

B1. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής με $f(2) > -2$ για την οποία ισχύει

$$f^2(x) + 2xf(x) = e^{2-2x} - x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να δείξετε ότι } f(x) = e^{1-x} - x, x \in \mathbb{R}.$$

B2. Δίνεται η συνάρτηση $g(e^x) = x + e^x, x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $g(x) = \ln x + x, x \in (0, +\infty)$.

B3. Έστω η συνάρτηση $\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in [x_0, +\infty) \\ g(x) & , x \in (0, x_0) \end{cases}$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε η συνάρτηση φ να είναι συνεχής στο x_0 .