

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

- $f^3(x) + 2f(x) + 1 = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \kappa, \kappa \in \mathbb{R}$.

A. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

B. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=1$.

Γ. Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $g(x) = 2x - \ln(ax) - e^a, x > 0, a > 0$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ώστε, η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$, να εφάπτεται και στη C_g σε σημείο $N(x_1, g(x_1))$.