

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\text{➤ } \frac{1}{x} f'(x) = (x+2)e^x \text{ για κάθε } x < 0.$$

$$\text{➤ } f(0) + 1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \eta \mu x \, dx.$$

A. Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 e^x$, $x \in (-\infty, 0]$.

B. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο της.

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

Γ2. Να δείξετε ότι ισχύει $2\sqrt{f(x_1) \cdot f(x_2)} = f(-2)$, όπου x_1, x_2 οι τετμημένες των σημείων καμπής.

Δ. Να υπολογισθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sin(2025x^2) f(x) + \frac{\eta \mu \frac{1}{x}}{f\left(\frac{1}{x}\right)} \right]$.