

ΘΕΜΑ

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$g(x)=e^x + 4e^{-x}, x \in \mathbb{R} \text{ και } h(x)=\ln x, x>0$$

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f=g \circ h$

Αν $f(x)=x+\frac{4}{x}, x>0$, τότε :

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) i. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2e$ έχει ακριβώς δυο ρίζες

$$x_1, x_2, \text{ όπου } x_1 < 2 < x_2$$

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x)+f'(x)=2e$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2)

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

ε) Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f η οποία διέρχεται απ το σημείο $A(0,8)$ και να δείξετε ότι η C_f είναι πάνω απ την (ε) για κάθε $x>0$, εκτός απ το σημείο επαφής.

στ) Αν $\varepsilon: y=-3x+8$ να δείξετε ότι η (ε) τέμνει την C_g σε σημείο

$$x_0 \in (1, e).$$

ζ) Να δείξετε ότι η εξίσωση :

$$\frac{f(\alpha)-4}{\alpha-1} + \frac{f(\beta)+3\beta-8}{\beta-2} = 0, \text{ όπου } 0<\alpha \neq 2 \text{ και } 0<\beta \neq 1$$

έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1,2)$

η) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β αν ισχύει :

$$f(\alpha+\beta)+f(3\alpha-\beta)=8$$

θ) Να δείξετε ότι

$$\frac{f(x)-5}{x-1} < \frac{4-f(x)}{2-x}, \quad 1 < x < 2$$

ι) Να υπολογίσετε το όριο :

$$K = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(\lambda) - 4x}{f(x) + 3x - 8}, \quad \text{όπου } 0 < \lambda \neq 2$$

ια) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_e^{e^2} \frac{\ln^2 x + 4}{x \ln x} dx$$

ιβ) Να αποδείξετε ότι :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(\eta \mu x) dx \geq \frac{16\pi - 9}{6}$$