

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2.$$

$$\triangleright f'(x) \geq 2x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση } g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{-x+1} + 2 & , x \neq 1 \\ 0 & , x = 1 \end{cases}.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\text{Α. } f(1) = f'(1) - 2 = 0$$

Β. Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο της $M(1, g(1))$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία , η οποία και να βρεθεί.

$$\text{Γ. Ισχύει } \int_0^1 f'(x)e^x dx > 2.$$

Δ. Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα, να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα.