

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x) = \int_0^1 e^{-x} f(x) dx + x e^x, x \in \mathbb{R}.$$

A. Να δείξετε ότι $f(x) = x e^x + \frac{e}{2}, x \in \mathbb{R}.$

B. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τα κοίλα και να βρεθεί το σημείο καμπής.

Δ. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ασύμπτωτη της C_f , τον άξονα $\psi'\psi$ και την ευθεία $x=1$.