

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g(x) = |x-3| \cdot f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- Η f είναι γνησίως μονότονη
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=3$.

i) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f , g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο, το οποίο και να βρεθεί.

Αν επιπλέον $g(1)=2$

ii) α. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα

β. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(f(2)-f(1))x^3 + x^2 - x + 1}{(f(4)-f(3))x^2 + x + 1}$.

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\eta\mu 2) - f(2)}{x+1} - \frac{f(e^4 - 1)}{x-2} = 2024$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(-1, 2)$.