)$, για κάθε $x \neq 0$.

69. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + x + \alpha}$, $x \in R$, $\alpha > \frac{1}{4}$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο A(1,f(1)) είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $\psi = \frac{-4}{3}x + 2019$.

i) Να δείξετε ότι α=2 .
ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα.

iv) Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της f στο $+\infty$ και την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο της A(0,f(0)) .

v) Αν Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφικής παράσταση C_f της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες x=1, x=4 ,να δείξετε ότι $E > \frac{19}{2}$.

70. Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$, f(0)=0 και $f'(0) = 1$.
Επίσης ισχύει $\frac{f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{e^{-f(x)} - e^{f(x)}}{e^{f(x)} + e^{-f(x)}}$, $x \in R$.

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f'(x)\left(e^{f(x)} + e^{-f(x)}\right)$, $x \in R$ είναι σταθερή.
ii) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $x \in R$.
iii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
iv) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής.
v) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$, τον άξονα $\psi'\psi$ και την ευθεία x=1.

v) Να δείξετε ότι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x\, f(x)\,dx < 1$.

71. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x) + f(x) = (f'(x) + 1)e^{-x}$ για κάθε $x \in R$
- $f(1) = \frac{1}{e-1}$

Α) Να βρείτε την συνάρτηση f .

Β) Αν $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{e^x-1}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$, να δείξετε ότι:

i) Η f είναι γνησίως φθίνουσα και κυρτή.

ii) $f(R)=(0,+\infty)$.

iii) Η εφαπτομένη της C_f στο Α(0,1) είναι η $\psi=-\dfrac{1}{2}x+1$.

Γ) Έστω Ε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες x=0 , x=2. Να δείξετε ότι: $1<E<1+\dfrac{2}{e^2-1}$

Δ) Αν F μία παράγουσα της f στο R , να αποδείξετε ότι:

$$F(0)<\int_0^1\big(xf(x)+F(x)\big)dx<F(0)+1.$$

72. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)-1=2xe^{x-f(x)}$ για κάθε $x\in R$
- $f(0)=0$

Α) Να βρείτε την συνάρτηση f .

Β) Αν $f(x)=x+\ln\left(x^2+1\right)$,

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

ii) Να δείξετε ότι $f(R)=R$

iii) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στην αρχή των αξόνων.

Γ) Έστω Ε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες x=0 , x=1. Να δείξετε ότι: $0<2E-1<\ln 2$.

Δ) Αν F μία παράγουσα της f στο R , να αποδείξετε ότι:

$$F(0)<\int_{-1}^0\big(xf(x)+F(x)\big)dx<F(0)+1-\ln 2.$$

73. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)+f(x)>2xe^{-x}$ για κάθε $x\in R$
- $\displaystyle\int_1^{f(0)}(e^x-x)dx=0$

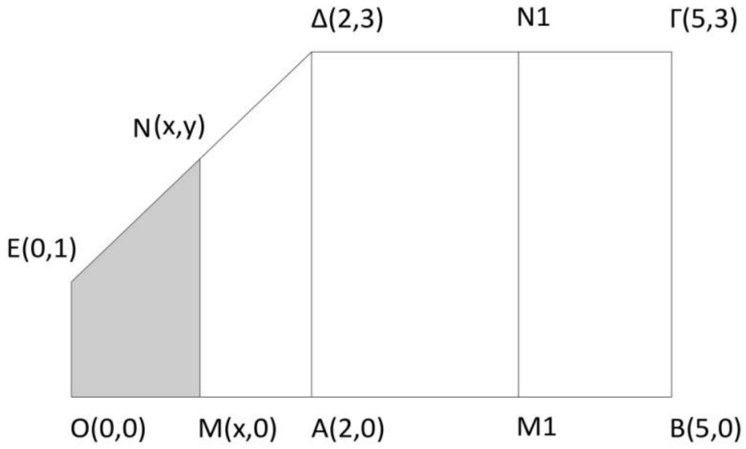
Α) Να δείξετε ότι: i) $\int_0^1 (e^x f(x)dx > \frac{4}{3}$.

Β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\left(x-1\right)^2+\left(4-3\int_0^1 (e^t f(t)dt\right)x=0$

έχει ακριβώς μια ρίζα στο (0,1) .

Γ) Αν $g(x)=e^x f(x), x\in R$ και Ε(α) το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της g, τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες x=0 , x=α, να δείξετε ότι: $\lim_{\alpha\to+\infty} E(\alpha)=+\infty$

74.



Στο παραπάνω σχήμα το Μ διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ από το Ο προς το Β και το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ είναι κάθετο στο τμήμα ΟΒ.

α) Να βρείτε την εξίσωση του ευθυγράμμου τμήματος ΕΔ .

β) Αν ΕΔ: ψ=x+1, να δείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου ΟΜΝΕ , ως συνάρτηση του x=ΟΜ , δίνεται από την συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x}{2} & , x\in\left[0,2\right]\\ 3x-2 & , x\in\left(2,5\right]\end{cases}$.

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η f^{-1}.

δ) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{2x+1}-1 & , x\in\left[0,4\right]\\ \dfrac{x+2}{3} & , x\in\left(4,13\right]\end{cases}$

δ_1) Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της $C_{f^{-1}}$ στο $x_0=4$

δ_2) Αν Ε(Ω) είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$, την εφαπτομένη της (ε) του δ_1 ερωτήματος και τον άξονα $x'x$, να βρείτε το $\alpha\in R$ ώστε η ευθεία x=α να χωρίζει το χωρίο Ω σε δυο ισεμβαδικά χωρία.

ε_1) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ε_2) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $\lambda \in [0,+\infty)$ ώστε, να ισχύει $f(x) \le -\ln(\lambda+1)+\lambda+3$ για κάθε $x \in [0,5]$.

στ) Αν το σημείο Μ κινείται με ταχύτητα 5m/min , να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του χωρίου ΟΜΝΕ την χρονική στιγμή t_o που το Μ διέρχεται από το Α.

75. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x+1$ και $g(x) = 2\sqrt{x}$.

α. Να ορίσετε την συνάρτηση $h = f + (g \circ f)$.

β. Αν $h(x) = x+1+2\sqrt{x+1}$, $x \ge -1$, να δείξετε ότι η συνάρτηση h είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η h^{-1}.

γ. Είναι $h^{-1}(x) = x+1-2\sqrt{x+1}$, $x \ge 0$.

Να μελετήσετε την h^{-1} ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των h , h^{-1} και τις ευθείες x=0, x= 3.

ε. Να δείξετε ότι ισχύει $\eta\mu x - x < 2\left(\sqrt{\eta\mu x - x+1}-1\right)$ για κάθε $x > 0$.

76. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2^x$ και $g(x) = -x^2+2x+1$, $x \in R$.

i. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία με τετμημένες $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .

iii. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $\dfrac{2}{5} < \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu 1-1}\displaystyle\int_{-2}^{-1}\dfrac{\eta\mu(x+1)}{f(x)-g(x)}dx < \dfrac{4}{29}$.

iv. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $8\ln\dfrac{2}{3} < \displaystyle\int_{3}^{4}\dfrac{f(x)}{g(x)-1}dx < 4\ln\dfrac{2}{3}$.

77. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = \kappa x e^x + e^{2x} - 4e^x + 3$, $x \in R$, $\kappa \in R$.
Ισχύει $\varphi(x) \ge 0$ για κάθε $x \in R$.
α. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ.

Αν κ=2,

β. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=2xe^x$ και $g(x)=-e^{2x}+4e^x-3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη, την οποία και να βρείτε.

γ. Να αποδείξετε ότι: $e^x(4-e^x)\le 2x+3$ για κάθε $x\ge 0$.

γ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g και την ευθεία x=1 .

δ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I=\int_{\ln 5}^{\ln 4}\frac{f(x)}{x\,g(x)}dx$.

78. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με $f(1)=0$ και $f'(1)=2019$, για την οποία ισχύει : $f(xy)=xf(y)+yf(x)$ για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=2019x\ln x$, $x>0$.

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f, στο σημείο $A(1,f(1))$.

δ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2\ln x-x^2+x}$ ή $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-e^x}{f(e^x)-2019(e^x-1)}$

ε. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in\left(\frac{1}{e},e\right)$, ώστε να ισχύει: $\left|f'(\xi_1)-f'(\xi_2)\right|=f'(1)$.

στ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^{2019}=e^{\frac{1}{x}}$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$.

ή να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x^{2019}=e^{\frac{\kappa}{x}}$ στο $(0,+\infty)$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού κ .

ζ. Να αποδείξετε ότι: $\int_e^{e^2} f(\ln x)dx>2019e$.

79. Δίνεται η συνάρτηση $\Phi(x)=x\ln x-\left(\int_0^1 f(t)dt\int_1^2 f(t)dt\right)(x^3-4x+3)$, x>0, όπου f συνεχής στο R, για την οποία ισχύει $\Phi(x)\ge 0$ για κάθε x>0 .

α) Να δείξετε ότι: $\int_0^1 f(t)dt\int_1^2 f(t)dt=-1$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $G(x)=\frac{1}{2}$ έχει ακριβώς μια λύση στο (1,e) , όπου $G(x)=x\ln x-x+\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2-\int_0^1 f(t)dt\int_0^2 f(t)dt$.

γ) Να μελετήσετε την Φ ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

δ_1) Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε(Ω) του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων Φ' , G' και τις ευθείες $x=\frac{1}{2}$, x=2.

δ_2) Να δείξετε ότι υπάρχει $\lambda \in (\frac{1}{2},2)$, ώστε η ευθεία x=λ να χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

80. Για τις συναρτήσεις f, g ισχύει $f(g(x))=x$ για κάθε $x\in R$,
όπου $g(x)=x-\ln(1+e^x)$, $x\in R$.

α) Να βρείτε την συνάρτηση f .

β) Αν $f(x)=\ln\frac{e^x}{1-e^x}, x<0$:

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα, τις ασύμπτωτες και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

ii. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα, τις ασύμπτωτες και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

iii. Να δείξετε ότι ισχύει $g(f(x))=x$, $x<0$.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{g(f(x))}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{g^{-1}(e^x-1)}{g(e^x-1)-e^x+1}$.

δ) Αν Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και τις ευθείες $x=-1$, $x=-\ln2$, να αποδείξετε ότι Ε< ln3(1-ln2).

81. Για τις συναρτήσεις f, g ισχύει $f(g(x))=x$ για κάθε $x\in R$,
όπου $g(x)=x+\ln(e^x+1)$, $x\in R$.

α) Να βρείτε την συνάρτηση f .

β) Αν $f(x)=x-\ln\left(\frac{\sqrt{4e^x+1}+1}{2}\right), x\in R$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα, τις ασύμπτωτες και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

ii. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα, τις ασύμπτωτες και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

iii. Να δείξετε ότι ισχύει $g(f(x))=x$, $x\in R$.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{g(f(x))}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{g^{-1}(\ln x-1)}{g(\ln x-1)-\ln x+1}$.

δ) Αν Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , την ψ=x και τις ευθείες $x=0$, $x=\ln2$, να αποδείξετε ότι Ε< 1.

82. Για τις συναρτήσεις f, g ισχύει $f\left(g(x)\right) = x$ για κάθε $x \in \left(-\infty, 0\right]$,
όπου $g(x) = e^{2x} - 2e^{x} + 2 \quad x \le 0$.

α) Να βρείτε την συνάρτηση f .

β) Αν $f(x) = \ln\left(1 - \sqrt{x-1}\right), x \in \left[1, 2\right)$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα, τις ασύμπτωτες και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

ii. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα, τις ασύμπτωτες και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

iii. Να δείξετε ότι ισχύει $g\left(f(x)\right) = x, \; x \in R$.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε(α) του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , την ψ=2 και τις ευθείες $x = \alpha, \; x = 0$, όπου α<0.
Στη συνέχεια να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} \dfrac{E(\alpha)}{g(\alpha) - 2}$

δ) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{\eta\mu(x-1)}$.

ε) Να δείξετε ότι: $\displaystyle\int_1^{\frac{5}{4}} f(x)\,dx = \frac{6\ln 2 - 5}{8}$.

83. Για τις συναρτήσεις f, g ισχύει $f\left(g(x)\right) = x$ για κάθε $x \in R$,
όπου $g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), x \in R$.

α) Να βρείτε την συνάρτηση f .

β) Αν $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{2e^{x}}, x \in R$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

ii. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

iii. Να δείξετε ότι ισχύει $g\left(f(x)\right) = x, \; x \in R$.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0, \; x = \ln 2$.

δ) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ και $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$.

ε) Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{g^{-1}(x)}{f^{-1}(x)}$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g^{-1}(x)}{g(x)}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2019}{f(x) + \eta\mu^2 x}$.

84. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{(x-1)\ln x}{x}, x>0$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο (0,ξ) και κοίλη στο $(\xi,+\infty)$ με $\xi\in(1,2)$.

γ. Να κάνετε πρόχειρη γραφική παράσταση της f.

γ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες x=1, x=e .

δ. Να λυθούν οι εξισώσεις:

δ1. $f(e^{x-1})+f(x-\ln x)=0$.

δ2. $f(e^{x}+1)=f(x^{2}-2x+2)$.

85. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-\frac{1}{3}x^{3}, x\le 0$. Σημείο $A(\alpha,-\frac{1}{3}\alpha^{3})$ κινείται στη γραφική παράσταση της f με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $\alpha'(t)=-\alpha(t)$.

α. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο Α, καθώς και το σημείο τομής της, έστω Μ, με τον άξονα $x'x$.

β. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής :

β1. Της τετμημένης του σημείου Μ τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $\alpha(t_0)=-3$.

β2. Του εμβαδού του τριγώνου ΑΟΜ ,όπου Ο η αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $\alpha(t_0)=-3$.

β3. Της γωνίας θ που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$, τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $\alpha(t_0)=-3$.

γ1. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την εφαπτομένη (ε) στο σημείο $A(-3,9)$ και τον άξονα $x'x$.

γ2. Να βρείτε την ευθεία x=λ, λ<0 , η οποία χωρίζει το χωρίο Ω σε δυο ισεμβαδικά χωρία.

86. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
$f^{3}(x)+f(x)+1=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to -1}f(x)=\ell$, όπου $\ell\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι: $\ell=-1$.

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η f^{-1}.

γ. Αν $f^{-1}(x)=x^{3}+x+1, x\in\mathbb{R}$, να βρείτε τα όρια:

γ1. $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-x}{x+1}$

γ2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)f^{-1}(x)-\eta\mu(x+1)}{(x-f(x))^2\cdot(x+1)}$

γ3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{-f(x)}-2\sqrt{-f(x)}+1}{(\sqrt[6]{-f(x)}-1)^3}$

γ4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(e^{x-1}-2)-e^{x-1}+2}{e^{x-1}-1}$

87. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $f(\ln x-1)=x+1$ για κάθε $x>0$.

α. Να δείξετε ότι $f(x)=e^{x+1}+1,\ x\in R$.

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η f^{-1}.

γ. Αν $f^{-1}(x)=\ln(x-1)-1,\ x>1$, να βρείτε τα όρια:

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1}f^{-1}(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{-1}(x)$

δ. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}.

88. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ $x\in A$ και $g(x)=e^x+1,\ x\in R$.

α. Να δείξετε ότι $A=R,\ x\in R$.

β. Να ορίσετε την συνάρτηση $h=g\circ f$.

γ. $h(x)=\sqrt{x^2+1}+x+1,\ x\in R$.

γ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $h(x)=\sigma\upsilon\nu x,\ x\in R$, είναι αδύνατη .

γ2. Αν επιπλέον είναι $x>0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα και στη συνέχεια, να λυθεί η ανίσωση $h(x^3+x^2)<h(2)$.

89. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha x^2+4x+\alpha^2-6}{x-1} & ,x<1\\ \dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}+\beta & ,x>1\end{cases}$ $\alpha,\beta\in R$ για την οποία ισχύουν: $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\ell$, $\ell\in R$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

α. Να βρεθούν τα α, β.

β. Αν α=-2 και β=-1, να βρείτε:

β1. Το ℓ .

β2. Το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

β3. Να εξετάσετε ,αν υπάρχει, το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{f(x)}$.

90. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ με

$\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\sqrt{e^{2t+\ln x}-2e^t-x}-f(e^x-1)e^t\right)=\ell,\ \ell\in R$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{\ln(x+1)}$, $x>0$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η αντίστροφή της.

γ) Αν $f^{-1}(x) = e^{x^2} - 1,\ x > 0$.

γ1) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = ημx - x$ είναι αδύνατη.

γ2) Να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x) > f(x)$ για κάθε $x > 1$.

γ3) Να δείξετε ότι $\int_1^{e-1} \left(f^{-1}(x)\right)^2 dx > 2 - 2\ln 2$.

91. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$ με

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{αx^2 + 2βx + γ}{x - 2} & , x < 2 \\ α - β - γ + 1 & , x = 2 \\ β\ln(x-1) + α + γ & , x > 2 \end{cases} \quad α, β, γ \in R .$$

α) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ .

β) Αν α=6, β= -7, γ=4 , να γίνει η γραφική παράσταση της f .

γ) Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι αντιστρέψιμη.

δ) Να λυθούν οι εξισώσεις: 1. $f(x) = x^2 + 11$ 2. $f(x^2 + 2x - 1) = 10$

92. Έστω $f: R \to R$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $f^3(x) + 3f(x) - 4 = x,\ x \in R$ και η συνάρτηση $g: R \to R$ με $g(x) = x^3 + 3x - 4,\ x \in R$.

Α. Να δείξετε ότι: i) f(0)=1 και ii) Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Β. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα με σύνολο τιμών f (R)=R.

Γ. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη με $f^{-1}(x) = g(x)$.

93. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$ με $f(x) = \begin{cases} e^{x+α} & , x \le 0 \\ \ln(x+1) + β & , x > 0 \end{cases}$

$, α, β \in R$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(e^x - 1) \cdot ημ\frac{β}{x}) = e$.

Α. Να δείξετε ότι α=1 και β=e .

Β. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη με $f^{-1}(x) = \begin{cases} \ln x - 1 & , x \in (0, e] \\ e^{x-e} - 1 & , x > e \end{cases}$.

Γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{x-e} - 1 = x$ έχει μια ακριβώς λύση, έστω ρ, στο $(e, +\infty)$.

Δ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - f^{-1}(x) = x - e$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(e, ρ)$.

94. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)=\begin{cases} e^{x+\alpha} & ,x\le 0 \\ \ln(x+1)+\beta & ,x>0 \end{cases}$

$,\alpha,\beta\in R$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(e^x-1)\cdot ημ\frac{\beta}{x})=e$.

Α. Να δείξετε ότι α=1 και β=e .

Β. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη με $f^{-1}(x)=\begin{cases} \ln x-1 & ,x\in(0,e] \\ e^{x-e}-1 & ,x>e \end{cases}$.

Γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{x-e}-1=x$ έχει μια ακριβώς λύση, έστω ρ, στο $(e+1,e+2)$.

Δ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)-f^{-1}(x)=x-e-1$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(e+1,\rho)$.

95. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:(-2,+\infty)\to R$ με

$f(x)=\begin{cases} \ln(x+2)+\alpha & ,x\in(-2,-1) \\ e^{-x-1}+\beta & ,x\in[-1,+\infty) \end{cases}$ $,\alpha,\beta\in R$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

Α. Να δείξετε ότι α=2 και β=1 .

Β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Γ. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=f(\ln\frac{2}{e})$.

Δ. Επιπλέον δίνονται οι συναρτήσεις $g,h:R\to R$ με σύνολο τιμών $[-1,1]$.

Αν $f(g(x_0)-1)+f(h(x_0)-2)\ge 4$, να δείξετε ότι:

Δ1. $g(x_0)=h(x_0)-1=0$

Δ2. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x_0,x_0+1)$, ώστε να ισχύει:

$$g(\xi)\cdot(\xi-x_0)+2h(\xi)\cdot(\xi-x_0-1)=\frac{-3}{2}$$

96. Δίνεται η συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:[2,10]\to R$ με $f(2)=10$, για την οποία ισχύει $f(x)\cdot f(f(x))=5$ για κάθε $x\in[2,10]$.

Β1. Να προσδιοριστεί το $f(10)$ και το $f(5)$.

Β2. Αν $f(10)=\frac{1}{2}$ και $f(5)=1$, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Β3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(2,5)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0)=\frac{10\kappa+\lambda+\frac{1}{2}}{\kappa+\lambda+1}.$$

B4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{1-2f(\alpha)}{x+1}+\frac{f(\beta)-10}{x-3}=1$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(-1,3)$.

97. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ με τύπο $f(\lambda)=\begin{cases} L_1 & ,\lambda<2 \\ \beta & ,\lambda=2 \\ L_2 & ,\lambda>2 \end{cases}$, όπου

$L_1=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\alpha\cdot 2^x+\lambda^{2+x}-\lambda^x}{\beta\cdot 2^x+\lambda^x}$, $L_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\alpha\cdot 2^x+\lambda^{2+x}-\lambda^x}{\beta\cdot 2^x+\lambda^x}$ και $\alpha,\beta\in R$, $\beta\neq 0$.

α) Να βρεθούν τα όρια L_1 και L_2.

β) Να αποδείξετε ότι $f(\lambda)=\begin{cases} \lambda^2-1 & ,\lambda\in(-\infty,2) \\ 3 & ,\lambda\in[2,+\infty) \end{cases}$ και στη συνέχεια ,

να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} f(\ln x) & ,x\in(0,e^2) \\ \frac{3}{e}\sqrt{x} & ,x\in[e^2,+\infty) \end{cases}$.

γ₁) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής .

γ₂) Να λυθεί η εξίσωση g(x)=0.

γ₃) Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς την μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

γ₄) Να λυθεί η εξίσωση $g(x)=g(e^4)$.

γ₅) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, την γραφική παράσταση της συνάρτησης g και τις ευθείες με εξισώσεις: $x=e$ και $x=e^2$.

98. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$
- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-f(0)x^2+(f(2)+1)x-2}{x-1}=2$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(f(1)-1)\cdot x^3-2x^2+1}{x^2+x+1}=-f(0)$.

A. Να δείξετε ότι f(0)=f(2)=2 και f(1)=1.

B. Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(f(\alpha)\cdot \eta\mu(x-1)}{x^3-3x^2+3x-1}$.

Γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν σημεία με τετμημένες x_1, x_2 στα οποία οι εφαπτόμενες είναι κάθετες .

Δ. Να αποδείξετε ότι:

Δ1. Υπάρχει $\rho \in (1,2)$ με $f(\rho) = \dfrac{f(0)+1}{2f(1)}$.

Δ2. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,2)$, ώστε να ισχύει: $\dfrac{1}{f'(\xi_1)} + \dfrac{1}{f'(\xi_2)} = 2$.

E. Αν επιπλέον $\int_0^2 xf'(x)\,dx = \lim\limits_{x\to+\infty}(x\eta\mu\dfrac{4}{3x})$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω , που περικλείεται από την γραφική παράσταση C της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες x=0, x=2.

Ή παραλλαγή

Αν F μία αρχική της f για την οποία ισχύει $F(2) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x\eta\mu\dfrac{8}{3x} + F(0))$,
να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω , που περικλείεται από την γραφική παράσταση C της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες x=0, x=2.

99. Δύο σημεία Α , Β αρχίζουν συγχρόνως να κινούνται από την αρχή των αξόνων ενός ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων. Το σημείο Α κινείται στον ημιάξονα Οx με ταχύτητα $x_A'(t) = 1\,cm/sec$ και το σημείο Β σε ευθεία, που σχηματίζει με τον άξονα Οx γωνία 120^0, με ταχύτητα $x_B'(t) = -2\,cm/sec$, όπου x_B η τετμημένη του Β.

1. Να βρείτε τις συναρτήσεις θέσεως των σημείων Α και Β.

2. Να αποδείξετε ότι η απόσταση d=(AB) των δυο σημείων αυξάνεται με σταθερό ρυθμό τον οποίο και να προσδιορίσετε.

100. Δύο σημεία Α , Β αρχίζουν συγχρόνως να κινούνται από την αρχή των αξόνων ενός ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων. Το σημείο Α κινείται στον ημιάξονα Οx με ταχύτητα $x_A'(t) = 1\,cm/sec$, ενώ το σημείο Β στην $\psi = \sqrt{3}x^2$ με $x \le 0$ και η τετμημένη του x_B απομακρύνεται από τον ημιάξονα Οψ με ταχύτητα $x_B'(t) = -2\,cm/sec$.

1. Να βρείτε τις συναρτήσεις θέσεως των σημείων Α και Β συναρτήσει του χρόνου.
2. Να προσδιορίσετε τον ρυθμό μεταβολής της απόσταση d=(AB) των δυο σημείων την χρονική στιγμή t_0 , που η εφαπτομένη της C_f στο Β σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 120^o .

101. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x + \alpha}{e^x}$, $\alpha \in R$.

1. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M\big(x_0, f(x_0)\big)$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι το σημείο M διαγράφει την καμπύλη $y = e^{-x}$, $x \in R$.

2. Να βρείτε την μέγιστη τιμή της f.

3. Να βρείτε την μεγαλύτερη τιμή του $\alpha \in R$ για την οποία ισχύει $x + \alpha \le e^x$ για κάθε $x \in R$.

4. Για α=1,
να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και να βρεθούν τα σημεία καμπής.
Στη συνέχεια, να γίνει η γραφική παράσταση της f .

102. Δίνεται συνάρτηση $f : R \to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη με f'' γνησίως αύξουσα και έστω $\alpha \in R$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f'(x) \ge f'(\alpha) > 0$ για κάθε $x \in R$.
α. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει μοναδικό σημείο καμπής.
β. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

103. Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : [\alpha, \beta] \to R$ για τις οποίες ισχύει: $f(\alpha) = g(\alpha)$ και $f(\beta) = g(\beta)$.
Α. Αν η f είναι κοίλη και η g κυρτή στο $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x) \ge g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x e^{1-x}$, $x \in [0, 1]$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

Β2. Αν η f^{-1} είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$,
να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι κυρτή.

Β3. Να δείξετε ότι ισχύει $f(x) \ge f^{-1}(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Β4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $\left(f^{-1}\right)'(\xi) = (1-\xi)\, e^{1-\xi}$.

104. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \alpha^2 & , x < 0 \\ x^3 + \beta x + \beta & , x \ge 0 \end{cases}$ $\alpha, \beta \in R$.

Α. Να βρείτε τα α, β , ώστε να ισχύει το Θ.Rolle για την f στο διάστημα $[-2, 1]$.

Β. Αν α=β=1,

1. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης

2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και τα κοίλα. Στη συνέχεια, να γίνει η γραφική παράσταση της f .

3. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(-2,-1)$, ώστε να ισχύει

$$4f(e^{\xi}+\xi+\frac{1}{2})+8f(\ln(-\xi-1)-\xi-\frac{1}{2})=9\,.$$

105. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,2]\to R$ για την οποία ισχύει:

$$\int_2^0\left(\int_2^0 f(x)f(t)\,dt\right)dx+\int_0^2 2x\,dx\le\int_0^2 4f(x)\,dx \quad \text{και } f(x)>0 \text{ για κάθε } x\in[0,2].$$

α. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση C της f τον άξονα x′x και τις ευθείες x=0 και x=2.

Αν $\int_0^2 f(x)dx=2$ και g μια αρχική της f στο $[0,2]$,

β. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει f(ξ)-1=0.

γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+2x=3$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0,2)$.

δ. Να αποδείξετε ότι:

i) $2g(0)<\int_0^2 f(x)g(x)\,dx<2g(2)$

ii) Η εξίσωση $\dfrac{(x-1)^2}{2}\int_0^2 f(x)g(x)\,dx=g(2\eta\mu\dfrac{\pi x}{4})$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,2).

iii) $\int_0^2 xf(x)\,dx+\int_0^2 g(x)\,dx=4+2g(0)$.

106. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x\ln x\,,\ x>0$ και $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2},x\in R$.

α. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη, η οποία και να βρεθεί.

β. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και τις ευθείες x=1 και x=e.

γ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και τις ευθείες x=1 και x=4 ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την από την γραφική παράσταση της f τον άξονα x′x και τις ευθείες x=1 και x=4.

Ή $\int_1^4 (f(x)-g(x))\,dx=\int_1^4 f(x)\,dx$

δ. Να αποδείξετε ότι: $\int_1^2 e^{x^2-2x}f(x)\,dx>\dfrac{e-1}{2e}$

107. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=xe^{\alpha x}+\beta$, $\alpha, \beta \in R$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x) \geq (\alpha+1)e^{\alpha}$ για κάθε $x \in R$
- Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ψ=1 στο $+\infty$

α. Να δείξετε ότι α=-2 και β=1 .
β. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

γ. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(0, f(0)) και στη συνέχεια να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις της f ,της εφαπτομένης (ε) και τις ευθείες x=0 και x=2.

δ. Να αποδείξετε ότι: $\int_{e}^{e^2} \ln x f(x)\,dx > e^2$

108. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^{x-\alpha}-x^2$, $\alpha \in R$

α. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει για κάθε τιμή του α, ακριβώς ένα σημείο καμπής που βρίσκεται σε παραβολή της οποίας και να βρείτε την εξίσωση.

β. Να μελετήσετε την f' ως προς την μονοτονία και να βρείτε την ελάχιστη τιμή της.

γ. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α για την οποία ισχύει

$2e^{x-\alpha}-3 \geq e^{\alpha^2-1}-4\alpha+2x$ για κάθε $x \in R$.

δ. Αν α=1

δ1. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε: ψ=1 εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .
δ2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις της f , της εφαπτομένης (ε) και τις ευθείες x=0 και x=2.

δ3. Να αποδείξετε ότι: $\int_{1}^{e} \ln x\left(f(x)+x^2\right)dx > \frac{e^2+1}{2}$

109. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ με τύπο $f(x)=\frac{e^x}{e^x+\sqrt{e}}$.

α. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

β. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που να είναι παράλληλη στην ευθεία ψ=x+2020.

γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)+f(1-x)=1$ για κάθε $x \in R$.

γ2. Να λύσετε την εξίσωση $\left(1+\sqrt{e}\right)f(x-f(x))=f(\eta\mu^2 x)+f(\sigma\upsilon\nu^2 x)$, $x \in R$ (1)

γ3. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x_0=\rho$, όπου ρ η ρίζα της εξίσωσης (1).

δ. Για $\alpha \in R$, να αποδείξετε ότι $x^{f(\alpha)}-1 \le (x-1)f(\alpha)$ για κάθε $x>0$.

ε. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες x=0 και x=1

δ3. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(f(x))dx = \frac{1}{2}$

110. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν:

· $xf'(x) = 2\left(f(x) + x^2 + \kappa\right)$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$, όπου $\kappa \le -3$

· $f(1) = 0$ και

· $f(x) \le -4x+4$ για κάθε $x \in (0,1]$

α. Να αποδείξετε ότι: $f'(1) = -4$ και $\kappa = -3$

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2x^2\ln x - 3x^2 + 3$ για κάθε $x > 0$

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f και να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x-1) = (x-e)\cdot\int_1^\rho f(x)dx$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(2,\rho+1)$, όπου ρ>1 ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$

δ. Να δείξετε ότι η ευθεία $\psi = -4x+4$ εφάπτεται της C_f στο σημείο καμπής της και να αποδείξετε ότι ισχύει : $2\int_2^3 \frac{2x^2\ln x}{x-1}dx > 13$

ε. Να υπολογιστεί το $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{-1}{(f(x)-3)^2}}}{(f(x)-3)^2}$.

111. Έστω η παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f και οι πραγματικοί αριθμοί α και β με $\alpha \neq \beta$ τέτοιοι ώστε να είναι $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in R$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f(x_0) \le f'(x_0)$.

112. α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

$h(x) = (x-1)e^x + x^2 + 1$.

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις

των συναρτήσεων $f(x) = x e^x + x^2$ και $g(x) = e^x - 1$

έχουν μοναδικό κοινό σημείο την αρχή των αξόνων.

γ) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g και τις ευθείες $x = -1$, $x = 1$.

113. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + αx + β$.

i) Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β,
ώστε η ευθεία με εξίσωση $y = x - 1$ να εφάπτεται της γραφικής παράστασης C της f στο σημείο της $M(3, 2)$.

ii) Για τα α, β που βρήκατε, να μελετήσετε τη συνάρτηση

$g(x) = \frac{f(x)}{x+1}$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

114. i) Αν για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύουν $f'(x) = \frac{1}{x} g(x)$ και $g'(x) = -\frac{1}{x} f(x)$,

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \left(f(e^x) - ημx\right)^2 + \left(g(e^x) - συνx\right)^2$

είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.

ii) Αν επιπλέον ισχύουν : $f(e^{\pi}) = 0$ και $g(e^{\pi}) = -1$,

να αποδείξετε ότι είναι $f(x) = ημ(\ln x)$ και $g(x) = συν(\ln x), x \in (1, +\infty)$.

115. Δίνεται ο θετικός πραγματικός αριθμός α και η συνάρτηση
$f(x) = αx^2 - 2x\ln x$, $x>0$.

i) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.
ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$ και να προσδιορίσετε το α, ώστε η εφαπτομένη αυτή να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iii) Για την τιμή αυτή του α, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C , την εφαπτομένη και τις ευθείες με εξισώσεις x=1 και x=2.

116. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x}{x+1}$ και $g(x) = αx^2 + (α + \frac{1}{2})x$, $α \in R^*$.

i) Να βρείτε την τιμή του α, ώστε το ακρότατο της g να βρίσκεται στην κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

ii) Αν $α = \frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των f, g στο οποίο αυτές έχουν την ίδια εφαπτομένη.

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g και τις ευθείες με εξισώσεις x=0 και x=1.

117. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x-3}{\ln x-1}, x\in(0,e)\cup(e,+\infty)$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία , τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f και να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=α ,$\alpha\in R$ με $\alpha\neq 1$ έχει ακριβώς μία λύση.

iii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{e^2}^{e^3}\frac{f(x)}{x}dx$.

118. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ και αριθμό $\lambda \in R$, αν για τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 + \lambda x - 6}{P(x)}$ ισχύουν :

i) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$,

ii) οι ευθείες $x = 1$ και $x = -2$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και

iii) το σημείο $x_0 = -1$ είναι θέση τοπικού ακρότατου της f.

119. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{x^2 + \alpha x - 1}{x^2 + 2x - 3}$, $\alpha \in R$.

i) Για ποιές τιμές του α η f παρουσιάζει δύο ή ένα ή κανένα ακρότατο;

ii) Για α=2, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x = x_0$, όπου x_0 σημείο στο οποίο η f έχει ακρότατο.

120. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} - \lambda x + 3$ για την οποία ισχύει $f(x) \geq 4$ για κάθε $x \in R$.

i) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ.

ii) Αν λ=2

1. Να δείξετε ότι η ευθεία $y = -2x + 3$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, καθώς το $x \to -\infty$.

2. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις x=0 και x=1.

3. Να δείξετε ότι $\displaystyle\int_{-1}^{1} \ln(-2x + 3)f(x)dx > 10\ln 5 - 8$.

121. Δίνεται η συνάρτηση $g: R \to R$ για την οποία ισχύει $g(\ln x) = 2x - \ln^2 x - 2$, $x>0$.

i) Να δείξετε ότι $g(x) = 2e^x - x^2 - 2, x \in R$.

ii) Να βρείτε την μονοτονία και το πρόσημο της g.

iii) Επιπλέον δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει $g(f(x)) = x$ για κάθε $x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα με f(R)=R.

β) Να δείξετε ότι ισχύει $f^{-1} = g$.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x) + x^2 ημ\frac{1}{x}}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{e^x}$

122. Δίνεται η συνάρτηση $g: R \to R$ για την οποία ισχύει
$g(x-1) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$, $x \in R$.

Επίσης, έστω συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) + 1 = x$ για κάθε $x \in R$.

i) Να δείξετε ότι $g(x) = x^3 + x + 1, x \in R$ με g(R)=R.

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα με f(R)=R.

iii) Να δείξετε ότι ισχύει $f^{-1} = g$.

iv) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο 1.

v) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη .

vi) Να αποδείξετε ότι η f' είναι παραγωγίσιμη με $f''(x) = \dfrac{-6f(x)f'(x)}{\left(3f^2(x)+1\right)^2}, x \in R$.

ii) Να αποδείξετε ότι $f'(x) \le 1$ για κάθε $x \in R$.

123. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$ β. $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^{\sqrt{x^2+1}} - e^x)$

124. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -\ln(1-x) + x^2 + 3 & ,x \in (-\infty, 0) \\ \beta & ,\ x = 0 \\ e^x + \alpha & ,x \in (0, +\infty) \end{cases} ,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ όπου } \beta = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2020}{e^x(\sqrt{x^2+1} - x)} + e^{-x} + 3\right).$$

α) Να δείξετε ότι $\lim_{x\to+\infty} e^x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = +\infty$.

β) Να βρείτε τα α, β ώστε η f να είναι συνεχής.

γ) Αν α=2 και β=3

γ_1) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0) = 1$.

γ_2) Να αποδείξετε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα με $f'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

γ_3) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 4$ έχει ακριβώς δυο λύσεις.

γ_4) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1, 0)$, ώστε $2f''(\xi) - 5 = 0$.

γ_5) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε $f'(\kappa) = e$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $\kappa \in (0, 2)$.

γ_6) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\eta_1, \eta_2 \in (0, 2)$ τέτοια , ώστε να ισχύει

$$\frac{1}{f''(\eta_1)} + \frac{e}{f''(\eta_2)} = \frac{2}{e-1}.$$

125. Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} (x+1)^2\ln(x+1) & ,x \in (0, +\infty) \\ \alpha & ,\ x = 0 \\ e^x - x^2 - 1 & ,x \in (-\infty, 0) \end{cases} ,\ \alpha \in \mathbb{R} \text{ όπου } \alpha = \lim_{t\to+\infty}\left[\eta\mu(\ln(t^2+2)) - \eta\mu(\ln(t^2+1))\right].$$

α) Να δείξετε ότι α=0.

β) Να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη.

γ) Να μελετήσετε τη g' ως προς την μονοτονία.

δ) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο με τετμημένη $x_0 \neq 0$ της γραφικής παράστασης της g' στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στην ψ=x+2020

ε) Να λύσετε την ανίσωση $g'\left(e^x - x^2 - 1\right) + g'\left(\ln(2x+1) + x^2\right) \leq 2$.

στ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, e-1)$, ώστε $2g''(\xi) - 9 = 0$.

η) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\eta_1, \eta_2 \in (0, e-1)$ τέτοια , ώστε να ισχύει

$$g''(\eta_1) + (e-2)g''(\eta_2) = 3e - 1.$$

126. Να λύσετε τις εξισώσεις: α. $2^{e^x-x}+6^{e^x-x}=3^{e^x-x}+5^{e^x-x}, x\in R$.

β. $2^{x^2}+6^{x^2}=3^{x^2}+5^{x^2}$, $x\in R$.

127. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: R \to R$ για τις οποίες ισχύουν:

- g γνησίως αύξουσα
- $\lim_{x\to+\infty} g(x) = m$, $m \in R$
- f παραγωγίσιμη με $|f'(x)| \le \kappa$ για κάθε $x \in R$, όπου $\kappa \in R$

i) Να αποδείξετε ότι $|f(g(x+1)) - f(g(x))| \le \kappa\left(g(x+1) - g(x)\right)$.

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2020}{|f(g(x+1)) - f(g(x))|} + \dfrac{2019}{g(\sqrt{x+1}) - g(\sqrt{x})}\right)$.

παραλλαγή

Αν f γνήσια μονότονη, να βρείτε το όριο $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2020}{f(g(x+1)) - f(g(x))}$.

128. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: R \to R$ για τις οποίες ισχύουν:

- f παραγωγίσιμη και f(0)=2
- $g(x) = e^x f(x)$, $x \in R$
- $f'(x) + f(x) = 2e^x - x^2 - 2x$ για κάθε $x \in R$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = e^x + e^{-x} - x^2$, $x \in R$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-1,1)$ τέτοια , ώστε να ισχύει $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = f'(0)$.

δ) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\eta_1, \eta_2 \in (-1,1)$ τέτοια , ώστε να ισχύει $\xi_1 f''(\eta_1) + \xi_2 f''(\eta_2) = f'(\xi_1) + f'(\xi_2)$.

στ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα σημείο με τετμημένη x_0, ώστε η εφαπτομένη στο $(x_0, f(x_0))$, να είναι κάθετη στην ψ=-x+2020.

129. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,+\infty)$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν: $f(1)=e$, $f'(1)=\frac{3e}{2}$ και $f''(x)-f'(x)=\frac{(2x-1)e^x}{4x\sqrt{x}}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ Να αποδείξετε ότι :

α. $f(x)=\sqrt{x}\,e^x$, $x\in[0,+\infty)$.

β. Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία.

δ. Να μελετήσετε την μονοτονία της f'.

ε. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=\kappa f(x), x\in(0,+\infty)$ με $\kappa\le 1$ είναι αδύνατη.

στ. Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$ τέτοιοι, ώστε να ισχύει

$f'(\xi_1)-e=0$ και $2f''(\xi_2)\cdot(1-\xi_1)=e$.

130. Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν: $f(1)=1$, $f'(1)=1$, $f(x)\neq 0$ και $x\left(f''(x)f(x)-(f'(x))^2\right)=(f(x))^2$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

α. Να δείξετε ότι $f(x)=x^x$, $x\in(0,+\infty)$.

β. Να βρείτε τα σημεία της C_f στα οποία η εφαπτομένη σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία.

γ. Να αποδείξετε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα με $f'(A)=R$, όπου $A=(0,+\infty)$

δ. Να βρείτε το σημείο Ν της C_f στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής είναι ίσος με 1.

ε. Σημείο Μ(x,f(x)) με x>0 κινείται στη γραφικής παράστασης C_f με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $x'(t) = 1cm / s$.Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο Μ με τον άξονα $x'x$,την χρονική στιγμή που το σημείο διέρχεται από το Ν.

131. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=xe^x-x^2$, $x\in R$.

α. Να δείξετε ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

β. Να βρείτε τα σημεία της $C_{f'}$ στα οποία η εφαπτομένη σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία.

γ. Σημείο Μ(x,f(x)) κινείται στη γραφικής παράστασης C_f με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $x'(t) > 0$. Να δείξετε ότι υπάρχουν δυο σημεία της C_f στα οποία ισχύει $\psi'(t) = 2x'(t)$

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\kappa \in (-1,0)$,ώστε $f'(\kappa) = \frac{3}{2}$.

ε) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\eta_1, \eta_2 \in (-1,0)$ τέτοια , ώστε να ισχύει

$\frac{1}{f''(\eta_1)} + \frac{1}{f''(\eta_2)} + 2 = 0$.

132. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^x & ,x>1 \\ \kappa & ,x=1 \\ e^{x-1} & ,x<1 \end{cases}$, όπου $\kappa = \lim\limits_{t\to -\infty} \dfrac{2^{t^2}+9^{\frac{t^2}{2}-1}}{4^{\frac{t^2}{2}}+3^{t^2-2}}$.

α. Να δείξετε ότι κ=1

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0=1 με $f'(1) = 1$.

γ. Να αποδείξετε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα με $f'(R)=(0,+\infty)$.

δ. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $e^{f(x)} = \kappa^2 - 1$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού κ.

ε. Επιπλέον δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=\ln x+1, x>0$ και $h(x)=e^{x-1}$, $x\in R$.

i) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις g, h είναι αντίστροφες.

ii) Να αποδείξετε ότι οι C_f , C_g , C_h έχουν κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο.

133. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^x$, $x> 0$ και το σημείο Α(2,0)

i) Να βρείτε το σημείο της C_f που απέχει από το σημείο Α τη μικρότερη απόσταση.

ii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι κάθετη στην ΑΜ.

iii) Σημείο M(x,f(x)) κινείται στη γραφικής παράστασης C_f με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $x'(t) > 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1,2)$ της C_f στο οποίο ισχύει $\psi'(t) = 2x'(t)$.

134. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\ln x - \lambda x,\ x > 0, \lambda \in R$.

i) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

ii) Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda \in R$ για την οποία ισχύει $\ln x \geq \lambda - \frac{1}{x}$, για κάθε x>0.

iii) Για λ=1

α. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\psi = 2e^{\lambda} x$ εφάπτεται της C_g , όπου $g(x)=e^x + ex,\ x\in R$.

β) Επιπλέον δίνεται η συνάρτηση $h(x)=\frac{1}{e-1}(x-e)$.
Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία τα A(1,-1), B(e,0).

γ) Να αποδείξετε ότι f(x)>g(x) για κάθε $x\in(0,1)\cup(e,+\infty)$ και
f(x)<g(x) για κάθε $x\in(1,e)$.

135. Δίνεται η συνάρτηση $f(e^x)=e^{2x}-2e^x+x+1,\ x\in R$.

i) Να δείξετε ότι $f(x)=(x-1)^2+\ln x$, x>0 .

ii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ψ=x-1 εφάπτεται της C_f και στη συνέχεια , να δείξετε ότι τέμνει αυτή και σε άλλο σημείο.

iii) Η εξίσωση $f'(x)=1$ έχει ακριβώς δυο λύσεις στο $(0,+\infty)$.

iv) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\lambda\in R$, ώστε $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x+1)-\ln(\eta\mu x+1)+e^{x^2}-\alpha}{x^2}=\lambda$.

v) Να υπολογιστούν, αν υπάρχουν, τα όρια: 1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$, 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(e^x)}{x^2}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(e^x)-x}{x^2}$

136. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$ με $\alpha\neq 0$ για το οποίο ισχύουν:

- Το πολυώνυμο έχει παράγοντα το x+1.
- $\lim\limits_{x\to -1}\frac{P(x)}{x+1}=10$
- Το πολυώνυμο $Q(x)=P'(x)-5x^2-1$ έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

Α) Να δείξετε ότι α=2, β=-1, γ=2, δ=5.

Β) $P(x)=2x^3-x^2+2x+5,\ x\in R$.

Β1. Να αποδείξετε ότι: $\frac{-2}{\sqrt{x}}<\ln x<0$ για κάθε $(0,1)$.

Β2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left[(P(\eta\mu x)-5)\cdot\ln x\right]$.

Γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} P(x) & ,x\in(-\infty,-1] \\ 10\ln(x+2) & ,x\in(-1,+\infty)\end{cases}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

Γ2. Να δείξετε ότι η ευθεία ψ=10(x+1) εφάπτεται της Cf στο σημείο με τετμημένη x_0=-1 και στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x)\leq 10(x+1)$ για κάθε $x\in R$.

137. Η ραδιενέργεια που εκλύεται από τη διάσπαση x mg ενός ραδιενεργού σώματος δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^{2\alpha}x^{\alpha}}{e^{x}}$, $x \in (0, +\infty)$, όπου α>0 σταθερά που εξαρτάται από το υλικό του σώματος. Να βρείτε :

i) Τη μέγιστη τιμή Μ(α) της f.

ii) Τον αριθμό $\alpha \in R$, ώστε η Μ(α) να παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

138. Ένας βιοτέχνης υπολογίζει ότι μπορεί να πουλήσει 2.000 παιχνίδια το μήνα, αν καθορίσει 3 ευρώ την τιμή κάθε παιχνιδιού. Επιπλέον υπολογίζει ότι για να αυξήσει τις πωλήσεις του μηνιαίως σε κάθε 200 παιχνίδια πρέπει να μειώνει την τιμή κάθε παιχνιδιού κατά 10 λεπτά. Να βρείτε τον αριθμό των παιχνιδιών τα οποία θα πρέπει να πουλάει κάθε μήνα για να έχει μέγιστη είσπραξη.

139. Δίνεται η συνάρτηση $f:[0, +\infty) \to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει: $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(x) < 0$ στο $(0, +\infty)$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ είναι :

α) συνεχής και β) γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

140. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2 + \alpha$, $\alpha \in R$.

i) Αν $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι τοπικά ακρότατα της γραφικής παράστασης της f και $x_1 < x_2 < x_3$, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ είναι κάθετη στην ευθεία ΒΓ.

ii) Αν 0<α<1, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $(-1, 0)$.

iii) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 0$ για τις διάφορες τιμές του α.

141. i) Αν για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύουν $f'(x) = \dfrac{1}{x} g(x)$ και, $g'(x) = -\dfrac{1}{x} f(x)$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \left(f(e^x) - ημx\right)^2 + \left(g(e^x) - συνx\right)^2$ είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.

ii) Αν επιπλέον ισχύουν : $f(e^{\pi}) = 0$ και $g(e^{\pi}) = -1$, να αποδείξετε ότι είναι $f(x) = ημ(\ln x)$ και $g(x) = συν(\ln x)$, $x \in (1, +\infty)$.

142. Έστω $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, $\alpha\neq 0$ και $x_1, x_2 \in R$,

ώστε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

Να αποδείξετε ότι : i) Ισχύει $f''(x_1) + f''(x_2) = 0$.

ii) Αν $x_1 < x_2$, υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$, ώστε $f''(x_0) = 0$.

143. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ και τον αριθμό $\lambda \in R$,

αν για τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 + \lambda x - 6}{P(x)}$ με $x \in A$, ώστε $P(x)\neq 0$, ισχύουν :

- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$,
- $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \pm\infty$ και $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \pm\infty$
- Το σημείο $x_0 = -1$ είναι θέση τοπικού ακρότατου της f.

Για $P(x)=x^2+x-2$ και $\lambda=\dfrac{-1}{3}$, να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

144. Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ παραγωγίσιμη με $f'(x) = \dfrac{2e^x + x^2}{e^x + x^2}$, $x \in R$.

i) Να μελετήσετε την f' ως προς την μονοτονία.

ii) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g(x)=f(x)-x είναι γνησίως αύξουσα στο R.

iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iv) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1) - f(x)\right)$.

145. Α. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f'(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$, $x\in R$

και f(0)=0. Επίσης, δίνεται η συνάρτηση g με τύπο

$g(x)=f(x)-x\cdot\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+\sqrt{x^2+1}-1$, $x\in R$.

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f .

ii) Να δείξετε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα.

iii) Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{\ln x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f'(x)}{x}$.

iv) Να δείξετε ότι $\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) > \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ για κάθε x>0.

B. Επιπλέον δίνεται η συνάρτηση h με $h(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι:

α) συνεχής

β) παραγωγίσιμη στο 0.

γ) γνησίως αύξουσα.

146. Α. Να αποδείξετε ότι :

Αν ένα πολυώνυμο P(x) με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του δυο έχει παράγοντα το $(x-\rho)^2$,τότε $P'(\rho)=0$.

Β. Για το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^4+\beta x^2+\gamma x+\delta$, $\alpha\neq 0$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$ ισχύουν:

- Το P(x) έχει παράγοντες, τους παράγοντες του πολυωνύμου $Q(x)=x(x+1)^2$.
- $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{P'(x)}{x+1}=6$

Β1. Να δείξετε ότι $P(x)=x^4-3x^2-2x$, $x\in R$.

Β2. Να αποδείξετε ότι $P'(\rho_1)+P'(\rho_2)+4=0$, όπου $\rho_1<\rho_2$ οι θέσεις τοπικών ακροτάτων της P' .

Β3. Να υπολογιστούν τα όρια: i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{P(x)}{Q(x)\eta\mu(x-2)}$ ii) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{Q(x)}{P(x)}\eta\mu x\right)$

iii) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{P(x)}-(x+1)^2\right)$

147. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής και γνησίως μονότονη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν:

$f(x_1)=1$, $f(x_2)=-3$, όπου $3<x_1<x_2<5$ και G συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν: G(3)=-3 , G(2)=1 και $G'(x) = f(x+x_2)-f(x+x_1)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

α) Να δείξετε ότι η G δεν έχει κρίσιμα σημεία.

β) Να δείξετε ότι η G(x)=0 έχει μοναδική λύση $x_0\in(2,3)$.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in (2,3)$ τέτοια, ώστε $\dfrac{1}{G'(\xi_1)}+\dfrac{3}{G'(\xi_2)}=-1$.

δ) Να δείξετε ότι η f(x)=-1 έχει ακριβώς μία λύση στο (3,5).

ε) Να βρείτε το πρόσημο της G στο $(0,+\infty)$.

148. Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R ,για την οποία ισχύει: $f'(x)+f''(x)=2e^{-x}$ για κάθε $x\in R$ και $f'(0)=f(0)=0$.

i) Να δείξετε ότι $f(x)=-2xe^{-x}-2e^{-x}+2$, $x\in R$.

ii) Να βρείτε:

α) Το σύνολο τιμών της f

β) το πλήθος λύσεων της εξίσωσης f(x)=α, $\alpha\in R$,για τις διάφορες τιμές του α.

iii) Να δείξετε ότι ισχύει: $\dfrac{f(e^{\alpha})+f(e^{\beta})}{2}\le f\left(\dfrac{e^{\alpha}+e^{\beta}}{2}\right)$ για κάθε α, $\beta\in[0,+\infty)$.

149. Δίνεται η συνάρτηση f: $[0,\frac{\pi}{2}]\to R$,συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{2}]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\frac{\pi}{2})$, για την οποία ισχύει: $f'(x)+f(x)εφx=συνx$ για κάθε $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ και f(0)=0.

A) Να βρείτε τον τύπο της f.

B) Αν $f(x)=xσυνx$

i) Να δείξετε ότι εφαρμόζεται το θ. Rolle για την f στο $[0,\frac{\pi}{2}]$.

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $\xi\cdot εφ\xi=1$.

iii) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^{\nu}}$, όπου ν>3 περιττός αριθμός.

150. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύουν: $(1-x)f^2(x)=f(x)+f'(x)$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$, f(0)=1.

Επίσης, δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{x}{e^x}+\dfrac{1}{e^x\cdot f(x)}$, $x\in R$.

i) Να δείξετε ότι:

α) Η g είναι σταθερή .

β) Η f έχει τύπο $f(x)=\dfrac{1}{e^{x}-x}$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης f(x)=α, $\alpha\in R$.

iv) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(\ln(x+1)-x\right)+f\left((x-1)e^{\frac{x}{x-1}}-2x+1\right)\geq 2$.

151. Έστω συνάρτηση f: $\left(0\,,+\infty\right)\to R$ παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει:

$x^2f'\left(x\right)-f\left(x\right)=0$ για κάθε x>0 και f(1)= $\dfrac{2020}{e}$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g\left(x\right)=e^{\frac{1}{x}}\cdot f\left(x\right)$, $x>0$ είναι σταθερή.

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

γ) Αν $f\left(x\right)=2020e^{\frac{-1}{x}}, x\in\left(0\,,+\infty\right)$, να υπολογιστούν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(f(\frac{1}{x})-2020\right)\cdot\ln x\right]$ ii) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(f(\frac{1}{x})\eta\mu x\right)$ iii) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x-x}$

152. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0\,,+\infty)$ για την οποία ισχύουν:

- $f''(x)=e^{2f(x)}$ για κάθε $x\in(0\,,+\infty)$
- f(1)=0 και $f'(1)=-1$

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει f(x)= -lnx , x>0.

β) Αν $g(x)=-xf(x)$, x>0 και 0<α<β, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in\left(\alpha,\beta\right)$ τέτοια,

ώστε να ισχύει $\left(\ln(\xi_1\cdot\xi_2)+2\right)\dfrac{\beta-\alpha}{2}=\ln\dfrac{\beta^{\beta}}{\alpha^{\alpha}}$.

153. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\left[0\,,\,\pi\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(0\,,\,\pi\right]$ για την οποία ισχύει : $x\,f'\left(x\right) = συνx - \dfrac{ημx}{x}$ για κάθε $x \in \left(0\,,\,\pi\right]$ και f(π)=0.

i) Να δείξετε ότι $f\left(x\right) = \begin{cases} \dfrac{ημx}{x} & , x \in \left(0\,,\,\pi\right] \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$.

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iv) Να βρείτε τα όρια: α. $\lim\limits_{x\to 0}\left(ημ(e^x-1)\ln x\right)$ β. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x^2}$

154. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g : \left[0\,,\,\pi\right] \to R$ για την οποία ισχύει $g\left(x\right) + x\,g'\left(x\right) = συνx$ για κάθε $x \in \left[0\,,\,\pi\right]$ και η συνάρτηση f(x)=xg(x)- ημx , $x \in \left[0\,,\,\pi\right]$ με f(0)=0.

i) Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή και να βρεθεί ο τύπος της g.

ii) Να βρείτε την παράγωγο της g.

iii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iv) Να βρείτε τα όρια: α. $\lim\limits_{x\to 0}\left(ημ(e^x-1)\ln x\right)$ β. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-1}{x^2}$

155. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει $f'\left(x\right) \neq α$ για κάθε $x \in R$,όπου α≠0.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=αx έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

β) Αν επιπλέον Α(1, α) , Β(-1, 2012α) σημεία της γραφικής παράστασης της f ,να δείξετε ότι:

$β_1$) η γραφική παράσταση της f δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

$β_2$) υπάρχουν $ξ_1,ξ_2 \in R$ τέτοια, ώστε $f'\left(ξ_1\right) + f'\left(ξ_2\right) + 2011α = 0$.

γ) Αν $f'\left(x\right) > α^2$ για κάθε $x \in R$,να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

156. Δίνεται η συνάρτηση $f:\left(0,+\infty\right)\to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη

για την οποία ισχύουν: $\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot f'\left(x\right)+\left(x-\ln x\right)\cdot f''\left(x\right)=\frac{1}{x^2}$ για κάθε x>0

και $f'\left(1\right)=f\left(1\right)=0$.

i) Να βρείτε την συνάρτηση f.

ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

iii) Να δείξετε ότι η f' έχει ακριβώς ένα τοπικό ακρότατο με τετμημένη $\xi\in\left(1,+\infty\right)$.

iv) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{f\left(x\right)}+\ln x}{\eta\mu^2 x}$.

157. i) Να βρείτε α, β$\in R$ ώστε να ισχύει

$-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=\alpha\left(\sigma\upsilon\nu x+e^x\right)+\beta\left(\sigma\upsilon\nu x+e^x\right)'$ για κάθε $x\geq0$.

ii) Αν α= -1, β=1 και ισχύει: $f'\left(x\right)=\frac{-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x+e^x}$ για κάθε $x\geq0$ και $f(0)=\ln 2$,

να βρείτε τον τύπο της f.

iii) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

158. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\left[-\pi,\pi\right]\to R$, για την οποία ισχύει

$x^2 f'\left(x\right)=x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$ και f(0)= -1.

i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να βρείτε το τύπο της f και το σύνολο τιμών της.

iii) Να βρείτε τα $\alpha\in R$, ώστε $f(x)\geq\alpha^2-3\alpha$ για κάθε $x\in\left[-\pi,\pi\right]$.

159. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-2x-4}{\sqrt{x-1}-1} & ,x\in[1,2)\cup(2,+\infty)\\ \alpha & ,x=2\end{cases}$, $\alpha\in R$.

i) Να βρείτε το α ώστε η f να είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$

Αν α=20.

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2)$, ώστε f(ξ)=10.

iii) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in (1,5)$,ώστε $f'(\xi_1)+3f'(\xi_2)=\left(f(\xi)\right)^2+6$.

iv) Να βρείτε τα όρια: i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ και ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\sqrt{x^5}}$.

160.Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$, για την οποία ισχύουν:

$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)\cdot f(\beta)$ για κάθε α, $\beta\in\mathbb{R}$,$f(1)=e$,$f(1)\cdot f(-2)=\frac{1}{e}$ και $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=1$.

i) Να δείξετε ότι f(0)=1.

ii) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$ και $\lim\limits_{x\to1}f(x)=e$.

iii) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$ και να δείξετε ότι

$$\lim_{x\to-1}\frac{\left|ef^2(x)-1\right|+f(x)-1}{\sqrt{ef(x)}-1}=-2f(1)\cdot f(-2).$$

iv) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

v) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και να βρεθεί ο τύπο της.

161. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$\left(f'(x)-2x\ln x-x\right)\cdot\left(f(x)-x^2\ln x\right)=x-1$, x>0 και $f(e)=e^2+e-1$, $f(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e}-1$, f(1)=0.

i) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

ii) Αν $f(x)=x^2\ln x+x-1, x>0$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Ισχύει $\alpha^{\alpha^2}\cdot\beta^{\beta^2}>\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{\frac{(\alpha+\beta)^2}{2}}$ για κάθε $\alpha,\beta\in[e^{-\frac{3}{2}},+\infty)$ με $\alpha\neq\beta$.

162. Έστω f συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] με f'' γνησίως φθίνουσα για την οποία ισχύει: $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$ και $f'(\beta)<0<f(\beta)$.

Να αποδείξετε ότι:

i) Υπάρχει ακριβώς ένα σημείο, έστω ξ, στο οποίο η f' παρουσιάζει ολικό μέγιστο .

ii) Η f έχει ολικό μέγιστο σε σημείο με τετμημένη $x_0\in(\xi,\beta)$.

163. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύουν:

iii) $f(x-\psi)=f(x)-f(\psi)-1$ για κάθε $x,\psi \in R$.

iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+1}{x}=2$.

v) $\alpha(f(x)+1) \le e^{2x}-1$ για κάθε $x\in R$, όπου $\alpha \in R$.

α_1) Να δείξετε η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=2$.

α_2) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

α_3) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=2$ και στη συνέχεια, να βρείτε τον τύπο της f .

164. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0,+\infty) \to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη με $(f''(x)+2f'(x)+f(x))\cdot x^2+e^{-x}=0$ για κάθε x>0 και $f'(1)+f(1)=0$, $ef(1)=-1$.

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

β) Αν $f(x)=e^{-x}(\ln x-x)$, $x>0$

i) να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της .

ii) να λύσετε την εξίσωση $\ln(x-\ln x)=\ln\kappa+x$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του $\kappa\in(0,+\infty)$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f^2(x)\,\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}-f(x)\right)$.

δ) Αν $g'(x)=f(x)$, $x\in(0,+\infty)$

i) Να αποδείξετε ότι ισχύει $g(2021x)+g(2019x)>2g(2020x)$ για κάθε x>0.

ii) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x+1)-g(x)]$.

165. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{2x-1}+3$, $x\in R$.

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x)=x-\dfrac{7}{2}$ έχει δύο ακριβώς λύσεις.

γ. Να μελετήσετε την $(f^{-1})'$ ως προς την μονοτονία και να δείξετε ότι ισχύει $2f^{-1}(x)\le x-3$ για κάθε x>3.

166. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=2^x$ και $g(x)=-x^2+2x+1$.

α) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g που διέρχεται από το σημείο A(0,1).

β$_1$) Να δείξετε ότι η εξίσωση $2^x+x-1=0$, $x\in R$ έχει ακριβώς μία λύση, την x=0.

β$_2$) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2-3x+2)=g(x)+x-2$.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια: i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+2)-e^{x+2}}{f(x)+e^x}$ ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x+2)-e^{x+2}}{f(x)+e^x}$

δ) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς 2 κοινά σημεία, τα A(0,1) και B(1,2) .

167. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη με f'' συνεχή στο $(0,+\infty)$, για την οποία ισχύουν:

- $f'(1)-1=f(1)=0$
- $f''(x)-\dfrac{2f(x)}{x^2}-3=0$

α) Να δείξετε ότι:

α$_1$) η συνάρτηση $g(x)=x^2f'(x)-2xf(x)-x^3$, με x>0, είναι σταθερή και να βρεθεί ο τύπος της.

α$_2$) ισχύει $f(x)=x^2\ln x, x>0$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της .

γ) Να δείξετε ότι: $(\alpha+\beta)^2\ln\sqrt{\dfrac{\alpha+\beta}{2}}\le\alpha^2\ln\alpha+\beta^2\ln\beta$ για κάθε α, β με $\alpha,\beta\ge1$.

168. Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,+\infty)\to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$, με f(1)=0, για την οποία ισχύει $f'(e^x)=e^x(1+2x)$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

Επίσης, δίνεται η συνάρτηση $g(x)=f(e^x)-xe^{2x}$, $x\ge0$.

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή και να βρεθεί ο τύπος της.

ii) Να δείξετε ότι: $f(x)=x^2\ln x$, $x\ge1$

iii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να δείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} με πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της $M(e^2,f^{-1}(e^2))$.

γ) Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{e^x}$.

169. Α) Έστω συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη με f(0)=1 και $f'(0)=2$,για την οποία ισχύει $f''(x)-f'(x)=-1$ για κάθε $x\geq 0$.

Α$_1$) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=f'(x)-f(x)+x,\ x\geq 0$ είναι σταθερή.

Α$_2$) Να δείξετε ότι : $f(x)=e^x+x\ ,\ x\geq 0$.

Β) Δίνεται η συνάρτηση g(x) = $\begin{cases} f(x) & ,x\in[0,+\infty) \\ x+1 & ,x\in[-2,0) \end{cases}$.

Β$_1$) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής και όχι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Β$_2$) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα.

Β$_3$) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(-2,2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει : $(\xi-2)e^{-\xi}=-1$.

170. Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη με f(0)=1 και $f'(0)=0$, για την οποία ισχύει $f''(x)+2f(x)+2xf'(x)=0$ για κάθε $x\in R$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=e^{-x^2}$ για κάθε $x\in R$.

β)) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f' ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. .

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln(\eta\mu x)+x^2=0$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0,\frac{\pi}{2})$.

δ) Επιπλέον δίνονται τα σημεία Α(x,0), Β(x,f(x)), Γ(-x,f(x)) και Δ(-x,0), x>0.
Να δείξετε ότι:
δ$_1$) το εμβαδό Ε του ορθογωνίου ΑΒΓΔ γίνεται μέγιστο στη θέση τοπικού ακρότατου της f' με θετική τετμημένη, έστω x_1 και
δ$_2$) αν το σημείο Α απομακρύνεται από τον άξονα $\psi'\psi$ με ρυθμό 2 μ/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε του ορθογωνίου ΑΒΓΔ τη χρονική t_0 που το σημείο Α διέρχεται από το σημείο $M(x_1,f(x_1)$ της C_f .

171. Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη με f(6)=9 και f(1)=4, της οποίας η C_f τέμνει τον άξονα x′x μόνο στο σημείο $x_0=3$.

Αν ισχύει $9e^{f(x)}-x^2\geq f(x)-\alpha(x^2-9)$ για κάθε $x\in R$,όπου $\alpha\in R$ και $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=6$

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in R$.

β) α=-7
γ) Να δείξετε ότι:
γ$_1$) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,6)$ τέτοιοι, ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=1$.

γ$_2$) υπάρχουν $\rho_1,\rho_2\in(1,6)$ τέτοιοι, ώστε $\frac{2}{f''(\rho_1)}+\frac{3}{f''(\rho_2)}=\xi_2-\xi_1$.

172. Δίνεται η συνάρτηση $f:R \to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη με f'' συνεχή στο R , για την οποία ισχύουν:

- $f'(0)-2=f(0)=0$
- $f''(x)-(x+2)e^{x}=0$ για κάθε $x\in R$.

α) Να δείξετε ότι:

α$_1$) η συνάρτηση $g(x)=xf'(x)-f(x)-x^{2}e^{x}$, $x\in R$ είναι σταθερή και να βρεθεί ο τύπος της .

α$_2$) ισχύει $f(x)=(e^{x}+1)\cdot x$, $x\in R$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της .

γ) Να δείξετε ότι: $(\alpha+\beta)\cdot(e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+1)\le \alpha\cdot(e^{\alpha}+1)+\beta\cdot(e^{\beta}+1)$ για κάθε $\alpha,\beta\ge -2$.

173. Α. Έστω οι αντίστροφες συναρτήσεις f και f^{-1} με $f:\Delta\to R$ και $f^{-1}: f(\Delta)\to R$.

Αν η συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο f(Δ), να δείξετε ότι:
Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο Δ με
$f'(x)=\dfrac{1}{(f^{-1})'(f(x))}$, $x\in\Delta$.

Β. Δίνονται οι αντίστροφες συναρτήσεις f και f^{-1} για τις οποίες ισχύουν:

○ η f^{-1} είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο R με $f^{-1}(x)>1$ για κάθε $x\in R$.

○ η f δεν έχει κρίσιμα σημεία

○ $f'(x)\cdot\left(e^{f(x)}-x\ln x\right)=0$, $x>1$

β$_1$) Να δείξετε ότι η f έχει τύπο $f(x)=\ln(x\ln x)$, $x>1$.

β$_2$) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της $M\left(1,f^{-1}(1)\right)$.

β$_3$) Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{x}$

β$_4$) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{\ln x+1}{x\ln x}=\dfrac{1+\ln 2}{e^{2}-e}$ έχει ακριβώς μία λύση στο (e,e^{2}).

174. Έστω συνάρτηση f : [0,1] → R δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν: $f''(x)>0$ για κάθε $x\in[0,1]$ και $f'(1)=f(0)+f(1)$.Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση f έχει μέγιστο και ελάχιστο εκ των οποίων το ένα τουλάχιστον παρουσιάζεται στο σημείο x=0 ή στο x=1.

β) Είναι f(0)>0.
γ) Υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
δ) Η εξίσωση $f'(x)=f(1)$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο (0,1).

175. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, για την οποία ισχύουν: $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, $f'(1)=f(1)=1$ και $xf''(x)-f(x)=f'(x)\cdot\left(x\ln x+x\right)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

α) Να δείξετε ότι:

α₁) Η συνάρτηση $g(x)=f'(x)-(\ln x+1)\cdot f(x)$, $x\in(0,+\infty)$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της.
α₂) Ισχύει $f(x)=x^x, x>0$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
γ) Να δείξετε ότι ισχύει $x=\alpha^{1/x} \Leftrightarrow f(x)=\alpha$, x>0, όπου α πραγματικός θετικός αριθμός και στη συνέχεια, να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x=\alpha^{1/x}$ για τις διάφορες τιμές του α.
δ) Να δείξετε ότι: $2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\leq f(\alpha)+f(\beta)$ για κάθε α,β με α,β>0.

176. Έστω οι συναρτήσεις g, h ορισμένες στο $[0,+\infty)$, g δύο φορές παραγωγίσιμη, για τις οποίες ισχύουν:
$g'(0)=0, g(0)=1, g(x)>0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$,
$g''(x)g(x)>\left(g'(x)\right)^2+g'(x)g(x)$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$ και $h(x)g(x)=g'(x), x\geq 0$.
Επίσης, δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=xh(x)-\ln g(x), x\geq 0$.
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα.
β) Να δείξετε ότι ισχύει:
β₁) $\varphi(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$ και
β₂) $\left(g(2019)\right)^{2020}<\left(g(2020)\right)^{2019}$.
γ) Να δείξετε ότι ισχύει: $2\ln g(\frac{\alpha+\beta}{2})\leq \ln g(\alpha)+\ln g(\beta)$ για κάθε α,β≥0.
δ) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot h(x)-2x^2+3x\right)=13$, να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(h(x)-2x)$.

177. Έστω συνάρτηση f : R→R δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

$f(0)=-\frac{1}{2}$, f(0)+f(1)=0 και $f(x)\neq e^x+x-1, f(x)\neq x-1$ για κάθε $x\in R$.

α) Να δείξετε ότι ισχύει $x-1<f(x)<e^x+x-1$ για κάθε $x\in R$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x+1)$.

δ) Αν $f'(x)\geq 1$ για κάθε $x\in R$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

178. Έστω συνάρτηση $f: R\to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

$f''(x)<f'(x)$ για κάθε $x\in R$, $f'(0)=f(0)=0$.

α) Να δείξετε ότι:

$α_1$) $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$.

$α_2$) $f(x)\leq 0$ για κάθε $x\in R$.

β) Αν $g(x)=\ln\frac{f'(x)}{e^x}$, $x<0$, να δείξετε ότι:

$β_1$) η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα .

$β_2$) υπάρχει $\xi\in(-2,-1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)-f''(\xi)=\left(\ln\frac{f'(-2)}{f'(-1)}+1\right)\cdot f'(\xi)$.

179. Δίνεται η συνάρτηση $f:[-2,2]\to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο [-2,2] για την οποία ισχύουν : $f(0)<f(2)<2<f(-2)$, f'' φθίνουσα στο[-2,2] και $f'(2)=0$.

Να δείξετε ότι:

i) Υπάρχει x_0 є(-2,2) τέτοιο, ώστε $f(x_0)=2$.

ii) Υπάρχουν ξ_1,ξ_2 є(-2,2) τέτοιοι, ώστε $\frac{f(2)-2}{f'(\xi_1)}+\frac{2-f(-2)}{f'(\xi_2)}=4$.

iii) Υπάρχει x_1 є(-2,2) τέτοιο, ώστε $f'(x_1)=0$.

iv) Η f' έχει ολικό μέγιστο.

v) Υπάρχουν ρ_1, ρ_2 є(-2,2) τέτοιοι, ώστε $3f'(\rho_1)+f'(\rho_2)<0$.

180. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με $f(1)=e$, για την οποία ισχύουν:

∘ $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

∘ $f(x)\geq ex$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

∘ $x^2f''(x)+f'(x)=2f(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

α) Να δείξετε ότι:

$α_1$) $f'(1)=e$

$α_2$) η συνάρτηση $g(x)=x^2f'(x)-(2x-1)f(x)$, $x\in(0,+\infty)$ είναι σταθερή και να βρείτε το τύπο της .

$α_3$) ισχύει $f(x)=x^2e^{1/x}$, $x>0$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της .

γ) Να δείξετε ότι:

$γ_1$) η εξίσωση $2x\ln x=4x-1$ είναι ισοδύναμη της εξίσωσης $f(x)=e^4$.

$γ_2$) η εξίσωση $2x\ln x=4x-1$ έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες .

181. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$

για την οποία ισχύει: $f'(x)>0$ για κάθε x>0 και f(1)=0.

Επίσης, έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση g με $g'(x)=f(x)\ln x$,x>0 και g(1)=0.

α) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το πρόσημο της g.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g' ως προς την μονοτονία και να δείξετε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

δ)Αν επιπλέον ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+\eta\mu x\right)=+\infty$,να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x+1)-g(x)\right)$.

182. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο (0,+∞) με f(1)=0 , $f'(1)=e$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $e^{-x}f''(x)=\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x)=e^x\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ)Να αποδείξετε ότι η f' έχει ολικό ελάχιστο σε σημείο με τετμημένη $x_0\in(\frac{1}{2},1)$.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x\ln x=(-x+e)^3$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(1,e)$.

183. Έστω f μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο R για την οποία

ισχύει: $f(0)=f'(1)=0$, $f(f'(x^2))\geq(x-1)^2$ για κάθε $x\in R$ και f''γνησίως αύξουσα.

Να αποδείξετε ότι:

i) $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in R$.

ii) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2020}{f(x)}$, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{f'(x)}$.

184. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

με $f'(x)=2\ln x+\frac{f(x)}{x}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, της οποίας η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(1,\ 2)$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f .

β) Αν $f(x)=x(\ln x)^2+2x$, $x\in(0,+\infty)$,

β_1) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β_2) Να μελετήσετε την συνάρτηση f' ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β_3) Να δείξετε ότι ισχύει: $ef(x)\le ex+2$ για κάθε $x\in(0,\frac{1}{e}]$ και $ef(x)\ge ex+2$ για κάθε $x\in(\frac{1}{e},+\infty]$.

β_4) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2020x}{f(x)}$, $\lim\limits_{x\to 1/e}\frac{f(x)}{f'(x)-1}$.

185. Έστω f μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,\frac{\pi}{2}]$,

για την οποία ισχύει: f' συνεχής στο $x_0=0$ και $3xf'(x)+x^2f''(x)+f(x)=συνx-x\cdot ημx$ για κάθε $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$.

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

β) Αν $f(x)=\begin{cases}\frac{ημx}{x} & ,x\in(0,\frac{\pi}{2}]\\ 1 & ,x=0\end{cases}$

β_1) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β_2) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f' είναι φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

β_3) Ισχύει $\pi^2ημx\le -4x^2+4\pi x$ για κάθε $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$.

186. Έστω f μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει: $f(0)=f'(0)=2$ και $f''(x)+6x=f'(x)+3x^2$ για κάθε $x\in R$.

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

β) Αν $f(x)=2e^x-x^3$, $x\in R$,να δείξετε ότι η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει δυο ρίζες με θετικές τετμημένες .

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{ημx}$, $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2020}{f(x)+συνx}$.

187. Έστω η συνεχής συνάρτηση f' για την οποία ισχύουν: $(f'(x))^2-2f'(x)+\frac{1}{x^2+1}=0$ για κάθε $x\in R$, $f'(1)>1, f'(-1)<1$ και $f(0)=1$.

α) Να δείξετε ότι:

α_1) $f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in R$

α_2) $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$, $x\in R$.

β) Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f και f' ως προς τη μονοτονία.

γ) Αν $g(x)=\ln f(x)$, $x\in R$,

γ1) Να δείξετε ότι $g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in R$.

γ2) Να δείξετε ότι ισχύει: $g(x)>\dfrac{f(x)-x-1}{x}$ για κάθε x>0.

δ) Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)\eta\mu x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}+\sigma\upsilon\nu x\right)$.

188. Δίνεται η συνάρτηση f : R→R με $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-x+4}+\alpha x+\beta & , x\geq 1\\ -x^2+\frac{5}{4}x+\gamma & , x<1\end{cases}$

συνεχής στο 1, για την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{1}{2}$.

i) Να δείξετε ότι α=−1, β=1, $\gamma=\frac{7}{4}$.

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θ.Rolle για την f στο $[\frac{1}{4}, 1]$ και στη συνέχεια, να βρείτε τα $\xi\in(\frac{1}{4},1)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi)=0$.

iii) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

iv) Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x) =1 έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

189. Έστω συνάρτηση f : R→R δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $f''(x)-f(x)=(4x+2)e^x$ για κάθε $x\in R$ και $f(0)=f'(0)=0$.

i) Να δείξετε ότι $f(x)=x^2e^x$, $x\in R$.

ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(-1,1)$ τέτοια, ώστε $f''(\xi_1)f''(\xi_2)=3$.

iv) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)$.

190. Δίνονται οι συναρτήσεις

$f(x)=xe^x+\alpha$, $g(x)=-\dfrac{1}{2}e^{2x}+2e^x+\beta$, $\alpha,\beta\in R$, $x\in R$

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g δέχονται σε κοινό τους σημείο κοινή εφαπτομένη (ε) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

i) Να βρείτε τις τιμές των α και β, καθώς και την εξίσωση της κοινής τους εφαπτομένης.

ii) Αν α=0, $\beta=\dfrac{-3}{2}$ και ε: ψ=x, να δείξετε ότι:

$f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in R$.

γ) Να δείξετε ότι $f(x)\geq x\geq g(x)$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$ και $f(x)\geq g(x)\geq x$ για κάθε $x\in(-\infty,0]$.

δ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{ημx}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2020}{g(x)-x}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2020}{(g(x)-x)^2}+συν\dfrac{1}{x}\right)$.

191. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο [1,2] με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύουν: f(1)=2019 , f(2)=2022 και $f'(x)\neq 1$ για κάθε $x\in[1,2]$.

Επίσης, έστω η συνάρτηση g(x)=f(x)-x , $x\in$ [1,2]. Να δείξετε ότι:

i) Υπάρχει $x_0\in$ (1,2) τέτοιο, ώστε $g(x_0)=2019$.

ii) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in$ (1,2) τέτοια, ώστε $\dfrac{1}{g'(\xi_1)}+\dfrac{1}{g'(\xi_2)}=1$.

iii) $f'(\xi_1)f'(\xi_2)+1=2\left(f'(\xi_1)+f'(\xi_2)-1\right)$.

iv) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

192. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:R\to R$ για τις οποίες ισχύει $xe^{-x}f'(x)=αx\left(g(x)+g'(x)\right)$ για κάθε $x\in R$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M(0,f(0)) έχει εξίσωση $ψ=\left(g'(0)-2\right)x+g(0)+3$. Επίσης, δίνεται το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)+2}{x}=3$.

Να δείξετε ότι:

i) g(0)= -2 και $g'(0)=3$.

ii) $f(x)=e^x g(x)+3, x\in R$.

iii) Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(f(x)-3\right)\left(συνx-1\right)}{x^2}$.

193. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει:

$xe^{-x}f'(x)=αx+αx^2$ για κάθε $x\in R$. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M(0,f(0)) έχει εξίσωση $ψ=2x+1$.

Να δείξετε ότι:

i) $f(x)=2xe^x+1,\ x\in R$.

ii) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης f(x)=κ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του κ.

194. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [0,13], παραγωγίσιμη στο (0,13) με f(x)≠0 για κάθε $x\in[0,13]$ και f(α)>0 για κάποιο $α\in$ [0,13].

Να αποδείξετε ότι:

i) f(x)>0 για κάθε $x\in$ [0,13] .

ii) Υπάρχει $\xi \in (0,13)$ τέτοιο, ώστε $13\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\ln\dfrac{f(13)}{f(0)}$.

iii) Υπάρχουν x_1, x_2, $x_3 \in (0,13)$ τέτοια, ώστε $4\dfrac{f'(x_1)}{f(x_1)}+9\dfrac{f'(x_2)}{f(x_2)}+13\dfrac{f'(x_3)}{f(x_3)}=26\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}$.

195. Έστω συνάρτηση $f:[0,2]\to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ με f'' συνεχή και $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x\in[0,2]$. Αν είναι $f(0)+4<f(2)<f(1)+2$, να αποδείξετε ότι:
α) Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη $x_0 \in (0,2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη σε αυτό να είναι κάθετη στην ευθεία
δ: $x+2\psi+2012=0$.
β) Η f' είναι γνησίως φθίσουσα.
γ) Να βρείτε τα όρια: i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(f'(0)-1)x^4-2x^3+x+1}{(f'(2)-3)x^3+x^2-2x+3}$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{|x^3-x+1|-x}{|2x^4-x^3+2|+x^3}\eta\mu x\right)$

196. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $xf'(x)=(x+1)f(x)$ για κάθε $x\in R$. Επίσης, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(0,f(0))$ έχει εξίσωση $\psi=2x$.
α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.
β) Αν $f(x)=2xe^x, x\in R$, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
γ) Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}f(x)-x+\sigma\upsilon\nu x\text{-}1}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2020}{f(x)\text{-}2x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(e^x)-f(x)\right)$.

197. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει:
$f(x+\psi)\le f(x)\cdot f(\psi)$ για κάθε $x,\psi\in R$, $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$, $f(0)\le 1$ και $f'(0)=2$.
i) Να δείξετε ότι $f'(x)=2f(x), x\in R$.
ii) Να βρείτε τον τύπο της f.
iii) Να λυθεί η εξίσωση $f(\ln x)\text{-}f(x^2\text{-}x)=0,\ x>0$.
iv) Αν $f(x)=e^{2x}$, $x\in R$ και $g(x)=\sqrt{f(x)}+x^2-2x$, να αποδείξετε ότι:
α) Η g έχει ελάχιστο σε σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.
β) Ισχύει $g(x)\ge(x_0-2)^2-2$.

198. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$,δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, για την οποία ισχύει $f''(x)=4e^x+2xe^x$ για κάθε $x \in R$.
Επίσης, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M(0,f(0)) έχει εξίσωση ψ=2x-1.
α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

β) $f(x) = 2xe^x - 1$ και $g(x) = \frac{f(x)+1}{2}$, $x \in R$.

β_1) Να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β_2) Να λύσετε την ανίσωση $g(-\ln x + x - 2) + g(f(x-1)) \le \frac{-2}{e}$.

γ_1) Να δείξετε ότι η ψ=x εφάπτεται της C_g .

γ_2) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2020}{g(x-1)-x+1}$.

199. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει $f(\alpha) < f'(x) < f(\beta)$ για κάθε $x \in R$,όπου α, β $\in R$ με β=α+1 και α>0.
Να δείξετε ότι:
1) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

2_α) Η συνάρτηση $g(x)=f(x)-xf(\alpha)$ είναι γνησίως αύξουσα.

2_β) Ισχύει $f(\alpha) < \frac{f(\beta)}{2}$.

3) Η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς 1 λύση στο (-β, α).

4) Υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in R$ τέτοια, ώστε να ισχύει $\frac{f(\beta)}{f'(x_3)} + \frac{f(\alpha)}{f'(x_2)} - 2\frac{f(-\beta)}{f'(x_1)} + 1 = 4\beta$.

200. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [0, +\infty) \to R$, για την οποία ισχύει:
$f(x\psi) = f(x)f(\psi)$ για κάθε x, ψ>0 , f(0)=0 ,f(x)≠0 για κάθε x>0 και f παραγωγίσιμη στο ξ με ξ>0.
α. Να δείξετε ότι:

α_1) f(1)=1 και $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$ για κάθε x>0 .

α_2) f(x)≥0 για κάθε x≥0 .

α_3) f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $\frac{xf'(x)}{f(x)} = \frac{\xi f'(\xi)}{f(\xi)}$ για κάθε x>0 .

β. Αν η ευθεία ε: $x - 2\sqrt{\xi}\psi + \xi = 0$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M(ξ,f(ξ)) , να βρείτε τον τύπο της f.

γ) Αν $f(x) = \sqrt{x}$, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x^2+1)-f(x^2)}{\eta\mu \frac{1}{x}}$.

201. Έστω μια συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύουν:

- $f'(0)=\alpha$ και η εφαπτομένη στο σημείο M(0,1) της γραφικής παράστασης της f σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία αμβλεία.
- $f(x+h)\leq f(x)\,f(h)$ για κάθε $x\in R$.
- $f''(x)+f'(x)=2f(x)$ για κάθε $x\in R$.

i) Να δείξετε ότι: $f'(x)=-2f(x)$, $x\in R$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{2x}f(x)$, $x\in R$ είναι σταθερή.

iii) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

iv) Αν $f(x)=e^{-2x}$, να βρείτε τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(\sqrt{x}-1)-1}{\eta\mu(\sqrt{x}-1)}$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+2x-1}{x^2}$

202. Έστω συνάρτηση $f_\alpha(x)=(\alpha-1)\ln x+\alpha x+(\alpha+1)$, $x>0$, $\alpha\in R$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f_α ,για τις διάφορες τιμές του α, διέρχονται από σταθερό σημείο Μ, με τετμημένη $\xi\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$.

β) Να βρείτε την τιμή του α, συναρτήσει του ξ, για την οποία η ευθεία ΟΜ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f_α στο Μ, όπου Ο η αρχή των αξόνων και να δείξετε ότι ισχύει $\alpha\in\left(\dfrac{3e}{e+1},\dfrac{3e+1}{e}\right)$.

203. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^\mu(x-2)^\nu$ και $g(x)=x^3+\dfrac{\mu}{2}x^2+\nu x+1$, $x\in R$, όπου $\mu,\nu\in N$ με $\mu,\nu\geq 2$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο M(1,g(1)) είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) με εξίσωση ψ=11x+2012.

α) Αν η f έχει μοναδικό ακρότατο σε σημείο x_0 ,να δείξετε ότι οι μ, ν είναι περιττοί ακέραιοι .

β) Αν επιπλέον η f έχει ακρότατο στο $x_0=\dfrac{3}{4}$,

β_1) Να βρείτε τους αριθμούς μ, ν και

β_2) Αν μ=3 και ν=5 ,να δείξετε ότι:

i) Η γραφική παράσταση της f' έχει τέσσερα τοπικά ακρότατα στα σημεία Α,Β,Γ,Δ με τετμημένες $x_1<x_2<x_3<x_4$ αντίστοιχα.

ii) Δύο από τα σημεία ανήκουν στον άξονα $x'x$.

iii) Ισχύει $x_2<x_0<x_3$.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(0,2)$, ώστε g(ξ)=13.

δ) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,2)$ τέτοια, ώστε $g'(\xi_1)g'(\xi_2)=6(g'(\xi_1)+g'(\xi_2))$.

204. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x)-\sqrt{2x+3}}{x-3} = \lambda$, όπου $\lambda \in R$.

i) Να βρείτε την τιμή f(3).

ii) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 3 και να βρείτε την $f'(3)$ συναρτήσει του λ.

iii) Αν $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(f(x))-\sqrt{2f(x)+3}}{x-3} = \dfrac{4}{3}$ και η εφαπτομένη στο σημείο M(3,f(3)) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ω>90° ,να δείξετε ότι λ= $\dfrac{-4}{3}$ και να βρείτε τη γωνία ω.

iv) Για λ= $\dfrac{-4}{3}$, να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{e^x f(x) - 3e^{2x-3}}{x^2-9}$.

205. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει:

$(f'(x)+1)e^{-x}+f'(x)=0$ για κάθε $x \in R$ και f(0)=ln2.

i) Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x)+1=\dfrac{e^x}{1+e^x}$, $x \in R$.

ii) Να δείξετε ότι $f(x)=\ln(1+e^x)-x$, $x \in R$.

iii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iv) Να μελετήσετε την συνάρτηση f' ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

v) Να δείξετε ότι ισχύει: $2f(x)+x \geq 2\ln 2$ για κάθε $x \in R$

vi) Να βρείτε τα όρια: α) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ β) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

206. Έστω συνάρτηση $f: (e,+\infty) \to R$, παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

$f(e^2)=3$ και $f'(e^x)(x-1)^2+2e^{-x}=0$ για κάθε x>1.

i) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

ii) Αν $f(x)=\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}$, x>e

α) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f' ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να δείξετε ότι ισχύει $e^2 f(x)+2x \geq 5e^2$ για κάθε $x \in (e,+\infty)$.

iii) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη , να υπολογίσετε την f^{-1}.

iv) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (e^2, e^3)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\dfrac{5}{2}$.

v) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in (e^2, e^3)$ τέτοια, ώστε

$\xi_1(\ln\xi_1-1)^2+\xi_2(\ln\xi_2-1)^2=4(e^3-e^2)$.

207. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει:

f(x)>1 για κάθε $x \in R$, f(-1)=2 και $f'(x)\left(f(x)+x\right)=1-f(x), x \in R$.

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

β) Αν $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}-x$,τότε:

$β_1$) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

$β_2$) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ, αν $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+\sqrt{κ}-1)=e^{\sqrt{κ}-1}$.

$β_3$) Να δείξετε ότι f(x) > -2x-1 για κάθε $x \in (-\infty,-1]$.

γ) Να δείξετε ότι:

$γ_1$) Η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την συνάρτηση f^{-1}.

$γ_2$) Να δείξετε ότι $\lim_{x\to+\infty}(2f^{-1}(x)+x+1)=0$.

208. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο R για την οποία ισχύει:

$1+f(x)+f^3(x)=e^x-\frac{x^2}{2}-x$ για κάθε $x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι f(0)=0.

β) Να αποδείξετε ότι :

$β_1$) Η συνάρτηση f είναι συνεχής.

$β_2$) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\frac{e^x-x-1}{1+3f^2(x)}, x \in R$.

γ) Να βρείτε το όριο: $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x-ημx}$.

209. Έστω f μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει:

$f(x)\neq 0$ για κάθε $x \in R$ και $f''(x)-f'(x)e^x=f(x)e^x-f'(x), x \in R$.

Η ψ=e εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Μ(0,f(0)) .

α) Να δείξετε ότι $f(0)-e=f'(0)=0$.

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

γ) Αν $f(x)=e^{e^x-x}, x \in R$:

$γ_1$) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

$γ_2$) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ) Αν $g'(x)=f(\ln x)\frac{x-1}{x}$, x>0 και $g(1)=1-e$:

$δ_1$) Να δείξετε ότι $g(x)=e^{x-\ln x}$-1 , x>0.

δ_2) Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της .

δ_3) Να βρείτε το διάστημα που ανήκει ο πραγματικός αριθμός λ, ώστε να ισχύει $x - \ln x \geq \ln(\lambda^2 - 4\lambda + e + 3)$ για κάθε x>0.

δ_4) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου της C_g στο οποίο η εφαπτομένη έχει εξίσωση $\psi = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.

210. α. Δίνονται οι συναρτήσεις f , g , όπου f συνεχής στο R και $g(x) = -x^2 + ex + 1$, $x \in R$. Αν ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$, f(0)=1 και $g(f(x)) = -e^{2x} + e^{x+1} + 1$, $x \in R$, να βρείτε την f .

β. Δίνεται $f(x) = e^x$, $x \in R$.Να αποδείξετε ότι:

β_1. Οι γραφικές παραστάσεις των f , g έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία, τα A(0,1) και B(1,e).

β_2. Να βρείτε τις σχετικές θέσεις των C_f και C_g στο R.

γ_1. Να βρείτε τις εφαπτόμενες ε_1 και ε_2 των C_f και C_g αντίστοιχα στο σημείο A.

γ_2. Έστω φ η γωνία που σχηματίζει η ε_1 και θ η γωνία που σχηματίζει η ε_2 με τον άξονα $x'x$ και ω η γωνία των εφαπτόμενων στο A. Να αποδείξετε ότι:

i) Είναι ω<θ και ii) Ισχύει εφ(θ-ω)=1.

211. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύουν:

- $x^2 f'(x) + f(x) = 0$ για κάθε x<0
- $f'(x) = 3x^2$ για κάθε x>0
- $f(-1) = \frac{1}{e}$

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^{-1/x} f(x)$, x<0.

α. Να αποδείξετε ότι η g είναι σταθερή.

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & , x < 0 \\ x^3 & , x \geq 0 \end{cases}$.

γ. Να μελετήσετε την f' ως προς τη μονοτονία.

δ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

ε. Να λυθεί η εξίσωση $e^{x^2} - x^2 + f(x) - 1 = 0$.

στ. Να δείξετε ότι:

i) Υπάρχει $x_0 \in(-1,0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)= 1/2$

ii) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in(-1,0)$ τέτοια, ώστε $\dfrac{(e-1)\xi_1^2}{f(\xi_1)}+\dfrac{\xi_2^2}{f(\xi_2)}=e^2$

η) Αν $\beta < x_0 < \alpha <-1/2$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{e^2f(\alpha)-1}{e^2f(\beta)-1}<\dfrac{\alpha-x_0}{\beta-x_0}$

212. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g : R\to R$ για τις οποίες ισχύει:

$f(g(x)) = 2e^x - x^2 - x + g(x)$ για κάθε $x \in R$.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1-1.

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x^4 - x^3 - 3x^2 + 4x) = g(1)$ έχει ακριβώς μια λύση στο (1,2).

γ. Επιπλέον είναι γνωστό ότι:

- Η συνάρτηση είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο R.
- $g(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g'(x + 2h) + 2g'(x - h) - 3g'(x)}{h}$, $x \in R$.
- $(g(x))^2 g'(x) = x^2$ για κάθε $x \in R$.

Να δείξετε ότι:

γ1. $f(x) = 2e^x - x^2$, $x \in R$.

γ2. $f(e^x) + xf'(x) > e^x f'(x) + f(x)$ για κάθε x>0.

δ. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in R$ ώστε:

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{g^4(x) + \alpha g^3(x) + \beta g^2(x) + 4g(x) - 1}{x - 1} = -1$.

213. Α. Δίνεται η συνάρτηση $h(x)= 2e^x -x^2 +x$, $x\in R$.
Να μελετήσετε την h ως προς την μονοτονία.

Β. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g : R\to R$ για τις οποίες ισχύει:

$f(g(x)) = 2e^x - x^2 + x + g(x)$ για κάθε $x \in R$.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1-1.

β. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ αν η εξίσωση
$g(x^5 - x^3 - (\lambda + 2)x) = g(x^4 - (\lambda - 1)x^2 + 2\lambda)$
έχει ακριβώς μια λύση στο (-1,2).

γ. Αν επιπλέον $g'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in R$ και g(0)=1 :

i) Να δείξετε ότι $f(x) = 3x - (\ln x)^2 + \ln x$, x>0 .
ii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iii) Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς κ, m, αν ισχύει

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(g(x)) - g(x) + \kappa}{\eta\mu(x - 1)} = m$.

214. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:[-1,2] \to R$ με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύουν:

$g([-1,2])=[-3,1/2]$, $g(-1),g(2) \neq 1/2$, και $g'(x) \leq \frac{25}{12}$ για κάθε $x \in [-1,2]$.

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x)=g(x)-3x+1$, $x \in [-1,2]$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (-1,2)$, ώστε $g'(x_0) = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x)+6x=3$ έχει λύση στο $(-1,2)$.

γ) Αν ισχύει $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [-1,2] - \{1\}$ και $g(0)= -1$, να δείξετε ότι:

γ1) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$, ώστε $f(\xi)=-1$.

γ2) Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$, τέτοιοι, ώστε

$$\frac{1}{g'(\xi_1) - 3} + \frac{1}{2g'(\xi_2) - 6} = -1$$

γ3) Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\rho_1, \rho_2 \in (0,1)$, τέτοιοι, ώστε

$$f'(\rho_1) + f'(\rho_2) = -3$$

δ) Αν $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)+1}{f(x)} = -2$, να βρεθεί η εφαπτομένη της Cg στο (0,g(0)).

ε) Να δείξετε ότι $g(x) \leq \frac{5}{2}x - 2$ για κάθε $x \in [-1,1]$.

215. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:[-\alpha,\alpha] \to R$ για την οποία ισχύουν:

$g(\alpha)=3\alpha+1$, $g(-\alpha)=-3\alpha+1$ και $g'(x) \leq 3$ για κάθε $x \in [-\alpha,\alpha]$.

Επιπλέον,δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $g(x) =f(x)+2x+1$, $x \in [-\alpha,\alpha]$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [-\alpha,\alpha]$

β) Να δείξετε ότι $f(x) = x$, $x \in [-\alpha,\alpha]$.

γ) Αν α=2 και $h(x) = \sqrt{3x^2+1} - x$, $x \in R$,να βρείτε τα όρια:

γ1) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{|g(x)| - x^3 - 3}{|f(x) - 2x^2| - 1} \ln(x-1)$

γ2) $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$

γ3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\eta\mu x}{h(x)}$

216. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:[-1,2] \to R$ με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύουν: $g([-1,2])=[-3,1/2]$ και $g(-1),g(2) \neq 1/2$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (-1,2)$, ώστε $g'(x_0) = 0$.

β) Επιπλέον, δίνεται ότι $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [-1,2] - \{1\}$, $g(0)= -1$ και $g(2)= -3$.

β1) Να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία .

β2) Να λυθεί η εξίσωση $g\left(e^{x-1} + \frac{1}{2}\right) + g(x + \ln 2) = 1$, $x \in [-1,1]$.

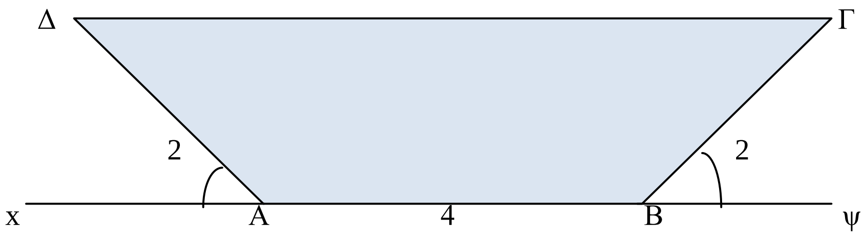
β_3) Να λυθεί η εξίσωση $g(2e^{x^2-1} - 1) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$, $x \in [-1, 1]$.

β_4) Να λυθεί η ανίσωση $g(\eta\mu^2 x + 1) \geq g(\ln(x^2 + e) + x^2)$, $x \in \left[\dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

217. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύουν:
$f(R)=[1/e, e)$ και $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2 + 1)^2} f(x)$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = e^{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$, $x \in R$.
β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί κ, λ με κ<0<λ , ώστε να ισχύει το θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα [κ, λ].
γ) Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x + 1$, $x \in R$.
γ_1) Να ορίσετε την συνάρτηση h=fog.
γ_2) Να μελετήσετε την h ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της .
δ) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της h έχει άξονα συμμετρίας την x=-1 και η γραφική παράσταση της f' είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

218.



$A\Delta=B\Gamma=2$, $AB=4$, $x\hat{A}\Delta = \psi\hat{B}\Gamma = \theta$

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κανάλι του οποίου η κάθετη διατομή ΑΒΓΔ φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.
Α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της διατομής ΑΒΓΔ είναι ίσο με
$E(\theta) = (8 + 4\sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta$, $\theta \in (0, \pi)$.
Β. Να δείξετε ότι το εμβαδόν της κάθετης διατομής μεγιστοποιείται για μοναδική τιμή θ_0 , που ανήκει στο $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$.
Γ. Να βρεθεί η γωνία θ_1 τη χρονική στιγμή που ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού της διατομής είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της γωνίας θ, όπου $\theta'(t) > 0$.
Δ. Να βρεθεί το $\lim\limits_{\theta\to\pi}\left[E(\theta)\ln(\pi - \theta)\right]$.

Ε. Να αποδείξετε ότι $E(\frac{2\pi}{3}) + E(\frac{\pi}{6}) < E(\frac{\pi}{3}) + E(\frac{\pi}{2})$.

219. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^4 - 25x^2 + 2$, $g(x) = 20x^3 + x + 1$.
i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το ευρύτερο διάστημα [-α, α] ώστε η f να έχει μέγιστο σε αυτό.
ii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν δυο τουλάχιστον κοινά σημεία με τετμημένες x_1, x_2, όπου $x_1 \in (-1, 0)$ και $x_2 \in (0, 1)$.
iii) Σημεία M(x,f(x)) , N(x,g(x)) κινούνται στις C_f και C_g αντίστοιχα με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης τους $x'(t) > 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή t_0 με $x(t_0) = x_0 \in (-1, 1)$ ώστε να ισχύει $f'(t_0) = g'(t_0)$.
iv) Να λυθεί η εξίσωση $f\left(\sqrt{x}\right) = g'\left(\frac{1}{\sqrt{60}}\ln x\right) - 28x + 5$.
v) Να λυθεί η ανίσωση $f(\eta\mu x + 3) < h(x)$, όπου $h(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

220. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - x + 4} + \alpha x + \beta, & x \le 1 \\ \dfrac{-4x^2 + 5x + 7}{4}, & x > 1 \end{cases}$
για την οποία ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο [0,2] .
i) Να δείξετε ότι $\alpha = -1$, $\beta = 1$.
ii) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της .
iii) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η f^{-1}.
vi) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(|\eta\mu x| - |x| + 2) \ge e^x - x$, $x \in R$.

v) Να βρείτε τα όρια: α. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\eta\mu f(x) + \sigma\upsilon\nu f^{-1}(x)}{f'(x) + 2}$ β. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\eta\mu(f(x) - 2)}{f(f(x)) - f(2)}$.