

ΑΣΚΗΣΗ 15

A. Να αποδείξετε ότι: $\left| \int_a^\beta f(x) dx \right| \leq \int_a^\beta |f(x)| dx$.

B. Να δείξετε ότι ισχύει: $-e < 2 \int_0^1 x \ln x e^{x^2} dx < e$.

ΑΣΚΗΣΗ 17

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$.

Επίσης, δίνεται $\int_{e^{-x}f'(x)}^{e^{-x}f(x)+1} (e^x - x - 1) dx = 0$.

i) Να δείξετε ότι $f(x) = (x+1)e^x, x \in \mathbb{R}$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

iii) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση C της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

iv) Να δείξετε ότι ισχύει: $ef(x) \geq x+1$ για κάθε $x \geq -3$.

v) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C της f , την $g(x) = \frac{1}{e}x + \frac{1}{e}$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = -1, x = 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 21

B. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$G(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x \ln x + x & , x > 0 \\ \alpha & , x = 0 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

B₁ i) Να βρείτε τον πραγματικό α , αν η συνάρτηση g είναι συνεχής.

ii) Αν $\alpha=0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παράγουσα της g .

B₂ Να δείξετε ότι: $\int_0^e g(x) dx - \int_{e^2}^e g(x) dx = 2e^4$.

B₃ Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$2\xi \ln \xi = \frac{1}{2} - \xi.$$

B₄ Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\rho_1, \rho_2 \in (0,1)$ τέτοια, ώστε $\frac{1}{G''(\rho_1)} + \frac{1}{G''(\rho_2)} = 2$.

