

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $(f(x) - e^x)(f(x) + e^x) = 1 - 2e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα.
- $f(-1)f(1) < 0$.

A. Να δείξετε ότι $f(x) = e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

B. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\alpha)}{x-1} - \frac{f(\beta)}{x+2} = -1$, όπου $\alpha < 0 < \beta$,

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-2, 1)$.

Γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\eta\mu\alpha + \alpha}{x+1} - \frac{e^\beta - \ln\beta}{x-2} = 5$, όπου $\alpha < 0 < \beta$,

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 2)$.