

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 1

A1. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x)=e^x$ και $g(x)=-x^2+ex+1, x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

i) οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία, τα $A(0,1)$ και $B(1,e)$.

ii) ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$

A2. Αν $z = \lambda + e^\lambda i, \lambda \in \mathbb{R}$ και $w = \left(\kappa + \frac{e}{2}\right) + \left(1 - \kappa^2 + \frac{e^2}{4}\right)i, \kappa \in \mathbb{R}$,

δύο μιγαδικοί αριθμοί, να δείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $z = w$, οι οποίες και να βρεθούν.

Άσκηση 2

A. Έστω ο μιγαδικός αριθμός z με $z \neq 0$.

Να δείξετε ότι $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \leq 2$.

B. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2\ln x + \frac{1}{2}x^2 - \left(\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}\right) \cdot (x-1) + \frac{3}{2}$.

α) Αν ισχύει $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, να υπολογίσετε

την παράσταση $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$.

β) Αν $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} = -1$,

β₁) να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β₂) να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β₃) να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=a$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 3

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2f(x^3) \geq f^2(x)+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι:

α) η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-1,1)$

(ή η f' δεν είναι 1-1).

β) $f'(-1)=f'(0)=f'(1)$.

γ) η συνάρτηση f έχει τέσσερα τουλάχιστον πιθανά σημεία καμπής στο $(-1,1)$.

Άσκηση 4

Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με ασύμπτωτη την $\psi=2x-1$

καθώς το $x \rightarrow -\infty$. Επίσης, ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)f(x) - 2\mu x^2 + \ln x}{x^2 f(x) + 2x^3 + \eta \mu x} = 28, \mu \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε:

i) την ασύμπτωτη της C_f καθώς το $x \rightarrow +\infty$.

ii) τον πραγματικό αριθμό μ .

Άσκηση 5

Έστω συνάρτηση f , με συνεχή παράγωγο, που στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της f έχει τις ευθείες $\varepsilon_1: \psi=\lambda x+\beta$ και $\varepsilon_2: \psi=-\lambda x+\beta$ ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$ αντίστοιχα, $\lambda>0$, να αποδείξετε ότι:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) < 0$, αν τα όρια υπάρχουν

γ) η f έχει ελάχιστη τιμή.

δ) ισχύει $f(x) > \lambda x + \beta$ και $f(x) > -\lambda x + \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 6

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f'(x) = e^{x^2} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = a$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

ii) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x)}{e^{x^2}} \quad \beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x^2} \frac{f(t)}{t^3} dt \quad \gamma. \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{e^{-t^2} f(t)}{t} dt.$$

Άσκηση 7

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

Αν η ευθεία $\psi = \lambda x + \beta$ με $\lambda \neq 0$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης

της f καθώς το $x \rightarrow -\infty$, να δείξετε ότι η ευθεία $\psi = \frac{1}{\lambda}x - \frac{\beta}{\lambda}$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f^{-1} καθώς το $x \rightarrow -\infty$.

Άσκηση 8

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{2e^x + x^2}{e^x + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

ii) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

iv) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x))$.

Άσκηση 9

Για μια συνάρτηση f ισχύει $|f(x) - \ln x| \leq (x-1)^2$ για κάθε $x > 0$.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 10

A. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f'(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(0)=0$. Επίσης, δίνεται η συνάρτηση g με τύπο

$$g(x) = f(x) - x \cdot \ln(\sqrt{x^2+1} + x) + \sqrt{x^2+1} - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f .

ii) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.

iii) Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{\ln x}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{x}$.

iv) Να δείξετε ότι $\ln(\sqrt{x^2+1} + x) > \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ για κάθε $x > 0$.

v) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$, $\int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx$.

B. Επιπλέον δίνεται η συνάρτηση h με $h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι:

α) συνεχής

β) παραγωγίσιμη στο 0.

γ) γνησίως αύξουσα.

Άσκηση 11

Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(2008) = f(-2008) + 4016$ και $f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι:

α) $f(0) = f(2008) - 2008$

β) η f έχει 1 τουλάχιστον πιθανό σημείο καμπής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 12

A. Να αποδείξετε ότι: $1 \leq \ln x \leq x+1-e$ για κάθε $x \geq e$.

B. Αν $f(x) = \int_e^x \frac{1}{\ln t} dt$, $x \geq e$, να δείξετε ότι:

α) $\ln(x+1-e) \leq f(x) \leq x-e$ για κάθε $x \geq e$.

β) $\sqrt{2E} \leq e(e-1)$, όπου E το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=e$, $x=e^2$ αντίστοιχα.

Άσκηση 13

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x & , x \in (0, 1] \\ e^{x-1} + \alpha & , x \in (1, +\infty) \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

καθώς και η συνάρτηση $g(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x f(t) dt$, $x > 0$

A) i) Να βρείτε το α , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο 1.

ii) Αν $\alpha = -1$, να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1) = 1$.

B) Να βρείτε:

β₁) τον τύπο της συνάρτησης g

β₂) τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

β₃) το σύνολο τιμών της συνάρτησης g .

β₄) Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 λύσεις στο $(0, +\infty)$.

β₅) Να δείξετε ότι η g είναι κοίλη στο $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ και κυρτή στο $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 14

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(A) = (1, +\infty)$,

για την οποία ισχύει $\int_e^{f(x)} \ln t \, dt = x$ για κάθε $x \in A$.

α.) Να δείξετε ότι:

i) η f είναι γνησίως αύξουσα στο A .

ii) η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της f^{-1} .

iii) $A = (-1, +\infty)$ και iv) $f(0) = e$, $f(e^2) = e^2$.

β.) Να βρείτε το εμβαδόν E του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=e^2$.

Άσκηση 15

Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, f παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα με $f([0, 3]) = [-2, 5]$.

i) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς 1 $x_0 \in (0, 3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{3 + f(1)}{3}$.

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει 1 τουλάχιστον $\xi \in (0, 3)$ τέτοιο ώστε $3f'(\xi) - 7 = 0$.

iii) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 3)$ τέτοιοι, ώστε $\frac{f(1) + 9}{f'(\xi_1)} + \frac{12 - f(1)}{f'(\xi_2)} = 9$.

Άσκηση 16

Δίνεται συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$

με f'' γνησίως αύξουσα, $f([\alpha, \beta]) = [2007, 2008]$ και $2007 < f(\alpha), f(\beta) < 2008$.

Να δείξετε ότι η f έχει 1 ακριβώς σημείο καμπής.

Άσκηση 17

α) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \gamma]$, $\beta \in (\alpha, \gamma)$ και f 1-1.

Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

β) Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) \neq 0$

για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 18

Δίνονται οι μιγαδικοί $z_x = f(x) + x \cdot i$, $x \in [\alpha, \beta]$, όπου f συνάρτηση συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$ με $\alpha < 0 < \beta$.

α) Αν $\operatorname{Re}(z_\alpha) = \operatorname{Im}(\overline{z_\beta})$ και $\operatorname{Re}(z_\beta) = \operatorname{Im}(\overline{z_\alpha})$, να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

β) Αν $\int_\alpha^{x_0} f(x) dx = -1$ και $\int_\beta^{x_0} f(x) dx = -3$, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \alpha$, $x = \beta$.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2 τέτοιοι, ώστε $\frac{3}{f(\xi_1)} - \frac{1}{f(\xi_2)} = \beta - \alpha$.

Άσκηση 19

Έστω συνάρτηση $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1, 3]$ με $f''(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [1, 3]$ και $f'(1) = 1$, $f'(3) = 3$.

α) Να δείξετε ότι: $f'(x) = x$, $x \in [1, 3]$.

β) Αν επιπλέον $\int_1^3 f(x) dx = \frac{32}{6}$, να βρείτε:

i) τον τύπο της συνάρτησης f .

ii) την αντίστροφη f^{-1} της συνάρτησης f .

iii) τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$

Άσκηση 20

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x + \psi i$, $w = \frac{z+1}{z-i}$, $z \neq i$.

i) Αν $w \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων $M(z)$.

ii) Αν $w \in I$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων $M(z)$.

iii) Αν ο z κινείται στην ευθεία με εξίσωση $\psi = x$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων N του w . (ή $\psi = x+1$)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 21

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2} \cdot \int_{-x}^x e^{t^2 + 2tx} dt, x \in \mathbb{R}$

- i) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2e^{4x^2}, x \in \mathbb{R}$
- ii) Να εξετάσετε την f ως προς τα κοίλα και να δείξετε ότι ισχύει:
 $f(x) \leq 2x$ για κάθε $x \in (-\infty, 0]$ και $f(x) \geq 2x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$
- iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- iv) Αν $f(1) = \frac{e^4}{4}$, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0, x=1$.

Άσκηση 22

Δίνεται η κυρτή συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, η οποία έχει την ευθεία $\psi = ax + \beta$ ασύμπτωτη καθώς το $x \rightarrow +\infty$.

Έστω και η συνάρτηση $g(x) = f(x) - ax - \beta, x > 0$. Να δείξετε ότι:

- i) ισχύει $g(x) - g(x-1) < g'(x) < g(x+1) - g(x)$ για κάθε $x > 1$.
- ii) $f(x) > ax + \beta$ για κάθε $x > 0$.

Άσκηση 23

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

για την οποία ισχύουν: $\int_1^{|z|} f(x) dx = 0, z \in \mathbb{C}, f(1) = 1$.

- i) Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να βρείτε το
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(|z + \bar{z}| - 3)x^3 + x}{(|z - \bar{z}| - 3)x^2 + x}$$

iii) Αν
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(|z + \bar{z}| - 1)x^3 + x^2}{x^2 + x} = 1,$$
 να βρείτε τους μιγαδικούς z .

- iv) Αν $\int_0^1 f(x) dx < |z + 2\bar{z}|$, να δείξετε ότι η εξίσωση $\int_0^x f(t) dt = 3x^2 + 6x - 6$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0, 1)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 24

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής και 1-1 στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν:

$$\int_3^4 f(x)dx = 1, \int_5^4 f(x)dx = 3.$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $G(x) = \int_1^2 f(x+t)dt$

και να δείξετε ότι $G'(x) = f(x+2) - f(x+1)$.

β) Να δείξετε ότι η G δεν έχει κρίσιμα σημεία.

γ) Να δείξετε ότι η $G(x)=0$ έχει μοναδική λύση $x_0 \in (2,3)$.

δ) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (2,3)$ τέτοιοι, ώστε $\frac{1}{G'(\xi_1)} + \frac{3}{G'(\xi_2)} = -1$.

ε) Να δείξετε ότι η $f(x)=-1$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(3,5)$.

στ) Να δείξετε ότι η $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(3,5)$.

Άσκηση 25

Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f'(x) + f''(x) = 2e^{-x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f'(0) = f(0) = 0.$$

i) Να δείξετε ότι $f(x) = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + 2, x \in \mathbb{R}$.

ii) Να βρείτε:

α) τις ασύμπτωτες της C_f

β) το σύνολο τιμών της f

γ) το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $f(x)=a, a \in \mathbb{R}$, για τις διάφορες τιμές του a .

iii) Να δείξετε ότι ισχύει: $\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \leq f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ για κάθε $\alpha, \beta \in [1, +\infty)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 26

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και κυρτή, με $f(1) > 0$ και $f'(1) = 0$.

$$\text{Επίσης, } g \text{ συνάρτηση συνεχής στο } 1 \text{ με } g(x) = \begin{cases} \frac{\int_1^x f(t) dt}{x-1}, & x \neq 1 \\ \int_1^2 f(t) dt, & x = 1 \end{cases}$$

- i) Να δείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο 1.
- ii) Να μελετηθεί η g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- iii) Να βρεθούν τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(t) dt$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

Άσκηση 27

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και ο μιγαδικός αριθμός

$$z = \int_2^x f(t) dt + \left(\int_1^x f(t) dt \right) \cdot i.$$

Αν ισχύει $|z + i|^2 = 2 + |z + 1|^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι :

α) $\int_1^2 f(t) dt = 1$ και

β) η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(1, 2)$.

Άσκηση 28

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

$$x \cdot f''(x) = x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, f'(0) = 1 \text{ και } f(-1) = \frac{-1}{6}.$$

- i) Να βρείτε την συνάρτηση.
- ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$.
- iii) Αν $G(x) = \int_0^x f(t) dt$, να δείξετε ότι: $\int_0^\alpha f(t) dt + \int_0^\beta f(t) dt \geq 2 \int_0^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(t) dt$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 29

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+e^x$, $x \in \mathbb{R}$

- i) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.
- ii) Να βρεθεί η ασύμπτωτη της C_f καθώς το $x \rightarrow -\infty$.
- iii) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$ καθώς το $x \rightarrow -\infty$.
- iv) Να δείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη.

Άσκηση 30

A. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως αύξουσα με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

- i) η f είναι αντιστρέψιμη και
- ii) η εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι ισοδύναμη της εξίσωσης $f(x)=x$, $x \in \mathbb{R}$.

B. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^5-x^3+x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} και να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.
- β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ και να δείξετε ότι έχει και δεύτερο κοινό σημείο με την C_f .
- γ) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο με τετμημένη $x_0=1$.
- δ) Να υπολογίσετε την παράσταση $I = \int_0^1 f^{-1}(x)dx - \int_{-1}^0 f(x)dx$.

Άσκηση 31

Έστω συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη και κυρτή. Να δείξετε ότι:

- i) ισχύει $f(x)+f(\alpha+\beta-x) \geq 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.
- ii) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot (\beta-\alpha)$.
- iii) $\int_{\alpha}^x f(t)dt \geq f\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) \cdot (x-\alpha)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 32

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη και $\int_{-1}^0 f(t)dt < \int_0^1 f(t)dt$.

Επίσης δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{x^3}{3} - \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t)dt \right) \cdot x^2 + \left(\int_{-1}^0 f(t)dt \cdot \int_0^1 f(t)dt \right) \cdot x, x \in \mathbb{R}.$$

Αν η g παρουσιάζει στα σημεία $-2, 2$ αντίστοιχα τοπικά μέγιστη-ελάχιστη τιμή, να δείξετε ότι:

i) υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-1, 1)$ ώστε $f(\xi_1) = -2, f(\xi_2) = 2$.

ii) υπάρχει $x_0 \in (-1, 1)$, ώστε $f(x_0) = 0$.

iii) υπάρχουν $\eta_1, \eta_2 \in (-1, 1)$ ώστε $\frac{1}{f'(\eta_1)} + \frac{1}{f'(\eta_2)} = \frac{\xi_2 - \xi_1}{2}$.

Άσκηση 33

Έστω συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) - 1 = x^2 - 2x \eta \mu x - \sigma \nu^2 x, x \geq 0.$$

i) Να βρεθούν οι δυνατοί τύποι της f .

ii) Αν $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2010$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0, +\infty)$.

Άσκηση 34

i) Αν $|z + 16| = 4|z + 1|$ (1), να δείξετε ότι $|z| = 4$.

ii) Αν $|z - i| = |z - 1|$ (2), να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ευθεία, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iii) Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 για τους οποίους ισχύουν συγχρόνως οι σχέσεις (1) και (2).

iv) Αν $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$, όπου $z_3 = -4i$, να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και να βρείτε το εμβαδόν του.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 35

α) Να δείξετε ότι: $e^{-x^2} \geq -x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής, για την οποία ισχύει:

$$f(1) > 1, f(-1) > 1 \text{ και } f^2(x) - 2f(x) = e^{-x^2} + x^2 - 2, x \in \mathbb{R}.$$

i) Να δείξετε ότι $f(x) = 1 + \sqrt{e^{-x^2} + x^2 - 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iii) Να βρεθεί το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 36

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w για τους οποίους ισχύει:

$$\operatorname{Re}(z^2) - \operatorname{Re}(z) + |z|^2 = \operatorname{Im}(z) \quad (1) \text{ και } w = \frac{3}{2}(z + \bar{z})^2 + i(z - \bar{z}) + 2i, w \in I, (2).$$

i) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο (C_1) των εικόνων του z , που ικανοποιούν την σχέση (1).

ii) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο (C_2) των εικόνων του z , που ικανοποιούν την σχέση (2).

iii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των (C_1) και (C_2) .

Άσκηση 37

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} g(x) \ln \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases},$$

όπου g συνάρτηση παραγωγίσιμη στο 0 με $g'(0) = g(0) = 0$.

Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν κοινή εφαπτομένη τον άξονα $x'x$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 38

Δίνεται η συνάρτηση $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

και παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, για την οποία ισχύει: $f'(x) + f(x)\varepsilon\phi x = \sigma\upsilon\nu x$

για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $f(0)=0$.

A) Να βρείτε τον τύπο της f .

B) i) Να δείξετε ότι εφαρμόζεται το θ . Rolle για την f στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $\xi \cdot \varepsilon\phi \xi = 1$.

Γ) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=\frac{\pi}{2}$.

Άσκηση 39

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z ,

όταν : α) $|z+3| + |z-3| = 10$

β) $|z+6i| + |z-6i| = 20$

γ) $\frac{1}{|z+3i|} + \frac{1}{|z-3i|} = \frac{10}{|z^2+9|}$

Άσκηση 40

Για μια παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f ισχύει:

$f'(x) = \frac{2x-1}{e^x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0)=-1$

i) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

ii) Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f .

iii) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g , τον άξονα $\psi'\psi$ και την ευθεία

με εξίσωση $x=1$, όπου $g(x) = \frac{f(x)}{2x+1}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 41

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , όπου $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και

$g(x) = \int_{-2x}^x f(t) dt$. Η εφαπτομένη της C_f στο $A(0, \frac{3}{2})$ σχηματίζει

με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{4}$. Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει

με τον άξονα $x'x$ η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της παραγώγου της g , δηλ. στη $C_{g'}$, στο σημείο $x_0=0$.

Άσκηση 42

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία

ισχύουν: $(1-x)f'(x) = f(x) + f'(x)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(0)=1$.

Επίσης, δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x \cdot f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι: α) η g είναι σταθερή και β) η f έχει τύπο $f(x) = \frac{1}{e^x - x}$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=a$, $a \in \mathbb{R}$.

iv) Να δείξετε ότι εξίσωση $\int_1^{f(x)} (e^t - 1)f(t) dt = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 43

Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει:

$x^2 f'(x) - f(x) = 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(1) = \frac{2010}{e}$.

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot f(x)$, $x > 0$ είναι σταθερή.

ii) Να βρείτε τον τύπο της f .

iii) Αν $\int_{2x-1}^{x^2} \frac{f(t)}{t} dt = 0$, $x > \frac{1}{2}$, να βρείτε το x

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 44

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$, με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$,

για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) - 2 = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την f^{-1} .

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(0, f(0))$.

iii) Να δείξετε ότι: $\int_{-2}^x f(t)dt = \frac{3}{4}(f(x))^4 + \frac{1}{2}(f(x))^2$.

Άσκηση 45

Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w, v ισχύουν: $|z| = |w| = |v| = \rho$

και $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{w}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{w}{v}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{v}{z}\right) = -\frac{1}{2}$. Να αποδείξετε ότι ισχύει:

i) $z + w + v = 0$

ii) το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο, όπου A, B, Γ , οι εικόνες των μιγαδικών z, w, v αντίστοιχα.

Άσκηση 46

Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, για την οποία ισχύει:

$$f(x) = 1 + \int_{x+1}^{2x} \frac{f(t-x)}{x} dt, \quad x > 0$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x) = \ln x + 1, x > 0$

iii) Αν $0 < \alpha < \beta < \gamma$, να δείξετε ότι ισχύει $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}$

iv) Αν $g(x) = x \ln x, x > 0$ και $0 < \alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν

$$\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοια, ώστε να ισχύει } (\ln(\xi_1 \cdot \xi_2) + 2) \frac{\beta - \alpha}{2} = \ln \frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 47

Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν: $f''(x) = e^{2f(x)}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, $f(1) = 0$ και $f'(1) = -1$. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x) = -\ln x$, $x > 0$.

Άσκηση 48

A. Να δείξετε ότι: $\frac{1}{2e+1} \leq \int_0^1 \frac{1}{2e^t+1} dt \leq \frac{1}{3}$.

B. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν: $(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) = f(x) \cdot f'(x)$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ και $f(0) = f'(0) = 1$.

i) Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{2e^x - 1}$, $x \geq 0$.

ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x - \int_0^x \frac{1}{2+(f(t))^2} dt = 1$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, 1)$.

Άσκηση 49

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$x \cdot f'(x) = \int_0^x \frac{4f(t)}{f(t)+f(x-t)} dt \text{ και } f(0)=0.$$

i) Να δείξετε ότι: $\int_0^x \frac{4f(t)}{f(t)+f(x-t)} dt = \int_0^x \frac{4f(x-t)}{f(t)+f(x-t)} dt$.

ii) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

iii) Να δείξετε ότι ισχύει: $f(x+\psi) = f(x) + f(\psi)$ και $f(x\psi) = \frac{1}{2} f(x)f(\psi)$, $x, \psi \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 50

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0)=1$. Δίνονται και οι μιγαδικοί αριθμοί $z=f(x)+i$ και $w=f'(x)+xi$, $x \in \mathbb{R}$.

α_1) Αν ο αριθμός $z \cdot w$ είναι πραγματικός, να δείξετε ότι $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

α_2) Στη συνέχεια, αν $\int_0^1 g(x) dx = \frac{1}{\sqrt{e}}$, όπου $g(x) = \int_0^x f(t) dt$,

να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$.

β) Αν ο αριθμός $z \cdot w$ είναι φανταστικός, να βρείτε τη συνάρτηση f .

Άσκηση 51

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_x^{x^2} e^{x-t} dt$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι $f(x) = 1 - e^{-x^2+x}$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, και να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

iii) Να δείξετε ότι η C_f έχει δύο σημεία καμπής.

iv) Να δείξετε ότι: $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

$f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$

v) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \cdot \eta\mu(2011x) \right) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2012 \cdot f(x) + \frac{\eta\mu x}{x} \right)$$

vi) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = (2x-1) \cdot f(x)$,

τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \frac{1}{2}$ και $x=1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 52

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x & , x \in (0, e] \\ e & , x \in (e, +\infty) \end{cases}$

A) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και όχι παραγωγίσιμη στο $x_0 = e$.

B) Επίσης, έστω η συνάρτηση $g(x) = \int_1^x f(t) dt$, $x > 0$

α) Να βρείτε:

α₁) τον τύπο της συνάρτησης g .

α₂) το σύνολο τιμών της g .

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $6g(x) = 1$ έχει ακριβώς 2 λύσεις στο $(0, +\infty)$.

γ) Να δείξετε ότι η g είναι κοίλη στο $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ και κυρτή στο $\left[\frac{1}{e}, e\right]$.

Άσκηση 53

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z για τον οποίο ισχύει: $z \cdot \bar{z} \leq 2z + 2\bar{z}$ και $|z + 2i| \leq |z + 1 + i|$. Στη συνέχεια,

να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού $w = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$.

Επίσης, να δείξεις ότι υπάρχουν μοναδικοί z και w τέτοιοι, ώστε $|z - w| = 0$, οι οποίοι και να βρεθούν.

Άσκηση 54

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$x \cdot f'(x) = \sin x - \frac{\eta \mu x}{x} \text{ για κάθε } x \in (0, \pi] \text{ και } f(\pi) = 0.$$

i) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{\eta \mu x}{x}$, $x \in (0, \pi]$.

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

iv) Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x^2} f(t) dt}{x}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 55

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $g(x) + x \cdot g'(x) = \sin x$ για κάθε $x \in [0, \pi]$ και η συνάρτηση $f(x) = x \cdot g(x) - \eta \mu x$, $x \in [0, \pi]$ με $f(0) = 0$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή και να βρεθεί ο τύπος της g .

ii) Να βρείτε την παράγωγο της g .

iii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iv) Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} g(t) dt + x}{x^2}$.

Άσκηση 56

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$x^2 \cdot f(x) = \int_0^x \frac{2\eta \mu x \cdot f(t)}{f(t) + f(x-t)} dt.$$

i) Να δείξετε ότι: $\int_0^x \frac{f(t)}{f(t) + f(x-t)} dt = \int_0^x \frac{f(x-t)}{f(t) + f(x-t)} dt$.

ii) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

iii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iv) Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\eta \mu x}^{\eta \mu^2 x} f(t) dt + \eta \mu x}{\eta \mu^2 x}$.

Άσκηση 57

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν:

$$w = \frac{z-1}{z+i}, z \neq -i \text{ και } \operatorname{Im}(z) \leq \operatorname{Re}(z)-2. \text{ Να βρείτε που ανήκουν:}$$

i) οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού z

ii) οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού w .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 58

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) \neq \alpha$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha \neq 0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \alpha x$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

β) Αν επιπλέον $A(1, \alpha)$, $B(-1, 2012\alpha)$ σημεία της γραφικής παράστασης της f , να δείξετε ότι:

β₁) η γραφική παράσταση της f δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β₂) υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + 2011\alpha = 0$.

γ) Αν $f'(x) > \alpha^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Άσκηση 59

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$xe^x f'(e^x) = 2x^2 + |z \cdot x + x|, x \in \mathbb{R} - \{0\}, z \in \mathbb{C} \text{ με } z \neq -1.$$

i) Να βρείτε την συνάρτηση f .

ii) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iv) Να δείξετε ότι υπάρχουν 2 ακριβώς $\xi_1, \xi_2 \in (0, +\infty)$ τέτοια, ώστε

$$\text{να ισχύει } \xi_1 \cdot \xi_2 = 1 \text{ ή } \frac{\xi_1}{\xi_2} = e^{|z+1|}.$$

v) Έστω E το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g ,

όπου $g(x) = \ln^2 x - 1$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = e$ και $x = e^2$.

Αν $E = e^2$, να δείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού z ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 60

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη με f'' συνεχή για την οποία ισχύουν: $\int_0^x x f''(t) dt = \int_{-x}^x \frac{f(x)}{1+e^t} dt, x \in \mathbb{R}, f'(0)=1$ και $f(0)=2$.

i) Να βρείτε τον τύπο της f .

ii) Αν $\int_{|z+3|}^{10-|z-3|} \frac{f(x)}{x} dx = 0, x > 0, |z-3| < 10, z \neq -3$, να βρείτε που ανήκουν οι εικόνες $M(z)$.

iii) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{f(x)}}{x^2 + \eta \mu^2 x}$.

iv) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g , όπου $g(x)=x-1$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0, x=2$.

Άσκηση 61

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν: $\left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot f'(x) + (x - \ln x) \cdot f''(x) = \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x > 0$ και $f'(1)=f(1)=0$.

i) Να βρείτε την συνάρτηση f .

ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

iii) Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής με τετμημένη $\xi \in (1, +\infty)$.

iv) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{f(x)} + \ln x}{\eta \mu^2 x}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 62

i) Να βρείτε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει

$$\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = \alpha(\sigma\upsilon\nu x + e^x) + \beta(\sigma\upsilon\nu x + e^x)' \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

ii) Αν $\alpha = -1, \beta = 1$ και ισχύει: $f'(x) = \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x + e^x}$ για κάθε $x \geq 0$ και $f(0) = \ln 2$, να βρείτε τον τύπο της f .

iii) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

iv) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Άσκηση 63

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$x^2 \cdot f'(x) = x \cdot g(x) + g'(x), \text{ όπου } g(x) = \int_{-\sigma\upsilon\nu x}^{\sigma\upsilon\nu x} \frac{1}{1+e^t} dt, x \in [-\pi, \pi] \text{ και } f(0) = -1.$$

i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να βρείτε το τύπο της f και το σύνολο τιμών της.

iii) Να βρείτε τα $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) \geq \alpha^2 - 3\alpha$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$.

Άσκηση 64

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2x - 4}{\sqrt{x-1} - 1} & , x \in [1, 2) \cup (2, +\infty) \\ z(1+i) + \bar{z}(1-i) & , x = 2 \end{cases},$$

$$z = \alpha + \beta i \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

α) Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$, να δείξετε ότι οι εικόνες M των z ανήκουν σε ευθεία με εξίσωση $x - y - 10 = 0$ (ε).

β) Αν οι εικόνες M των z ανήκουν στην (ε),

β_1) να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$, ώστε $f(\xi) = 10$.

β_2) να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 5)$, ώστε $f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) = (f(\xi))^2 + 6$.

γ) Να βρείτε τα όρια: i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x^5}}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 65

Δίνεται η συνάρτηση $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

$$(f''(x)+1) \cdot \sin x - f'(x) \int_{-x}^x \frac{\sin u}{1+e^u} du = 0, f''(0)+1 = f'(0) = f(0) = 0.$$

i) Να δείξετε ότι $\int_{-x}^x \frac{\sin u}{1+e^u} du = \eta \mu x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

ii) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln(\sin x)$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

iii) Να δείξετε ότι: η f είναι κοίλη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και

$$\text{ισχύει } \sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \geq \sin \alpha \cdot \sin \beta \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

iv) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta \mu^2 x}$.

Άσκηση 66

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$, για την οποία ισχύουν:

$$f(\alpha+\beta) = f(\alpha) \cdot f(\beta) \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, f(1) = e, f(1) \cdot f(-2) = \frac{1}{e} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1.$$

i) Να δείξετε ότι $f(0) = 1$.

ii) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = e$.

iii) Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ και να δείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|ef^2(x)-1| + f(x)-1}{\sqrt{ef(x)}-1} = -2f(1) \cdot f(-2).$$

iv) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 67

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$x \cdot f(x) = \left| \frac{z-i}{z+i} \right| \cdot \eta \mu x - 2 \left| \frac{w-i}{w+i} \right| \cdot \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x}, x \neq 0 \text{ και}$$

$$f(0) = \ell, \text{ όπου } \ell \in \mathbb{R} \text{ με } 0 \leq \ell < 1 \text{ και } z, w \in \mathbb{C} \text{ με } z, w \neq -i.$$

Να δείξετε ότι οι αριθμοί z, w δεν μπορούν να είναι πραγματικοί.

Άσκηση 68

$$\text{Αν } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2, \text{ όπου } f(x) = \frac{-3x^2 + 2x + |z-1|}{x-1} + |w+i|, x \neq 1, z, w \in \mathbb{C}$$

i) να βρείτε που κινούνται οι εικόνες των μιγαδικών z, w και

ii) να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του μέτρου $|z-w|$.

Άσκηση 69

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$(f'(x) - 2x \ln x - x) \cdot (f(x) - x^2 \ln x) = x - 1, x > 0 \text{ και}$$

$$f(e) = e^2 + e - 1, f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} - 1, f(1) = 0.$$

i) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

ii) Αν $f(x) = x^2 \ln x + x - 1, x > 0$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τα κοίλα.

$$\text{iii) Ισχύει } \alpha^{\alpha^2} \cdot \beta^{\beta^2} > \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right)^{\frac{(\alpha+\beta)^2}{2}} \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \left[e^{-\frac{3}{2}}, +\infty \right) \text{ με } \alpha \neq \beta.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 70

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{(z^2 - \bar{z}^2)i \cdot x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$, $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq \pm 1$

και z μιγαδικός με $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι $(z^2 - \bar{z}^2)i \in \mathbb{R}$.

ii) Να δείξετε ότι, το όριο της f στο $x_0 = 1$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$, αν $z \in \mathbb{R}$ ή $z \in i\mathbb{R}$.

Άσκηση 71

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$x^2 \cdot f(x) = |z-1| \cdot (1 - \sin^2 x) + 2|z+1| \cdot (1 - \sin x), \quad x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} \text{ και } f(0) = 4.$$

i) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z .

ii) Αν $M_1(z_1), M_2(z_2)$ σημεία του γεωμετρικού τόπου τέτοια, ώστε O, M_1, M_2 συνευθειακά, όπου O η αρχή των αξόνων, να δείξετε ότι $2\sqrt{3} \leq |z_1 - z_2| \leq 4$.

Άσκηση 72

$$\text{Δίνεται η συνεχής συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re}(|z-1| \cdot x) + \alpha}{x} & , x \neq 0 \\ |2z+1| - |z-1| & , x = 0 \end{cases}$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ και $z \in \mathbb{C}$.

i) Να βρείτε το α .

ii) Αν $\alpha = 0$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z .

iii) Να δείξετε ότι $|z - 1 + 3i| \geq \frac{3}{4}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 73

α) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = xe^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$.

α_1) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

α_2) Να βρείτε το σύνολο τιμών της g καθώς και το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $g(x) = a$ για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

β) Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:
 $f''(x) + 2e^{-x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

Να δείξετε ότι $f(x) = g(x)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 74

Έστω f συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με f'' γνησίως φθίνουσα για την οποία ισχύει: $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ και $f'(\beta) < 0 < f(\beta)$.

Να αποδείξετε ότι:

- i) υπάρχει ακριβώς ένα σημείο καμπής στη γραφική παράσταση C της f .
- ii) η f έχει ολικό μέγιστο σε σημείο με τετμημένη $x_0 \in (\xi, \beta)$, όπου ξ η τετμημένη του σημείου καμπής της f .

Άσκηση 75

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$f(x-\psi) = f(x) - f(\psi) - 1$ για κάθε $x, \psi \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+1}{x} = 2$.

α) Αν $|z-1|f(x) + |z-1| \leq \eta \mu 2x$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου z μιγαδικός αριθμός,

α_1) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο (c) των εικόνων του z .

α_2) αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 ικανοποιούν την (1) και $|z_1 - z_2| = 2$, να δείξετε ότι $|z_1 + z_2| = 2$.

β) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 2$ και να βρείτε τον τύπο της f .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

γ) Αν $f(x)=2x-1$, $x \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε:

γ₁) το ολοκλήρωμα $g(t)=\int_0^t \frac{f(x)}{e^x} dx$ και

γ₂) τα όρια: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{f(x)}{e^x} dx$ και $\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_0^t \frac{f(x)}{e^x} dx$

δ) να δείξετε ότι η εξίσωση $g(t)=0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1+2\rho_2>1$.

Άσκηση 76

Έστω η συνεχής συνάρτηση f' για την οποία ισχύουν:

$(f'(x))^2 - 2f'(x) + \frac{1}{x^2+1} = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f'(1)>1$, $f'(-1)<1$ και $f(0)=1$.

α) Να δείξετε ότι: i) $f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$ και ii) $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.

γ) Αν $g(x)=\ln f(x)$, $x \in \mathbb{R}$,

γ₁) να δείξετε ότι $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$

γ₂) να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$.

iv) Να δείξετε ότι ισχύει: $g(x) > \frac{f(x)-x-1}{x}$ για κάθε $x>0$.

Άσκηση 77

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-|z|}{x-1} + \alpha, & x < 1 \\ |w+i|-1, & x = 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}, & x > 1 \end{cases}$

όπου $z, w \in \mathbb{C}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής,

α_1) να δείξετε ότι $\alpha=0$ και να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους $(c_1), (c_2)$ των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z, w αντίστοιχα.

α_2) να βρείτε την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή του μέτρου $|z-w|$.

α_3) Αν $A(w_1), B(w_2)$ σημεία του (c_2) με $|w_1-w_2|=6$, να δείξετε ότι $|w_1+w_2|=2$.

β) Αν $|z|=1, |w+i|=3$ και $\alpha=0$, να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x=4$.

Άσκηση 78

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - x + 4} + \alpha x + \beta, & x \geq 0 \\ \frac{\eta \mu x}{x} + |w+i|, & x < 0 \end{cases}$

συνεχής στο 0, για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

i) Να δείξετε ότι $\alpha = -\beta = -1$.

ii) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων M του μιγαδικού αριθμού w .

iii) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

iv) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Άσκηση 79

i) Να βρείτε την τιμή του α , όπου $\alpha = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+1-3x^2+2}{2x^2-1-3x^2+1}$.

ii) Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών β και ℓ

αν ισχύει: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^3 - x^2 + \beta}{x^2 - 3x} = \ell$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

iii) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 - 18}{x^2 - 3x} & , x > 3 \\ \frac{\eta\mu^2(x-3) + x^3 + \gamma}{x^2 + 1} & , x \leq 3 \end{cases}$

1.) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό γ , ώστε f συνεχής στο $x_0=3$.

2.) Αν $\gamma=43$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία $\psi-2011=0$.

iv) Αν $E(x) = \int_4^x f(t) dt$, να δείξετε ότι η εξίσωση $E(x)=2012$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(4, +\infty)$.

Άσκηση 80

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $f''(x) - f(x) = (4x+2) \cdot e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = f'(0) = 0$.

i) Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 \cdot e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε τις ασύμπτωτές της, όπου αυτές υπάρχουν.

iii) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-1, 1)$ τέτοια, ώστε $f''(\xi_1) \cdot f''(\xi_2) = 3$.

iv) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{x-1}^x f(t) dt$.

Άσκηση 81

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x \cdot e^x + \alpha, \quad g(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g δέχονται σε κοινό τους σημείο κοινή εφαπτομένη (ε) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

i) Να βρείτε τις τιμές των α και β , καθώς και την εξίσωση της κοινής τους εφαπτομένης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

ii) Αν $\alpha=0$, $\beta=\frac{-3}{2}$ και $\varepsilon: \psi=x$, να βρείτε:

α) το εμβαδό E_1 του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , την (ε) και την ευθεία με εξίσωση $x=t$, $t>0$ και

β) το εμβαδό E_2 του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της g , την (ε) και την ευθεία με εξίσωση $x=t$, $t>0$.

iii) Να δείξετε ότι $E_1(t) < E_2(t) + t \cdot e^t$ για κάθε $t>0$.

Άσκηση 82

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής για την οποία ισχύει $\int_0^{-1} f(x) dx = 1$.

$$\text{Επίσης, έστω η συνάρτηση } g(x) = \begin{cases} \int_{-1}^x f(t) dt + |w-1|, & x \leq 0 \\ \frac{x^3 + 2(|z|-1)x^2}{\eta\mu^2 x + x^2}, & x > 0 \end{cases} \quad \text{με } g(-1)=1,$$

όπου z, w μιγαδικοί αριθμοί με εικόνες που ανήκουν σε ίσους κύκλους $(c_1), (c_2)$ με κέντρα $K_1(0,0)$ και $K_2(1,0)$ αντίστοιχα.

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, να δείξετε ότι:

i) $|z|=|w-1|=1$

ii) $f(0) = \frac{1}{2}$

iii) υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1, \pi)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = \frac{\pi-1}{\pi+1}$

iv) να εξετάσετε αν η g' είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Άσκηση 83

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύουν: $f(1)=2012$, $f(2)=2015$ και $f'(x) \neq 1$ για κάθε $x \in [1,2]$.

Επίσης, έστω η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$, $x \in [1,2]$. Να δείξετε ότι:

i) υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=2012$.

ii) υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,2)$ τέτοια, ώστε $\frac{1}{g'(\xi_1)} + \frac{1}{g'(\xi_2)} = 1$.

iii) $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) + 1 = 2(f'(\xi_1) + f'(\xi_2) - 1)$.

iv) η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 84

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(a) < 0, a \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της f σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=10$ χωρίο με εμβαδό 12 τ.μ.

Επίσης, δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \int_1^x f(t) dt, x \in [0, 10]$.

Να δείξετε ότι:

i) υπάρχουν ξ_1, ξ_2 και $\xi_3 \in (0, 10)$ τέτοια, ώστε να ισχύει

$$3f(\xi_1) + 4f(\xi_2) + 8f(\xi_3) = -18.$$

ii) η εξίσωση $f(x) + \frac{6}{5} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 10)$.

iii) υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, 10)$ τέτοιο, ώστε $g(\xi) + 6 = g(0)$.

iv) Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = \int_1^x g(t) dt, x \in [0, 10]$.

Να μελετήσετε την συνάρτηση φ ως προς τα κοίλα και να δείξετε ότι ισχύει: $\varphi(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [0, 10]$.

Άσκηση 85

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

για τις οποίες ισχύει $x \cdot e^{-x} \cdot f'(x) = \alpha x(g(x) + g'(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(0, f(0))$

έχει εξίσωση $\psi = (g'(0) - 2) \cdot x + g(0) + 3$. Επίσης, δίνεται το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) + 2}{x} = 3$.

Να δείξετε ότι:

i) $g(0) = -2$ και $g'(0) = 3$

ii) $f(x) = e^x \cdot g(x) + 3, x \in \mathbb{R}$.

iii) Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x) - 3) \cdot (\sin x - 1)}{x^2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 86

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$x \cdot e^{-x} \cdot f'(x) = ax + ax^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(0, f(0))$ έχει εξίσωση $\psi = 2x + 1$.

Να δείξετε ότι:

i) $f(x) = 2xe^x + 1, x \in \mathbb{R}$.

ii) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \kappa$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του κ .

Άσκηση 87

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[0, 13]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 13)$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, 13]$ και $f(a) > 0$ για κάποιο $a \in [0, 13]$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 13]$.

ii) υπάρχει $\xi \in (0, 13)$ τέτοιο, ώστε $13 \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \ln \left(\frac{f(13)}{f(0)} \right)$.

iii) υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in (0, 13)$ τέτοια, ώστε $4 \frac{f'(x_1)}{f(x_1)} + 9 \frac{f'(x_2)}{f(x_2)} + 13 \frac{f'(x_3)}{f(x_3)} = 26 \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}$.

Άσκηση 88

Έστω συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο στο $[0, 2]$.

Αν είναι $f(0) + 4 < f(2) < f(1) + 2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη σε αυτό να είναι κάθετη στην ευθεία $\delta: x + 2\psi + 2012 = 0$.

Άσκηση 89

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$x \cdot f'(x) = (x+1) \cdot f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(0, f(0))$ έχει εξίσωση $\psi = 2x$.

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 90

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x+\psi) \leq f(x) \cdot f(\psi) \text{ για κάθε } x, \psi \in \mathbb{R},$$

$$f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, f(0) \leq 1 \text{ και } f'(0) = 2.$$

i) Να δείξετε ότι $f'(x) = 2f(x), x \in \mathbb{R}$.

ii) Να βρείτε τον τύπο της f .

iii) Να λυθεί η εξίσωση $f(\ln x) - f(x^2 - x) = 0, x > 0$.

Άσκηση 91

Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, όπου g παραγωγίσιμη,

για τις οποίες ισχύουν: $f(0) = g(0)$ και

$$f(x) - f(\psi) - g(x) + g(\psi) + e^x - e^\psi \leq (x - \psi)^2 \text{ για κάθε } x, \psi \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι:

$$\alpha_1) |f(x) - f(\psi) - g(x) + g(\psi) + e^x - e^\psi| \leq (x - \psi)^2 \text{ για κάθε } x, \psi \in \mathbb{R}.$$

$$\alpha_2) \text{ η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη με } f'(x) = g'(x) - e^x, x \in \mathbb{R}.$$

β) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0, x=t, t < 0$.

Άσκηση 92

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,

για την οποία ισχύει $f''(x) = 4e^x + 2xe^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επίσης, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(0, f(0))$ έχει εξίσωση $\psi = 2x - 1$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 93

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\left(\int_1^x f(t) dt - x^2 \ln x \right) \cdot (f(x) - 2x \ln x - x) = x - 1, \quad x \geq 1 \text{ και } \int_1^e f(t) dt = e^2 + e - 1.$$

- i) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .
- ii) Αν $f(x) = 2x \ln x + x + 1, x \geq 1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τα κοίλα.
- iii) Να βρείτε το εμβαδό $E(\Omega)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1, x=e^2$.
- iv) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ευθεία με εξίσωση $x=t$ που χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Άσκηση 94

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\alpha) < f'(x) < f(\beta)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\beta = \alpha + 1$ και $\alpha > 0$.

Να δείξετε ότι:

- 1) η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
- 2_α) η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x \cdot f(\alpha)$ είναι γνησίως αύξουσα.
- 2_β) ισχύει $f(\alpha) < \frac{f(\beta)}{2}$.
- 3) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 1 λύση στο $(-\beta, \alpha)$.
- 4) υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει

$$\frac{f(\beta)}{f'(x_3)} + \frac{f(\alpha)}{f'(x_2)} - 2 \frac{f(-\beta)}{f'(x_1)} + 1 = 4\beta.$$

Άσκηση 95

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(x\psi) = f(x) \cdot f(\psi) \text{ για κάθε } x, \psi > 0, f(0) = 0, f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

και f παραγωγίσιμη στο ξ με $\xi > 0$.

α. Να δείξετε ότι:

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

$\alpha_1)$ $f(1)=1$ και $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x>0$.

$\alpha_2)$ $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\geq 0$.

$\alpha_3)$ f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $\frac{x\cdot f'(x)}{f(x)}=\frac{\xi\cdot f'(\xi)}{f(\xi)}$ για κάθε $x>0$.

$\beta.$ Αν η ευθεία $\varepsilon: x-2\sqrt{\xi}\cdot y+\xi=0$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, να βρείτε τον τύπο της f .

$\gamma_1)$ Αν $f(x)=\sqrt{x}$, $x\geq 0$, να βρείτε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη (ε) και τον άξονα $x'x$.

$\gamma_2)$ Να βρείτε το $a\in(-\xi, \xi)$ τέτοιο, ώστε η $x=a$ να χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισοεμβαδικά χωρία.

Άσκηση 96

Έστω μια συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

για την οποία ισχύουν: i) $f'(0)=a$ και η εφαπτομένη στο σημείο $M(0,1)$

της γραφικής παράστασης της f σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία αμβλεία,

ii) $f(x+h)\leq f(x)\cdot f(h)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και iii) $f''(x)+f'(x)=2f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

1. Να δείξετε ότι: $f'(x)=-2f(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

2. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

3. Το εμβαδό $E(\kappa)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της στο σημείο M , τον άξονα $x'x$

και την ευθεία με εξίσωση $x=\kappa$, όπου $\kappa>\frac{1}{2}$.

4. Να βρείτε το $\lim_{\kappa\rightarrow+\infty} E(\kappa)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 97

Έστω συνάρτηση $f_{\alpha}(x)=(\alpha-1)\ln x+\alpha x+(\alpha+1)$, $x>0$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f_{α} , για τις διάφορες τιμές του α , διέρχονται από σταθερό σημείο M , με τετμημένη $\xi\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$.

β) Να βρείτε την τιμή του α , συναρτήσει του ξ , για την οποία η ευθεία OM εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f_{α} στο M , όπου O η αρχή των αξόνων και να δείξετε ότι ισχύει $\alpha\in\left(\frac{3e}{e+1},\frac{3e+1}{e}\right)$.

Άσκηση 98

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^{\mu}\cdot(x-2)^{\nu}$ και $g(x)=x^3+\frac{\mu}{2}x^2+\nu x+1$, $x\in\mathbb{R}$, όπου $\mu,\nu\in\mathbb{N}$ με $\mu,\nu\geq 2$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $M(1,g(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) με εξίσωση $\psi=11x+2012$.

α) Αν η f έχει μοναδικό ακρότατο σε σημείο x_0 , να δείξετε ότι οι μ, ν είναι περιττοί ακέραιοι.

β) Αν επιπλέον η f έχει ακρότατο στο $x_0=\frac{3}{4}$,

β_1) να βρείτε τους αριθμούς μ, ν και

β_2) αν $\mu=3$ και $\nu=5$, να δείξετε ότι:

i) η γραφική παράσταση της f έχει τέσσερα σημεία καμπής A,B,Γ,Δ με τετμημένες $x_1<x_2<x_3<x_4$ αντίστοιχα.

ii) δύο από τα σημεία καμπής ανήκουν στον άξονα $x'x$.

iii) ισχύει $x_2<x_0<x_3$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 99

Έστω συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - \sqrt{2x+3}}{x-3} = \lambda, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε την τιμή $f(3)$.

ii) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 3 και να βρείτε την $f'(3)$ συναρτήσει του λ .

iii) Αν $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(f(x)) - \sqrt{2f(x)+3}}{x-3} = \frac{4}{3}$ και η εφαπτομένη στο σημείο $M(3, f(3))$

σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega > 90^\circ$, να δείξετε ότι $\lambda = \frac{-4}{3}$ και να βρείτε τη γωνία ω .

Άσκηση 100

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{|w-1|}{x+1}, x \neq -1 \text{ και } g(x) = x^2 - (|z| - |z-1+i| + 1) \cdot x + 1, x \in \mathbb{R}, w, z \in \mathbb{C}.$$

Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν σε κοινό σημείο $A(0, \psi_A)$ κοινή εφαπτομένη (δ),

α) να δείξετε ότι:

α_1) ο γεωμετρικός τόπος c_1 των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w είναι κύκλος, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

α_2) ο γεωμετρικός τόπος c_2 των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z είναι ευθεία (ε), της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

α_3) υπάρχουν ακριβώς δύο σημεία, έστω M, N , τέτοια ώστε $z=w$.

α_4) $|w_1|^2 + |w_2|^2 = 4$, όπου $M(w_1), N(w_2)$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής τους εφαπτομένης (δ) και να δείξετε ότι $\varepsilon \perp \delta$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 101

Έστω f μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{0\}$ για την οποία

ισχύουν: $f(0)=0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-x}{\eta\mu x} = 2011$ και $\frac{f''(x)}{e^x - 1} > 0$ για κάθε $x \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τα κοίλα και να δείξετε ότι έχει σημείο καμπής την αρχή των αξόνων.

γ) Να δείξετε ότι: $f(x) \leq 2012x$ για κάθε $x \leq 0$ και $f(x) \geq 2012x$ για κάθε $x \geq 0$.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

ε) Να δείξετε ότι ισχύει: $\int_0^x f(u) du \geq 1006x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 102

Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$(f'(x)+1) \cdot e^{-x} + f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = \ln 2$.

i) Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x)+1 = \frac{e^x}{1+e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln(1+e^x) - x$, $x \in \mathbb{R}$.

iii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.

iv) Να δείξετε ότι ισχύει: $2f(x) + x \geq 2\ln 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

iv) Να βρείτε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Άσκηση 103

Έστω συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο $[0, +\infty)$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν:

$f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, $4f''(x) \cdot (f(x))^3 = -1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

και $2f'(1) = f(1) = 1$.

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

β₁) Αν $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, να βρείτε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη (ε) και τον άξονα $x'x$.

β₂) Να βρείτε το $a \in (-\xi, \xi)$ τέτοιο, ώστε η $x=a$ να χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισοεμβαδικά χωρία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 104

Έστω συνάρτηση $f : (e, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

$$f(e^2)=3 \text{ και } f'(e^x) \cdot (x-1)^2 + 2e^{-x} = 0 \text{ για κάθε } x > 1.$$

i) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

ii) Αν $f(x) = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$, $x > e$

α) να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.

β) να δείξετε ότι ισχύει $e^2 f(x) + 2x \geq 5e^2$ για κάθε $x \in (e, +\infty)$.

γ) να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης f .

δ) να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

iii) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη, να υπολογίσετε την f^{-1} και να βρείτε τις ασύμπτωτές της.

iv) Να δείξετε ότι : $\int_{e^2}^{e^3} f(x) dx + \int_3^2 f^{-1}(x) dx = 2e^3 - 3e^2$.

Άσκηση 105

Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) > 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, f(-1)=2 \text{ και } f'(x) \cdot (f(x)+x) = 1 - f(x), x \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

β) Αν $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} - x$, τότε:

β₁) να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β₂) να βρείτε τις ασύμπτωτες της f .

β₃) να δείξετε ότι $f(x) > -2x - 1$ για κάθε $x \in (-\infty, -1]$.

γ) Να δείξετε ότι:

γ₁) η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την συνάρτηση f^{-1} .

γ₂) Να δείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $\psi = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ είναι η ασύμπτωτη της f^{-1} στο $+\infty$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 106

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$1+f(x)+f^3(x)=e^x-\frac{x^2}{2}-x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.

β) Να αποδείξετε ότι :

β₁) η συνάρτηση f είναι συνεχής.

β₂) η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\frac{e^x-x-1}{1+3f^2(x)}, x \in \mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x - \eta \mu x}$.

Άσκηση 107

Έστω f μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f''(x) - f'(x)e^x = f(x)e^x - f'(x), x \in \mathbb{R}.$$

Η $\psi=e$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(0, f(0))$.

α) Να δείξετε ότι $f(0) - e = f'(0) = 0$.

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

γ) Αν $f(x) = e^{e^x - x}, x \in \mathbb{R}$, τότε:

γ₁) να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.

γ₂) να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

δ) Αν $g(t) = \int_0^{\ln t} \frac{f(x) \cdot (e^{2x} - 1)}{e^x + 1} dx$, τότε:

δ₁) να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

δ₂) να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.

δ₃) να βρείτε το σύνολο τιμών της g .

Άσκηση 108

Έστω f μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία

$$\text{ισχύει: } f(0) = f'(0) = 2 \text{ και } f''(x) + 6x = f'(x) + 3x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

β) Αν $f(x) = 2e^x - x^3, x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει δύο σημεία καμπής με θετικές τετμημένες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 109

Έστω f μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$,

για την οποία ισχύει: f' συνεχής στο $x_0=0$ και

$$3xf'(x) + x^2 f''(x) + f(x) = \sin x - x \cdot \eta\mu x \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

$$\beta) \text{ Αν } f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 1, & x=0 \end{cases}$$

β_1) να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία

β_2) να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και

β_3) ισχύει $\pi^2 \eta\mu x \leq -4x^2 + 4\pi x$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Άσκηση 110

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$

με $f'(x) = 2\ln x + \frac{f(x)}{x}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, της οποίας η γραφική

παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(1, 2)$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f .

β) Αν $f(x) = x(\ln x)^2 + 2x$, $x \in (0, +\infty)$,

β_1) να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.

β_2) να δείξετε ότι ισχύει: $ef(x) \leq ex + 2$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right]$ και

$ef(x) \geq ex + 2$ για κάθε $x \in \left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

γ) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη (ε) στο σημείο καμπής της f και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$, $x=e$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 111

Έστω f μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(0)=f'(1)=0$, $f\left(f'(x^2)\right) \geq (x-1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και f'' γνησίως αύξουσα. Να αποδείξετε ότι:

- i) η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής.
- ii) ισχύει $f(x) \leq f(1)$ για κάθε $x \leq 1$ και $f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x \geq 1$.

Άσκηση 112

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f(1)=0$, $f'(1)=e$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^{-x} \cdot f''(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \text{ για κάθε } x \in (0,+\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = e^x \cdot \ln x$, $x \in (0,+\infty)$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x \cdot \ln x = (-x+e)^3$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(1, e)$.

Άσκηση 113

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(1)=0$.

Επίσης, έστω η συνάρτηση $g(x) = \int_1^x f(t) \ln t dt$, $x > 0$.

α) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f .

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το πρόσημο της g .

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τα κοίλα και να βρείτε το σημείο καμπής.

δ) Αν επιπλέον ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + \eta \mu x) = +\infty$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} f(t) \ln t dt$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 114

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με $f(1)=e$, για την οποία ισχύουν:

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$
- $f(x) \geq ex$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$
- $x^2 f''(x) + f'(x) = 2f(x)$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$

α) Να δείξετε ότι:

$\alpha_1) f'(1) = e$

$\alpha_2)$ η συνάρτηση $g(x) = x^2 f'(x) - (2x-1)f(x)$, $x \in (0,+\infty)$ είναι σταθερή και να βρείτε το τύπο της.

$\alpha_3)$ ισχύει $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να δείξετε ότι:

$\gamma_1)$ η εξίσωση $2x \ln x = 4x - 1$ είναι ισοδύναμη της εξίσωσης $f(x) = e^4$.

$\gamma_2)$ η εξίσωση $2x \ln x = 4x - 1$ έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες.

Άσκηση 115

Δίνεται η συνάρτηση $f:[-2,2]\rightarrow\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[-2,2]$ για την οποία ισχύουν: $f(0) < f(2) < 2 < f(-2)$, f' κοίλη στο $[-2,2]$ και $f'(2) = 0$.

Να δείξετε ότι:

i) υπάρχει $x_0 \in (-2,2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 2$.

ii) υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-2,2)$ τέτοιοι, ώστε $\frac{f(2)-2}{f'(\xi_1)} + \frac{2-f(-2)}{f'(\xi_2)} = 4$.

iii) υπάρχει $x_1 \in (-2,2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1) = 0$.

iv) η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

v) υπάρχουν $\rho_1, \rho_2 \in (-2,2)$ τέτοιοι, ώστε $3f'(\rho_1) + f'(\rho_2) < 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 116

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

$$f''(x) < f'(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, f'(0) = f(0) = 0.$$

α) Να δείξετε ότι:

$$\alpha_1) f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0).$$

$$\alpha_2) f(x) \leq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

β) Αν $g(x) = \ln \frac{f'(x)}{e^x}$, $x < 0$, να δείξετε ότι:

β₁) η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα .

$$\beta_2) \text{ υπάρχει } \xi \in (-2, -1) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi) - f''(\xi) = \left(\ln \frac{f'(-2)}{f'(-1)} + 1 \right) \cdot f'(\xi).$$

Άσκηση 117

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $w_1 = z - 2i$ και $w_2 = z - 4$ με $z \in \mathbb{C}$.

α) Αν οι εικόνες των μιγαδικών w_1 , w_2 ανήκουν σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 5$, να βρείτε τους μιγαδικούς z .

β) Αν $|w_1| = |w_2|$, να δείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών w_1 , w_2 και z κινούνται σε παράλληλες ευθείες και στη συνέχεια, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $|w_1| + |w_2|$.

γ) Αν $|w_1| = 3$, να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|w_2|$.

Άσκηση 118

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

$$f(0) = -\frac{1}{2}, f(0) + f(1) = 0 \text{ και } f(x) \neq e^x + x - 1, f(x) \neq x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι ισχύει $x - 1 < f(x) < e^x + x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

γ) Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$.

δ) Αν $f'(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 119

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2 + (|z-1|-1)x - |2z+1|}{x^2 - x}$, $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0, 1$

και $z \in \mathbb{C}$, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \ell$, όπου $\ell \in \mathbb{R}$.

Επίσης, δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $w = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$.

- i) Να δείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού z ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα ρ .
- ii) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w .
- iii) Να δείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο σημεία A, B , τέτοια, ώστε $z = w$.
- iv) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $ΟΑΚΒ$ είναι ρόμβος, όπου $Ο$ η αρχή των αξόνων.

Άσκηση 120

Έστω οι συναρτήσεις g, h ορισμένες στο $[0, +\infty)$,
 g δύο φορές παραγωγίσιμη, για τις οποίες ισχύουν:

$$g'(0) = 0, g(0) = 1, g(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty),$$

$$g''(x) \cdot g(x) > (g'(x))^2 + g'(x) \cdot g(x) \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty)$$

$$\text{και } h(x) \cdot g(x) = g'(x), x \geq 0.$$

Επίσης, δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = x \cdot h(x) - \ln g(x)$, $x \geq 0$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να δείξετε ότι ισχύει:

$$\beta_1) \varphi(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty) \text{ και}$$

$$\beta_2) (g(2011))^{2012} < (g(2012))^{2011}.$$

γ) Να δείξετε ότι ισχύει: $2 \ln g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq \ln g(\alpha) + \ln g(\beta)$ για κάθε $\alpha, \beta \geq 0$.

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot h(x) - 2x^2 + 3x) = 13$, να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h στο $+\infty$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 121

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο $(0, +\infty)$ για την οποία

$$\text{ισχύει: } f(x) = \ln x \cdot \int_1^x \frac{f(x)}{2} dx + \frac{1}{2x}, \quad x > 0.$$

i) Να δείξετε ότι: $f(x) = \frac{x \ln x + 1}{2x}, \quad x > 0.$

ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

iii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

iv) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $\ln \sqrt{x} + \frac{1}{2x} = \kappa$,

για τις διάφορες πραγματικές τιμές του κ .

Άσκηση 122

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$,

για την οποία ισχύουν: $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, $f'(1) = f(1) = 1$ και

$$x f''(x) - f(x) = f'(x) \cdot (x \ln x + x) \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

α) Να δείξετε ότι:

α_1) η συνάρτηση $g(x) = f'(x) - (\ln x + 1) \cdot f(x)$, $x \in (0, +\infty)$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της.

α_2) ισχύει $f(x) = x^x$, $x > 0$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να δείξετε ότι ισχύει $x = a^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow f(x) = a$, $x > 0$, όπου a πραγματικός θετικός αριθμός και στη συνέχεια, να βρείτε το πλήθος των λύσεων

της εξίσωσης $x = a^{\frac{1}{x}}$ για τις διάφορες τιμές του a .

δ) Να δείξετε ότι: $2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \leq f(\alpha) + f(\beta)$ για κάθε α, β με $\alpha, \beta > 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 123

Έστω συνάρτηση $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν: $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ και $f'(1) = f(0) + f(1)$. Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση f έχει μέγιστο και ελάχιστο εκ των οποίων το ένα τουλάχιστον παρουσιάζεται στο σημείο $x=0$ ή στο $x=1$.

β) είναι $f(0) > 0$.

γ) υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) η εξίσωση $f'(x) = f(1)$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,1)$.

Άσκηση 124

A. Έστω οι αντίστροφες συναρτήσεις f και f^{-1} με $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ και $f^{-1} : f(\Delta) \rightarrow \mathbb{R}$.

Αν η συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(\Delta)$, να δείξετε ότι:

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο Δ με

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))}, \quad x \in \Delta.$$

B. Δίνονται οι αντίστροφες συναρτήσεις f και f^{-1} για τις οποίες ισχύουν:

○ η f^{-1} είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f^{-1}(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

○ η f δεν έχει κρίσιμα σημεία

○ $f(x) = \int_2^{f(x)} f^{-1}(t) \cdot \ln f^{-1}(t) \cdot e^{-t} dt, \quad x \in (1, +\infty)$

β₁) Να δείξετε ότι: i) η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) \cdot (e^{f(x)} - x \ln x) = 0, \quad x > 1$

και ii) η f έχει τύπο $f(x) = \ln(x \cdot \ln x), \quad x > 1$.

β₂) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της $M(1, f^{-1}(1))$.

β₃) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^{2+\ln 2} f^{-1}(t) \cdot \ln f^{-1}(t) \cdot e^{-t} dt$.

β₄) Να βρείτε τα όρια: i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x}$ και ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_e^x f(t) dt$

β₅) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\ln x + 1}{x \cdot \ln x} = \frac{1 + \ln 2}{e^2 - e}$ έχει ακριβώς μία λύση στο (e, e^2)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 125

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη με f'' συνεχή στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

$$f'(0) - 2 = f(0) = 0 \text{ και } \int_a^b |f''(x) - (x+2)e^x| dx = 0 \text{ για κάθε } a, b \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι:

α_1) η συνάρτηση $g(x) = xf'(x) - f(x) - x^2e^x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή και να βρεθεί ο τύπος της.

α_2) ισχύει $f(x) = (e^x + 1) \cdot x$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα, τα σημεία καμπής και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να δείξετε ότι: $(\alpha + \beta) \cdot (e^{\frac{\alpha + \beta}{2}} + 1) \leq \alpha \cdot (e^\alpha + 1) + \beta \cdot (e^\beta + 1)$ για κάθε $\alpha, \beta \geq -2$.

Άσκηση 126

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$f'(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x_0) > 0$ για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Επίσης, δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \int_0^{x-x_0} f(x-t) dt$, $x \geq x_0$.

α) Να δείξετε ότι: η συνάρτηση $h(x) = f(x) \cdot e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$

είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq x_0$.

β) Να βρείτε το $f(A)$, όπου $A = [x_0, +\infty)$.

γ) Να δείξετε ότι:

γ_1) η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη και να βρεθεί η παράγωγός της.

γ_2) η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $[x_0, +\infty)$.

γ_3) ισχύει $\int_{x_0}^\alpha f(t) dt + \int_{x_0}^\beta f(t) dt > 2 \int_{x_0}^{\frac{\alpha + \beta}{2}} f(t) dt$ για κάθε $\alpha, \beta \in [x_0, +\infty)$ με $\alpha < \beta$.

γ_4) ισχύει $\int_0^{x-x_0} f(x-t) dt \geq f(x_0) \cdot (x - x_0)$ για κάθε $x \geq x_0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 127

Έστω συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη ,
όπου f κυρτή με $f'(\alpha) > 0$.

α) Να βρείτε το εμβαδό $E(t)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f ,
τη $\psi=f(t)$, όπου $t \in [\alpha, \beta]$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\alpha$, $x=\beta$.

β) Να δείξετε ότι:

β_1) το εμβαδό $E(t)$ γίνεται ελάχιστο για $t = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

β_2) υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $E''(\xi) > 0$.

β_3) ισχύει $2f'(\alpha) < E''\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < 2f'(\beta)$.

β_4) υπάρχουν ξ_1, ξ_2 τέτοια, ώστε να ισχύει

$$E''(\xi_1) + E''(\xi_2) = -\frac{6\left[E'\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) - E'\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)\right]}{\beta - \alpha}$$

Άσκηση 128

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = (x-2)e^x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα,
τα κοίλα, τα σημεία καμπής και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να δείξετε ότι η C_f έχει μοναδική ασύμπτωτη (δ).

γ_1) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της C_f στο σημείο καμπής της.

γ_2) Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta_{\mu x}}{\int_0^x (f(t)+t) dt}$.

δ_1) Να βρείτε το εμβαδό $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f ,
την εφαπτομένη (ϵ), την ασύμπτωτη (δ) και την ευθεία με εξίσωση $x=\alpha$,
όπου $\alpha \in (-4, -2)$.

δ_2) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\alpha \in (-4, -2)$ τέτοιο, ώστε $E(\alpha) = 1 - e^{-1}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 129

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

i) f γνησίως αύξουσα ii) $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ και iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Επίσης, δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = x \cdot \int_1^x f(xt) dt$, $x > 0$

για την οποία ισχύει $\varphi(1) = \varphi(10) - 9$.

α) Να δείξετε ότι η φ είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την παράγωγό της.

β) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (1, 10)$ τέτοιοι, ώστε να ισχύει $2f(2\xi_1) + 6f(2\xi_2) + 10f(2\xi_3) = f(\xi_1) + 3f(\xi_2) + 5f(\xi_3) + 9$.

γ) Να δείξετε ότι ισχύει: $\int_2^{10} f(x) dx < \int_4^{20} f(x) dx$.

δ) Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\eta \mu x + \int_1^x f(xt) dt \right)$.

Άσκηση 130

Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

i) $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Επίσης, δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \int_1^e \left[(f(t))^2 - 2x(\ln t)f(t) + x^2(\ln t)^2 \right] dt$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g έχει ελάχιστο στο σημείο $x_0 = \frac{\int_1^e \ln t \cdot f(t) dt}{e-2}$.

β) Αν η g έχει ελάχιστο στο $x_0 = \frac{2012}{e-2}$, να βρείτε το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_h , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=e$, όπου $h(x) = \ln x \cdot f(x)$.

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x = e^{\frac{\alpha}{f(x)}}$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(0, +\infty)$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α .

δ) Να δείξετε ότι ισχύει: $g(\ln x) + g(\ln \psi) \geq 2g\left(\frac{\ln(x\psi)}{2}\right)$ για κάθε $x, \psi > 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 131

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα, τα σημεία καμπής και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να δείξετε ότι ισχύει: $e^{\int_0^\alpha e^{t^2} dt} \cdot e^{\int_0^\beta e^{t^2} dt} > e^{\int_0^{\frac{2\alpha+3\beta}{5}} e^{t^2} dt}$, όπου $0 < \alpha < \beta$.

γ₁) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $K(x) = f(x) - e^x + e$, $x \in \mathbb{R}$.

γ₂) Να δείξετε ότι: i) $f(x) > e^x - e$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

ii) $f(x) \leq e^x - 1$, για κάθε $x \in (-\infty, 1)$.

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, x)$ με $x > 2$, ώστε: $\int_1^x f(t) dt > e^\xi - e$.

ε) Να βρείτε το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της K , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$, $x=1$.

στ) Να δείξετε ότι: $\int_1^e \sqrt{\ln x} dx + \int_0^1 f'(x) dx = e$.

Άσκηση 132

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(6)=9$ και $f(1)=4$, της οποίας η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ μόνο στο σημείο $x_0=3$.

Αν ισχύει $9e^{f(x)} - x^2 \geq f(x) - |z|(x^2 - 9)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $z \in \mathbb{C}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.

γ) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = \frac{2z+i}{2-iz}$, $z \neq -2i$

ανήκει στον ίδιο γεωμετρικό τόπο με αυτό των εικόνων του z .

δ) Να δείξετε ότι:

δ₁) υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 6)$ τέτοιοι, ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 1$.

δ₂) υπάρχουν $\rho_1, \rho_2 \in (1, 6)$ τέτοιοι, ώστε $\frac{2}{f''(\rho_1)} + \frac{3}{f''(\rho_2)} = \xi_2 - \xi_1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 133

Δίνονται οι συναρτήσεις $\Phi(x) = x^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$ και $G(t) = \frac{e^t - 1}{t}$, $t > 0$.

α. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης Φ .

β. Αν $e < \alpha < \beta$, να δείξετε ότι ισχύει: $\alpha^\beta > \beta^\alpha$.

γ₁. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $H(x) = \int_{x \ln 2}^x G(t) dt$,

και να δείξετε ότι $H(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

γ₂. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2012}{H(x) + \Phi(x)}$.

δ. Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο ζεύγη τιμών $x, \psi > 0$ για τα οποία ισχύει:

$$\Phi(-\ln x + x^2 + \sqrt{\psi}) + \Phi\left(\frac{ex^2}{\psi}\right) = 2e^{\frac{1}{e}}.$$

Άσκηση 134

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(0) = 1$ και $f'(0) = 0$, για την οποία ισχύει $f''(x) + 2f(x) + 2xf'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = e^{-x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β)) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα, τα σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln(\eta \mu x) + x^2 = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

δ) Επιπλέον δίνονται τα σημεία $A(x, 0)$, $B(x, f(x))$, $\Gamma(-x, f(x))$ και $\Delta(-x, 0)$, $x > 0$.

Να δείξετε ότι:

δ₁) το εμβαδό E του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ γίνεται μέγιστο στη θέση του σημείου καμπής με θετική τετμημένη και

δ₂) αν το σημείο A απομακρύνεται από τον άξονα $\psi'\psi$ με ρυθμό $2 \mu/sec$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ τη χρονική t_0 που το σημείο A διέρχεται από το σημείο καμπής της C_f .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 135

A) Έστω συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(0)=1$ και $f'(0)=2$, για την οποία ισχύει $f''(x)-f'(x)=-1$ για κάθε $x \geq 0$.

A₁) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=f'(x)-f(x)+x$, $x \geq 0$ είναι σταθερή.

A₂) Να δείξετε ότι : $f(x)=e^x+x$, $x \geq 0$.

B) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in [0, +\infty) \\ 1 & , x \in [-2, 0) \end{cases}$.

B₁) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής και όχι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

B₂) Επίσης, δίνεται η συνάρτηση $G(x)=\int_{-2}^x g(t)dt$, $x \geq -2$

Να βρείτε:

α) τον τύπο της συνάρτησης G .

β) το σύνολο τιμών της G .

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει : $2(e^\xi + \xi) = e^2 + 1$.

δ₁) Να δείξετε ότι η G είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$

δ₂) Να δείξετε ότι : $3 \int_{-2}^{\alpha} g(t)dt + \int_{-2}^{\beta} g(t)dt > 4 \int_{-2}^{\frac{3\alpha+\beta}{4}} g(t)dt$, όπου $\alpha \neq \beta$ με $\alpha, \beta \geq 0$.

Άσκηση 136

A. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[a, \gamma]$, $\beta \in (a, \gamma)$, $f(a) < f(\gamma)$ και f 1-1. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

B. Έστω συνάρτηση f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f^{(3)}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $0 < f'(2) < f'(1)$ και $f(x+1)+f(3-x)=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι: α₁) $f(2)=f''(2)=0$ και α₂) η f'' είναι γνησίως αύξουσα

β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

γ) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το πρόσημό της.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

ε) Να δείξετε ότι ισχύει: $\int_0^{x^2+2000} f(t)dt + \int_0^{x^2+2024} f(t)dt > 2 \cdot \int_0^{x^2+2012} f(t)dt$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 137

Δίνεται η συνάρτηση $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$, με $f(1)=0$, για την οποία ισχύει $f'(e^x) = e^x(1+2x)$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

Επίσης, δίνεται η συνάρτηση $g(x) = f(e^x) - xe^{2x}$, $x \geq 0$.

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή και να βρεθεί ο τύπος της.

ii) Να δείξετε ότι: $f(x) = x^2 \ln x$, $x \geq 1$

iii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και να δείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της $M(e^2, f^{-1}(e^2))$.

γ) Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{e^x}$.

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^e x^2 \ln x \, dx + 2 \int_0^1 x e^{3x} \, dx$.

Άσκηση 138

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως φθίνουσα

και η συνάρτηση $h(x) = \int_x^{x+1} f(u) \, du$, $x \in \mathbb{R}$.

Επίσης, δίνεται η συνάρτηση

$$G(x) = \int_0^x \left[t^2 - \left(\int_0^2 f(u) \, du \right) \cdot t + \left(\int_0^1 f(u) \, du \cdot \int_1^2 f(u) \, du \right) \right] dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να αποδείξετε ότι η G παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

γ) Αν η G έχει τοπικά ακρότατα στις θέσεις 4 και 9, να δείξετε ότι:

i) $\int_0^2 f(u) \, du = 13$

ii) υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi+1) - f(\xi) = -5$.

iii) υπάρχει $\rho \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $\frac{-G(\rho)}{\rho-1} = \rho^2 - 13\rho + 36$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 139

Η εικόνα M του μιγαδικού αριθμού z είναι το κοινό σημείο των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με εξισώσεις $\varepsilon_1: 5\psi = 4\kappa + 20$ και $\varepsilon_2: 5\kappa\psi = -4x + 20$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του κ με $\kappa \neq 0$.

α) Να δείξετε ότι:

$\alpha_1)$ Η εικόνα M του μιγαδικού z ανήκει σε έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{25} + \frac{\psi^2}{16} = 1$.

$\alpha_2)$ Ισχύει $|2\bar{z} + 6| + |-6i + 2\bar{z}i| = 20$ (1)

$\alpha_3)$ Ισχύει $0 \leq |z_1 - z_2| \leq 10$, όπου $M_1(z_1), M_2(z_2)$ εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 που ικανοποιούν τη σχέση (1).

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων N των μιγαδικών w

για τους οποίους ισχύει: $|w - 3|^2 + |w + 3|^2 = 36$.

γ) Να δείξετε ότι ισχύει: $|z - w|_{\min} = 1$ και $|z - w|_{\max} = 8$.

δ) Να βρεθούν οι μιγαδικοί z, w ώστε: $\delta_1) |z - w| = 1$ και $\delta_2) |z - w| = 8$

Άσκηση 140

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη με f'' συνεχή στο $(0, +\infty)$, για την οποία ισχύουν:

$f'(1) - 1 = f(1) = 0$ και $\int_a^{\beta} \left(f''(x) - \frac{2f(x)}{x^2} - 3 \right)^2 dx = 0$ για κάθε $a, \beta > 0$.

α) Να δείξετε ότι:

$\alpha_1)$ η συνάρτηση $g(x) = x^2 f'(x) - 2xf(x) - x^3$, με $x > 0$, είναι σταθερή και να βρεθεί ο τύπος της.

$\alpha_2)$ ισχύει $f(x) = x^2 \ln x, x > 0$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα, τα σημεία καμπής και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να δείξετε ότι: $\frac{(\alpha + \beta)^2}{2} \cdot \ln \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 \leq \alpha^2 \ln \alpha + \beta^2 \ln \beta$ για κάθε α, β με $\alpha, \beta \geq 1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 141

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f^3(x) + 2f(x) - 1 = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- α) Να δείξετε ότι η f είναι: i) συνεχής ii) παραγωγίσιμη
β) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την f^{-1} .
γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(2, f(2))$.
δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^2 f(x) dx$.

Άσκηση 142

Θεωρούμε τους μιγαδικούς z με $\left(\frac{2z}{z+3}\right)^v = 1, v \in \mathbb{N}^*, z \neq -3$.

- α) Να δείξετε ότι:
i) οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z ανήκουν σε κύκλο με κέντρο $K(1,0)$ και ακτίνα $\rho=2$.
ii) ισχύει $1 \leq |z-1+i| \leq 3$.
β) Αν $w = \bar{z} - 3i$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w .
γ) Να δείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $u = \frac{z-1}{2} - \frac{2}{z-1}$, $z \neq 1$ είναι φανταστικός.
δ) Να δείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών v , όπου $v = z - 1 - \frac{8}{z-1}$ (1), $z \neq 1$ ανήκουν σε έλλειψη. Στη συνέχεια, αν M_1, M_2 οι εικόνες των v_1, v_2 αντίστοιχα, που ικανοποιούν την σχέση (1) και O, M_1, M_2 συνευθειακά, όπου O η αρχή των αξόνων, να δείξετε ότι $4 \leq |v_1 - v_2| \leq 12$.

Άσκηση 143

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + \psi i$, $x, \psi \in \mathbb{R}$ και $\psi \neq 0$. Αν $w = \frac{\bar{z}}{z^2 - 1}$, $z \neq \pm 1$ και ισχύει w πραγματικός, να δείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z ανήκουν σε μία υπερβολή με εξαίρεση τις κορυφές της.

Στη συνέχεια, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών v ,

$$\text{αν } \left|v - \frac{2}{\sqrt{3}}i\right|^2 + \left|v + \frac{2}{\sqrt{3}}i\right|^2 = \frac{16}{3}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 144

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x & , x \in [0,1] \\ 1 + \ln x & , x \in (1, +\infty) \end{cases}$

A) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

B) Επίσης, έστω η συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $x \geq 0$

α) Να βρείτε:

α_1) τον τύπο της συνάρτησης F .

α_2) το σύνολο τιμών της F .

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $F(x) = \alpha^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, έχει ακριβώς 1 λύση στο $[0, +\infty)$.

γ) Να δείξετε ότι: i) η F είναι κυρτή και

ii) ισχύει $F(\ln x) + F(\ln x^2) > 2 F(\ln x^{\frac{3}{2}})$ για κάθε $x > 1$.

δ) Να αποδείξετε ότι: $\int_x^{x+10} F(t)dt < \int_{x+10}^{x+30} F(t)dt$ για κάθε $x \geq 0$.

Άσκηση 145

Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

• f γνησίως αύξουσα και g γνησίως φθίνουσα στο $[0, \alpha]$

• $\int_0^\alpha f(t)dt = \int_0^\alpha g(t)dt$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = \frac{\int_0^x f(t)dt}{x}$, $x \in (0, \alpha]$, είναι γνησίως αύξουσα

και η συνάρτηση $G(x) = \frac{\int_0^x g(t)dt}{x}$, $x \in (0, \alpha]$, είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να δείξετε ότι ισχύει:

β_1) $\int_0^x f(t)dt \leq \int_0^x g(t)dt$ για κάθε $x \in [0, \alpha]$.

β_2) $F(x) \leq G(x)$ για κάθε $x \in (0, \alpha]$.

β_3) $x \int_0^\psi g(t)dt \geq \psi \int_0^x f(t)dt$ για κάθε $x, \psi \in (0, \alpha]$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 146

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=2^x$ και $g(x)=-x^2+2x+1$.

α) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g που διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$.

β_1) Να δείξετε ότι η εξίσωση $2^x+x-1=0$, $x \in \mathbb{R}$ έχει ακριβώς μία λύση, την $x=0$.

β_2) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2-3x+2)=g(x)+x-2$.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια: i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+2)-e^{x+2}}{f(x)+e^x}$ ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x+2)-e^{x+2}}{f(x)+e^x}$

δ) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς 2 κοινά σημεία, τα $A(0,1)$ και $B(1,2)$.

ε) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{-1}^1 \frac{x^4+x^2+1}{f(x)+1} dt$.

Άσκηση 147

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha + f(\alpha)i$, $w = \beta + f(\beta)i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $0 < \alpha < \beta$.

α) Να δείξετε ότι: $\frac{z}{w} = \frac{1}{|w|^2} \left(\overline{OA} \cdot \overline{OB} + \left| \det(\overline{OA}, \overline{OB}) \right| i \right)$, όπου A, B οι εικόνες των μιγαδικών z, w αντίστοιχα και O η αρχή των αξόνων.

β) Αν $\frac{z}{w}$ πραγματικός, να δείξετε ότι:

i) υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) \cdot x_0 = f(x_0)$.

ii) υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Αν $\frac{z}{w}$ φανταστικός και $\int_{|z|^2}^{x-|w|^2} f(t+|w|^2) dt + x - |z|^2 \geq |w|^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

να δείξετε ότι:

i) $|z|^2 + |w|^2 = (\alpha - \beta)^2 + (f(\alpha) - f(\beta))^2$.

ii) $f(|z-w|^2) = -1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 148

α) Δίνονται οι εξισώσεις: $z^3+4z=3z^2+2$ (1) και $\frac{e^{z^3+4z}}{e^{3z^2+2}} + z^2+1 = 2z$ (2), $z \in \mathbb{C}$.

Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των δύο εξισώσεων.

β) Αν $z_1=1+i$, $z_2=1-i$ και $f(z)=\frac{z^2+4}{|z-2i|^2}$, $z \neq 2i$, να δείξετε ότι:

i) $f(z_1) f(z_2)=1$ ii) $|f(z)|=\frac{|z+2i|}{|z-2i|}$, $z \neq 2i$

iii) Αν επιπλέον $|f(z)|=\frac{10}{|z-2i|}-1$ (3), να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο

των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z και να δείξετε ότι ισχύει

$2\sqrt{21} \leq |z_3-z_4| \leq 10$, αν οι z_3, z_4 ικανοποιούν την σχέση (3) και M_3, M_4 οι εικόνες των z_3, z_4 αντίστοιχα με O, M_3, M_4 συνευθειακά σημεία, όπου O η αρχή των αξόνων.

Άσκηση 149

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_x = \alpha e^{\frac{x-1}{2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(x-2)i$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το μέτρο των μιγαδικών αριθμών z_x .

β) Να δείξετε ότι: $|z_x| \geq \sqrt{\frac{3}{2}}|\alpha|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Αν $|z_x| = \sqrt{\frac{3}{2}}|\alpha|$:

i) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z και

ii) να δείξετε ότι ισχύει $|z+1-\sqrt{2}i| \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

δ) Αν $\alpha=1$, να δείξετε ότι οι εικόνες των z_x κινούνται στη καμπύλη με εξίσωση

$$\psi = \frac{-1+2\ln x}{\sqrt{2}}, \quad x > 0.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 150

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
 $f(f(x)) + f(x) = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: i) υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 1$ και ii) $f(1) = 1$.

β) Να δείξετε ότι ισχύει $f(2 - f(x)) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι:

i) $f'(1) = -1$ ii) η συνάρτηση $g(x) = (f(x))^2 + 2 \int_1^{f(x)} f(t) dt$, $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή

και να βρείτε τον τύπο της.

iii) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 και να βρείτε τον τύπο της.

iv) Αν $\|f(z) - f(-z)\| = g(0)$, να δείξετε ότι οι εικόνες του z ανήκουν σε υπερβολή, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

Άσκηση 151

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

$f(x), g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) + g(x) = \frac{\alpha}{e^{x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

Επίσης, δίνεται η συνάρτηση $h(x) = \int_0^x \varphi(t) dt$, όπου $\varphi(t) = \int_0^t (f(u) + g(u)) du$, $x, t \in \mathbb{R}$

με $\varphi(2) = \frac{\alpha}{4}$.

A) Να δείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

B) i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση h είναι κυρτή.

ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ) Να αποδείξετε ότι: i) είναι $h(2) = \frac{\alpha}{2e^4}$ και ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

Δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln \frac{h(x)}{2012} = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0, +\infty)$.

E) Να αποδείξετε ότι: $\int_0^\alpha \varphi(t) dt + \int_0^\beta \varphi(t) dt \geq 2 \int_0^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \varphi(t) dt$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 152

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους ισχύουν:

$$\operatorname{Re}(z) \neq 0, z(\bar{z}^2 - 4) + \bar{z}(z^2 - 4) = 0 \text{ και } w = \bar{z} - \frac{8}{z} \quad (1), z \neq 0.$$

- i) Να δείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z ανήκουν σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=2$, από τον οποίο εξαιρούνται δύο σημεία του.
- ii) Να δείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w ανήκουν σε έλλειψη (c), από την οποία εξαιρούνται δύο σημεία της.
- iii) Αν w_1, w_2 δύο μιγαδικοί αριθμοί που ικανοποιούν την σχέση (1), να αποδείξετε ότι $|w_1 - w_2| < 12$.
- iv) Να αποδείξετε ότι:
 - α) ισχύει $0 \leq |z - w| < 8$
 - β) η ισότητα $|z - w| = 0$ ισχύει για $z = w = 2$ ή $z = w = -2$.

Άσκηση 153

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x-1} + 3, x \in \mathbb{R}$.

- α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .
- β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = x - \frac{7}{2}$ έχει δύο ακριβώς λύσεις.
- γ. Να μελετήσετε την f^{-1} ως προς τα κοίλα και να δείξετε ότι ισχύει $2f^{-1}(x) \leq x - 3$ για κάθε $x > 3$
- δ. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=4$ και $x=e+3$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Άσκηση 154

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(x) \neq -x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, f(0) < 0 \text{ και } \int_{|z+i|}^{4-|z-i|} (f(x)+x) dx = 0 \quad (1) \text{ με } |z-i| < 4.$$

i) Να δείξετε ότι ισχύει: $f(x) + x < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να δείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z ανήκουν σε έλλειψη.

iii) Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 ικανοποιούν την (1), να αποδείξετε ότι:

$$0 \leq |z_1 - z_2| \leq 4.$$

iv) Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 ισχύει $|z_1 - z_2| = 4$ και

$$|w - z_1|^2 + |w - z_2|^2 = 12, w \in \mathbb{C}, \text{ να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών αριθμών } w.$$

v) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $\sqrt{3} - \sqrt{2} \leq |z - w| \leq 2 + \sqrt{2}$.

Άσκηση 155

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη

$$\text{με } (f''(x) + 2f'(x) + f(x)) \cdot x^2 + e^{-x} = 0 \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } f'(1) + f(1) = 0, ef(1) = -1.$$

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

β) Αν $f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$, $x > 0$

i) να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii) να λύσετε την εξίσωση $\ln(x - \ln x) = \ln k + x$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του $k \in (0, +\infty)$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(f^2(x) \ln \frac{1}{f(x)} - f(x) \right).$

δ) Αν $g(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$, $x, \alpha > 0$

i) να αποδείξετε ότι ισχύει $g(2013x) + g(2011x) > 2g(2012x)$ για κάθε $x > 0$.

ii) να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} f(t) dt.$