

Άσκηση 15.

Τετραγωνικό αγωγίμο πλαίσιο πλευράς $\alpha = 0,1m$ έχει $N=100$ σπείρες αμελητέας αντίστασης και στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 200rad/s$ μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $B = 1T$, γύρω από άξονα που περνά από τα μέσα δύο απέναντι πλευρών του και είναι κάθετος στις δυναμικές γραμμές του πεδίου. Τη στιγμή $t=0$ το πλαίσιο είναι κάθετο στις γραμμές του πεδίου.

α) Να γράψτε τη χρονική εξίσωση της εναλλασσόμενης τάσης που δημιουργείται στα άκρα του πλαισίου και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση τάσης-χρόνου για το χρονικό διάστημα δύο περιόδων, δηλαδή από 0 έως $2T$.

β) Τα άκρα του πλαισίου συνδέονται με αντιστάτη αντίστασης $R = 100\Omega$.

β1) Να υπολογίσετε τη θερμότητα που εκλύεται στον αντιστάτη σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 4s$.

β2) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της στιγμιαίας ισχύος που απορροφά ο αντιστάτης και να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

γ) Κόβουμε τον αντιστάτη στη μέση και τα δύο κομμάτια τα συνδέουμε παράλληλα μεταξύ τους, εφαρμόζοντας στα άκρα του συστήματός τους την αρχική εναλλασσόμενη τάση. Να βρείτε τη θερμότητα που εκλύεται στο κύκλωμα σε χρονικό διάστημα $\Delta t' = 2s$.

Λύση

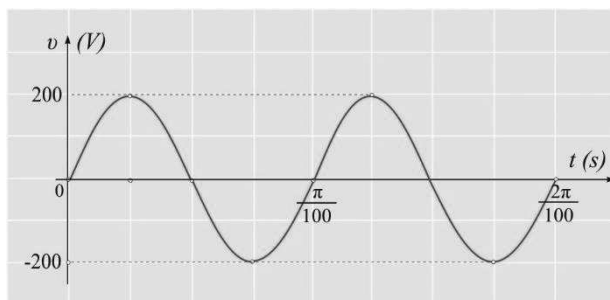
α) Το εμβαδόν του πλαισίου είναι $A = \alpha^2 = 10^{-2}m^2$.

Για το πλάτος της εναλλασσόμενης τάσης ισχύει:

$$V = N\omega BA = 100 \cdot \left(200 \frac{rad}{s}\right) \cdot (1T) \cdot (10^{-2}m^2) \Rightarrow V = 200V.$$

Άρα, η χρονική εξίσωση της εναλλασσόμενης τάσης είναι $v = 200\eta\mu 200t$ (SI).

Η περίοδος της εναλλασσόμενης τάσης είναι $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{100}s$ και η γραφική παράσταση τάσης-χρόνου δείχνεται στο διπλανό διάγραμμα.



β1) Η ενεργός τάση δίνεται από τη σχέση

$$V_{\varepsilon V} = \frac{V}{\sqrt{2}} = 100\sqrt{2}V$$

και η ενεργός ένταση

$$I_{\varepsilon V} = \frac{V_{\varepsilon V}}{R} = \frac{100\sqrt{2}V}{100\Omega} = \sqrt{2}A.$$

Άρα, η θερμότητα που εκλύεται στον αντιστάτη σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 4s$ είναι

$$Q = I_{\varepsilon V}^2 R \Delta t \Rightarrow Q = (\sqrt{2}A)^2 \cdot (100\Omega) \cdot (4s) \Rightarrow Q = 800J$$

β2) Η εξίσωση της στιγμιαίας έντασης είναι

$$i = \frac{V}{R} \Rightarrow i = 2\eta\mu 200t(SI) .$$

Για τη στιγμιαία ισχύ έχουμε: $p = \upsilon i \Rightarrow p = 400\eta\mu^2 200t(SI) .$

Γνωρίζουμε ότι: $-1 \leq \eta\mu 200t \leq 1$ οπότε: $0 \leq \eta\mu^2 200t \leq 1$ και $0 \leq 400\eta\mu^2 200t \leq 400 (SI) ,$
δηλαδή $0 \leq p \leq 400W .$

Άρα $p_{\min} = 0$ και $p_{\max} = 400W$

γ) Από τη σχέση $R = \rho \frac{l}{S}$ καταλαβαίνουμε ότι το κάθε κομμάτι θα έχει αντίσταση

$$R' = \frac{R}{2} = 50\Omega .$$

Η ολική αντίσταση των δύο αντιστατών είναι: $R_{\text{ολ}} = \frac{R'R'}{R'+R'} = 25\Omega$

$$I'_{\varepsilon V} = \frac{V_{\varepsilon V}}{R_{\text{ολ}}} = \frac{100\sqrt{2}V}{25\Omega} \Rightarrow I'_{\varepsilon V} = 4\sqrt{2}A$$

και $Q' = I'_{\varepsilon V}^2 R_{\text{ολ}} \Delta t' = (4\sqrt{2}A)^2 \cdot (25\Omega) \cdot (2s) \Rightarrow Q' = 1600J .$

Άσκηση 16.

Δύο αντιστάτες αντιστάσεων $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 30\Omega$ αντίστοιχα, συνδέονται σε σειρά και στα άκρα του συστήματός τους εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση που περιγράφεται από τη συνάρτηση $v = 200\sqrt{2}\eta\mu 100\pi t(SI)$.

α) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος, καθώς και τις χρονικές εξισώσεις της τάσης στα άκρα κάθε αντιστάτη ξεχωριστά.

β) Να υπολογίσετε τη μέση ισχύ που απορροφά το κύκλωμα.

γ) Να βρείτε το λόγο των θερμότητων που εκλύονται στους δύο αντιστάτες, στο ίδιο χρονικό διάστημα.

δ) Να υπολογίσετε τη στιγμιαία ισχύ που απορροφά το κύκλωμα τις χρονικές στιγμές στις οποίες η ένταση του ρεύματος γίνεται ίση με την ενεργό της τιμή.

Λύση

$$\alpha) R_{\text{ολ}} = R_1 + R_2 = 40\Omega$$

$$i = \frac{v}{R_{\text{ολ}}} \Rightarrow i = 5\sqrt{2} \eta\mu 100\pi t(SI), \text{ επίσης}$$

$$v_1 = iR_1 \Rightarrow v_1 = 50\sqrt{2} \eta\mu 100\pi t(SI) \text{ και}$$

$$v_2 = iR_2 \Rightarrow v_2 = 150\sqrt{2} \eta\mu 100\pi t(SI)$$

$$\beta) \text{ Γνωρίζουμε ότι } I_{\text{εφ}} = \frac{I}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \text{ A} \Rightarrow I_{\text{εφ}} = 5\text{ A}$$

$$\text{και η μέση ισχύς στο κύκλωμα είναι: } P = I_{\text{εφ}}^2 R_{\text{ολ}} = (5\text{ A})^2 \cdot (40\Omega) \Rightarrow P = 10^3 \text{ W}$$

$$\gamma) \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{I_{\text{εφ}}^2 R_1 \Delta t}{I_{\text{εφ}}^2 R_2 \Delta t} \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1}{3}$$

$$\delta) p = vi \Rightarrow p = i^2 R_{\text{ολ}} \text{ όταν } i = I_{\text{εφ}} = 5\text{ A τότε } p = (5\text{ A})^2 \cdot (40\Omega) \Rightarrow p = 10^3 \text{ W}.$$

Άσκηση 17.

Στα άκρα αντιστάτη αντίστασης $R = 100\Omega$ εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση $v = V\eta\mu\omega t$.

Τη χρονική στιγμή $t = \frac{7T}{6}$ η ένταση του ρεύματος είναι ίση με $i = \sqrt{3}A$.

α) Να βρείτε το πλάτος της εναλλασσόμενης τάσης.

β) Υπολογίστε τη θερμότητα που εκλύεται στον αντιστάτη σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 1 \text{ min}$.

γ) Υπολογίστε τη φάση της εναλλασσόμενης τάσης τη χρονική στιγμή που η στιγμιαία ισχύς του ρεύματος γίνεται ίση με το 50% της μέγιστης τιμής της για πρώτη φορά.

δ) Η τάση που τροφοδοτεί τον αντιστάτη παράγεται από αγωγίμο πλαίσιο αμελητέας αντίστασης που στρέφεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης μέτρου B με γωνιακή ταχύτητα ω . Διπλασιάζουμε ταυτόχρονα την ένταση του ομογενούς μαγνητικού πεδίου και τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του πλαισίου. Να βρείτε πόσο τοις εκατό (%) μεταβάλλεται η ενεργός τάση στα άκρα του αντιστάτη.

Λύση

α) Τα μεγέθη τάση και ένταση είναι συμφασικά μεγέθη οπότε $i = I\eta\mu\omega t$.

$$\text{Για } t = \frac{7T}{6} \text{ έχουμε } I\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T} \frac{7T}{6}\right) = \sqrt{3}A \Rightarrow I\eta\mu\frac{7\pi}{3} = \sqrt{3}A \Rightarrow I = 2A$$

$$\text{οπότε } V = IR \Rightarrow V = 200V.$$

$$\text{β) } Q = I_{\text{εφ}}^2 R \Delta t, \quad I_{\text{εφ}} = \frac{I}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}A, \text{ οπότε } Q = (\sqrt{2}A)^2 \cdot (100\Omega) \cdot (60s) \Rightarrow Q = 12 \cdot 10^3 J$$

$$\text{γ) } p = \upsilon i \Rightarrow p = i^2 R \Rightarrow p = I^2 \eta\mu^2 \omega t \cdot R \text{ και αφού } 0 \leq \eta\mu^2 \omega t \leq 1, \quad p_{\text{max}} = I^2 R.$$

$$\text{Ισχύει } p = \frac{50}{100} p_{\text{max}} \Rightarrow I^2 \eta\mu^2 \omega t \cdot R = \frac{I^2 R}{2} \Rightarrow \eta\mu\omega t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Οι λύσεις για την εξίσωση } \eta\mu\omega t = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ είναι:}$$

$$\omega t = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \text{ ή } \omega t = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \text{ με } \kappa \in \mathbb{N}.$$

$$\text{και για την εξίσωση } \eta\mu\omega t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ οι λύσεις είναι:}$$

$$\omega t = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \text{ ή } \omega t = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{4} \text{ με } \kappa \in \mathbb{N}.$$

Η πρώτη φορά αντιστοιχεί στη μικρότερη τιμή φάσης, οπότε επιλέγουμε $\omega t = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$ και

συνεπώς η φάση της τάσης είναι $\phi = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$.

δ) Αρχικά το πλάτος είναι $V = N\omega BA$.

Τελικά το πλάτος είναι

$$V' = N\omega' B'A = N(2\omega)(2B)A = 4N\omega BA$$

δηλαδή $V' = 4V$ άρα και $V'_{\varepsilon V} = \frac{V'}{\sqrt{2}} = \frac{4V}{\sqrt{2}} = 4V_{\varepsilon V}$.

Συνεπώς το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi\% = \frac{V'_{\varepsilon V} - V_{\varepsilon V}}{V_{\varepsilon V}} 100\% \Rightarrow \pi\% = 300\%$$

Άσκηση 18.

Στα άκρα ενός αντιστάτη αντίστασης R εφαρμόζεται η εναλλασσόμενη τάση $v = V\eta\mu 100\pi t (SI)$. Ο μέσος ρυθμός έκλυσης θερμότητας στον αντιστάτη είναι $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = 10^3 J/s$ και η τιμή της τάσης τη χρονική στιγμή $t = \frac{25T}{12}$ είναι $v = 100\sqrt{2}V$.

α) Να υπολογίσετε το πλάτος της εναλλασσόμενης τάσης και την τιμή της αντίστασης R .

β) Να βρείτε τη θερμότητα που εκλύεται στον αντιστάτη, στο χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της εναλλασσόμενης τάσης.

γ) Να βρείτε τη συνάρτηση που περιγράφει τη στιγμιαία ισχύ που καταναλώνει ο αντιστάτης σε σχέση με το χρόνο και να τη σχεδιάσετε σε αριθμημένους άξονες.

δ) Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές μέσα στην πρώτη περίοδο η στιγμιαία ισχύς ισούται με το μισό της μέγιστης τιμής της.

Λύση

α) Η εναλλασσόμενη τάση είναι $v = V\eta\mu\omega t$ και για $t = \frac{25T}{12}$ ισχύει

$$V\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{25T}{12}\right) = 100\sqrt{2}V \Rightarrow V\eta\mu\frac{25\pi}{6} = 100\sqrt{2}V \Rightarrow V\eta\mu\frac{\pi}{6} = 100\sqrt{2}V \Rightarrow V = 200\sqrt{2}V \text{ άρα}$$

$$V_{\varepsilon V} = \frac{V}{\sqrt{2}} = 200V.$$

Ο μέσος ρυθμός έκλυσης θερμότητας στον αντιστάτη είναι η μέση ισχύς. Άρα

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = I_{\varepsilon V}^2 R = \left(\frac{V_{\varepsilon V}}{R}\right)^2 R \Rightarrow \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{V_{\varepsilon V}^2}{R} \Rightarrow R = \frac{V_{\varepsilon V}^2}{(\Delta Q / \Delta t)} = \frac{(200V)^2}{10^3 J/s} \Rightarrow R = 40\Omega$$

β) Ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της τάσης είναι $\Delta t = \frac{T}{2}$,

$$\text{όπου } T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,02s, \text{ άρα } \Delta t = 0,01s.$$

$$\text{Ακόμη } I_{\varepsilon V} = \frac{V_{\varepsilon V}}{R} = \frac{200V}{40\Omega} \Rightarrow I_{\varepsilon V} = 5A.$$

$$\text{Άρα, } Q = I_{\varepsilon V}^2 R \Delta t \Rightarrow Q = (5A)^2 \cdot (40\Omega) \cdot (10^{-2}s) \Rightarrow Q = 10J$$

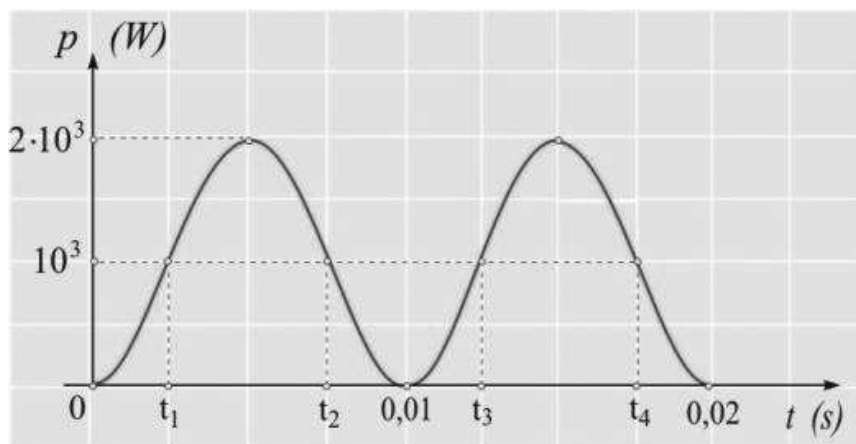
γ) Το πλάτος της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος είναι

$$I = I_{\varepsilon V} \sqrt{2} \Rightarrow I = 5\sqrt{2}A$$

Η εξίσωση της στιγμιαίας ισχύος είναι

$$p = vi = 200\sqrt{2} \eta\mu 100\pi t \cdot 5\sqrt{2} \eta\mu 100\pi t \Rightarrow p = 2 \cdot 10^3 \eta\mu^2 100\pi t \text{ (SI)}$$

Το διάγραμμα της στιγμιαίας ισχύος που καταναλώνει ο αντιστάτης σε σχέση με το χρόνο φαίνεται παρακάτω.



δ) Επειδή $0 \leq \eta\mu^2 100\pi t \leq 1$, $P_{\max} = 2 \cdot 10^3 \text{ W}$.

$$\text{Πρέπει } p = \frac{P_{\max}}{2} \Rightarrow \eta\mu^2 100\pi t = \frac{1}{2} \Rightarrow \eta\mu 100\pi t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Για $\eta\mu 100\pi t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, οι λύσεις είναι: $100\pi t = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ ή $100\pi t = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4}$ με $\kappa \in \mathbb{N}$. Για

$\eta\mu 100\pi t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ οι λύσεις είναι: $100\pi t = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4}$ ή $100\pi t = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{4}$ με $\kappa \in \mathbb{N}$.

Οι χρονικές στιγμές που είναι λύσεις των παραπάνω εξισώσεων και ανήκουν στο χρονικό διάστημα $[0, T]$ είναι:

$$t_1 = \frac{1}{400} \text{ s}, \quad t_2 = \frac{3}{400} \text{ s}, \quad t_3 = \frac{5}{400} \text{ s}, \quad t_4 = \frac{7}{400} \text{ s}.$$

Οι χρονικές στιγμές t_1, t_2, t_3, t_4 δείχνονται στο διάγραμμα ισχύος-χρόνου της ερώτησης (γ).

Άσκηση 19.

Με σύρμα μήκους $L=16m$ αμελητέας αντίστασης κατασκευάζουμε πλαίσιο με $N=10$ σπείρες. Κάθε σπείρα έχει σχήμα τετραγώνου πλευράς a . Το πλαίσιο στρέφεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $B=\sqrt{2}T$ με γωνιακή ταχύτητα $\omega=100rad/s$, γύρω από άξονα που διέρχεται από τα μέσα δύο απέναντι πλευρών του και είναι κάθετος στις δυναμικές γραμμές του πεδίου. Την αρμονικά εναλλασσόμενη τάση που αναπτύσσεται στα άκρα του πλαισίου την εφαρμόζουμε σε θερμική συσκευή με στοιχεία κανονικής λειτουργίας $120V$ και $100W$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το πλαίσιο είναι κάθετο στο μαγνητικό πεδίο.

α) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της μαγνητικής ροής που περνά από κάθε σπείρα του πλαισίου και να κάνετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση μαγνητικής ροής-χρόνου σε αριθμημένους άξονες.

β) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της εναλλασσόμενης τάσης.

γ) Να εξετάσετε αν η συσκευή λειτουργεί κανονικά. Αν όχι, να υπολογίσετε την αντίσταση R_x του αντιστάτη που πρέπει να συνδέσουμε σε σειρά με τη συσκευή, για να λειτουργήσει κανονικά.

δ) Να υπολογίσετε πόσο τοις εκατό (%) πρέπει να μεταβάλλουμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου, ώστε η συσκευή να λειτουργεί κανονικά, χωρίς την προσθήκη της R_x .

Λύση

α) Το μήκος του σύρματος και οι πλευρές του τετραγωνικού πλαισίου συνδέονται με τη σχέση, $L=N4a \Rightarrow a=0,4m$, οπότε το εμβαδόν κάθε σπείρας του πλαισίου είναι:
 $A=a^2=0,16m^2$.

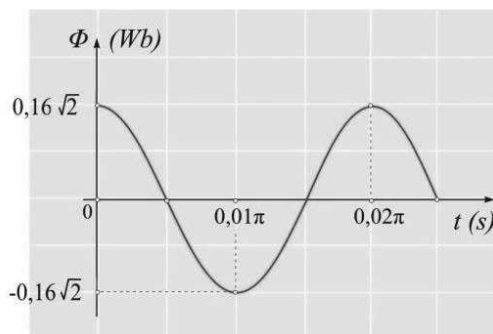
Η μαγνητική ροή που περνά από κάθε σπείρα του πλαισίου δίνεται από τη σχέση

$$\Phi = BA \sin \omega t \Rightarrow$$

$$\Phi = 0,16\sqrt{2} \sin 100t \text{ (SI)}$$

Η περίοδος μεταβολής της μαγνητικής ροής είναι

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{100 \text{ rad/s}} \Rightarrow T = 0,02\pi s.$$



Η γραφική παράσταση μαγνητικής ροής-χρόνου είναι όπως στο σχήμα.

β) Το πλάτος της εναλλασσόμενης τάσης είναι

$$V = N\omega BA \Rightarrow V = 10 \cdot \left(100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right) \cdot (\sqrt{2}T) \cdot (0,16m^2) \Rightarrow V = 160\sqrt{2} V$$

$$\text{και } V_{\varepsilon V} = \frac{V}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_{\varepsilon V} = 160V.$$

Άρα, η χρονική εξίσωση της εναλλασσόμενης τάσης είναι

$$v = V\eta\mu\omega t \Rightarrow v = 160\sqrt{2}\eta\mu 100t (SI)$$

γ) Για τη θερμική συσκευή έχουμε: $P_K = 100W$, $V_K = 120V$.

Άρα το ρεύμα κανονικής λειτουργίας είναι $I_K = \frac{P_K}{V_K} = \frac{5}{6}A$ και η αντίσταση της θερμικής συσκευής $R_\Sigma = \frac{V_K}{I_K} = 144\Omega$.

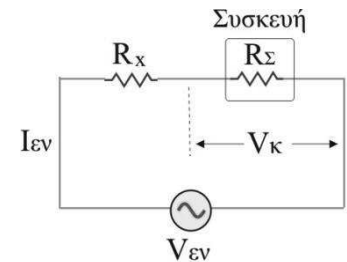
Παρατηρούμε ότι η εφαρμοζόμενη ενεργός τάση στα άκρα της συσκευής είναι μεγαλύτερη από την τάση κανονικής λειτουργίας ($V_K < V_{\varepsilon V}$), άρα η συσκευή κινδυνεύει να καταστραφεί.

Για να λειτουργήσει κανονικά η συσκευή πρέπει για την ένταση του ρεύματος που διαρρέει τη συσκευή να ισχύει

$$I_{\varepsilon V} = I_K = \frac{5}{6}A,$$

$$\text{οπότε } R_{OL} = \frac{V_{\varepsilon V}}{I_{\varepsilon V}} = \frac{160V}{\frac{5}{6}A} \Rightarrow R_{OL} = 192\Omega.$$

$$\text{Όμως } R_{OL} = R_\Sigma + R_X \Rightarrow 192\Omega = 144\Omega + R_X \Rightarrow R_X = 48\Omega.$$



δ) Πρέπει $V'_{\varepsilon V} = V_K \Rightarrow V'_{\varepsilon V} = 120V$ και $V' = V_{\varepsilon V} \sqrt{2} = 120\sqrt{2}V$.

$$\text{Άρα, } N\omega B'A = 120\sqrt{2} \Rightarrow B' = \frac{120\sqrt{2}V}{10 \cdot \left(100 \frac{rad}{s}\right) \cdot (0,16m^2)} \Rightarrow B' = \frac{3\sqrt{2}}{4}T$$

Το ζητούμενο ποσοστό είναι

$$\pi\% = \frac{B' - B}{B} 100\% = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}T - \sqrt{2}T}{\sqrt{2}T} 100\% \Rightarrow \pi\% = -25\%$$

Άσκηση 20.

Θερμική συσκευή με στοιχεία κανονικής λειτουργίας $P_K = 400W$, $V_K = 160V$ συνδέεται σε σειρά με αντιστάτη αντίστασης $R = 16\Omega$. Στα άκρα του συστήματος εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση $v = V\eta\mu\omega t$ και η συσκευή λειτουργεί κανονικά. Η τάση εκτελεί 6000 πλήρεις εναλλαγές σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 2 \text{ min}$.

α) Να βρείτε την ενεργό ένταση του ρεύματος που διαρρέει τη θερμική συσκευή και την αντίστασή της, R_Σ .

β) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της εναλλασσόμενης τάσης.

γ) Να βρείτε το ρυθμό έκλυσης θερμότητας στο κύκλωμα τη χρονική στιγμή $t = \frac{11}{600} \text{ s}$.

δ) Η εναλλασσόμενη τάση παράγεται από αγωγίμο πλαίσιο αμελητέας αντίστασης, που στρέφεται κατάλληλα μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B . Αφαιρούμε τον αντιστάτη από το κύκλωμα. Να βρείτε πόσο τοις εκατό (%) πρέπει να μεταβάλλουμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου, ώστε η συσκευή να λειτουργεί κανονικά.

Λύση

α) Από τα στοιχεία κανονικής λειτουργίας για τη θερμική συσκευή βρίσκουμε το ρεύμα κανονικής της λειτουργίας και την αντίστασή της.

$$I_K = \frac{P_K}{V_K} = \frac{400W}{160V} \Rightarrow I_K = 2,5A \quad \text{και}$$

$$P_K = \frac{V_K^2}{R_\Sigma} \Rightarrow R_\Sigma = \frac{V_K^2}{P_K} = \frac{(160V)^2}{400W} \Rightarrow R_\Sigma = 64\Omega.$$

Επειδή η συσκευή λειτουργεί κανονικά, $I_{\varepsilon V} = I_K = 2,5A$.

β) Η ολική αντίσταση του κυκλώματος είναι: $R_{\text{ολ}} = R + R_\Sigma = 80\Omega$

$$V_{\varepsilon V} = I_{\varepsilon V} R_{\text{ολ}} = (2,5A) \cdot (80\Omega) \Rightarrow V_{\varepsilon V} = 200V,$$

$$V = V_{\varepsilon V} \sqrt{2} = 200\sqrt{2}V.$$

Η συχνότητα της εναλλασσόμενης τάσης δίνεται από τη σχέση

$$f = \frac{N}{\Delta t} = \frac{6000}{2 \cdot 60s} \Rightarrow f = 50Hz \quad \text{και η γωνιακή συχνότητα}$$

$$\omega = 2\pi f = 100\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

$$\text{Άρα } v = V\eta\mu\omega t \Rightarrow v = 200\sqrt{2} \eta\mu 100\pi t \text{ (SI)}$$

γ) Το πλάτος της εναλλασσόμενης έντασης ρεύματος είναι

$$I = I_{\varepsilon V} \sqrt{2} \Rightarrow I = 2,5\sqrt{2} \text{ A}$$

Άρα, η χρονική εξίσωση της εναλλασσόμενης έντασης είναι

$$i = I \eta \mu \omega t = 2,5\sqrt{2} \eta \mu 100\pi t (SI) .$$

$$\text{Για } t = \frac{11}{600} \text{ s} , \quad i = 2,5\sqrt{2} \eta \mu \frac{11\pi}{6} \text{ A} = 2,5\sqrt{2} \eta \mu \left(-\frac{\pi}{6}\right) \text{ A} \Rightarrow i = -1,25\sqrt{2} \text{ A} .$$

Ο ρυθμός έκλυσης θερμότητας στο κύκλωμα είναι η στιγμιαία ισχύς

$$\frac{dQ}{dt} = p = i^2 R_{\text{ολ}} = (-1,25\sqrt{2} \text{ A})^2 \cdot (80 \Omega) \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = 250 \text{ J / s}$$

$$\delta) \text{ Πρέπει } V'_{\varepsilon V} = V_K = 160 \text{ V} , \text{ άρα } V' = 160\sqrt{2} \text{ V}$$

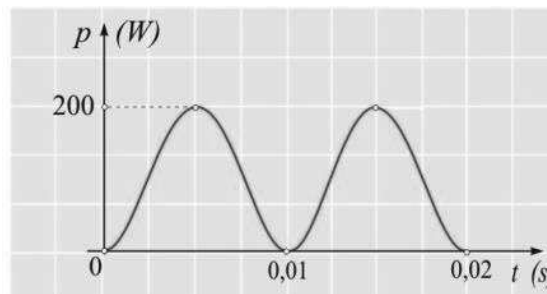
Αρχικά είναι $V = N\omega B A$ και τελικά $V' = N\omega B' A$.

$$\frac{V'}{V} = \frac{N\omega B' A}{N\omega B A} \Rightarrow \frac{B'}{B} = \frac{160\sqrt{2}}{200\sqrt{2}} \Rightarrow B' = \frac{4}{5} B$$

$$\text{Άρα, } \pi\% = \frac{B' - B}{B} 100\% = \frac{\frac{4B}{5} - B}{B} \Rightarrow \pi\% = -20\%$$

Άσκηση 21.

Ένας αντιστάτης αντίστασης $R = 200\Omega$ τροφοδοτείται από εναλλασσόμενη τάση $v = V\eta\mu\omega t$. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της στιγμιαίας ισχύος στον αντιστάτη σε συνάρτηση με το χρόνο.



α) Να βρείτε την περίοδο, τη συχνότητα και το πλάτος της εναλλασσόμενης τάσης.

β) Υπολογίστε τη θερμότητα που εκλύεται στον αντιστάτη σε χρόνο ίσο με αυτόν που χρειάζεται η τάση για να ολοκληρώσει 500 πλήρεις εναλλαγές.

γ) Ποια χρονική στιγμή η στιγμιαία ισχύς του εναλλασσόμενου ρεύματος ισούται με τη μέση ισχύ για πρώτη φορά;

δ) Αντικαθιστούμε τον αντιστάτη με δύο άλλους αντίστασης 100Ω ο καθένας, τους οποίους συνδέουμε παράλληλα μεταξύ τους και στη συνέχεια στα άκρα του συστήματός τους εφαρμόζουμε την ίδια εναλλασσόμενη τάση. Να βρείτε πόσο τοις εκατό (%) μεταβάλλεται η μέση ισχύς στο κύκλωμα.

Λύση

$$\alpha) p = v i \Rightarrow p = i^2 R$$

Συνεπώς η στιγμιαία ισχύς μηδενίζεται κάθε φορά που μηδενίζεται και η ένταση του ρεύματος, οπότε:

$$\frac{T}{2} = 0,01s \Rightarrow T = 0,02s, \quad f = 50\text{Hz}, \quad \omega = 100\pi\text{rad/s}.$$

$$\text{Ακόμη } p = i^2 R = I^2 R \eta^2 \omega t, \quad 0 \leq \eta^2 \omega t \leq 1 \quad \text{άρα } p_{\max} = I^2 R \Rightarrow 200\text{W} = I^2 200\Omega \Rightarrow I = 1\text{A} \quad \text{και} \\ V = IR \Rightarrow V = 200\text{V}$$

$$\beta) f = \frac{N}{t} \Rightarrow t = \frac{500}{50} s \Rightarrow t = 10s.$$

$$\text{Άρα, } Q = I_{\text{εV}}^2 R t = \left(\frac{I}{\sqrt{2}} \right)^2 R t = \frac{(1\text{A})^2}{2} \cdot (200\Omega) \cdot (10s) \Rightarrow Q = 10^3 J$$

$$\gamma) p = P \Rightarrow I^2 R \eta^2 \omega t = I_{\text{εV}}^2 R \Rightarrow (I_{\text{εV}} \sqrt{2})^2 \eta^2 \omega t = I_{\text{εV}}^2 \Rightarrow \eta^2 \omega t = \frac{1}{2} \Rightarrow \eta \omega t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Για } \eta \omega t = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{έχουμε } \omega t = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{ή } \omega t = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \quad \text{με } \kappa \in \mathbb{N}$$

$$\text{Για } \eta \omega t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{έχουμε } \omega t = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \quad \text{ή } \omega t = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{4} \quad \kappa \in \mathbb{N}.$$

Για πρώτη φορά η στιγμιαία ισχύς του εναλλασσόμενου ρεύματος ισούται με τη μέση ισχύ

$$\text{όταν } \omega t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{400} \text{ s}$$

$$\delta) R'_{\text{ολ}} = \frac{R'R'}{R' + R'} = 50\Omega, I'_{\text{εν}} = \frac{V_{\text{εν}}}{R'_{\text{ολ}}}$$

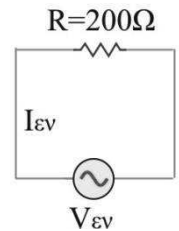
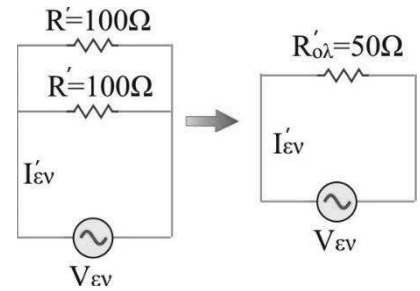
$$\text{με } V_{\text{εν}} = \frac{V}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_{\text{εν}} = 100\sqrt{2} \text{ V}, \text{ άρα } I'_{\text{εν}} = 2\sqrt{2} \text{ A}$$

$$\text{και } P' = I'^2_{\text{εν}} R'_{\text{ολ}} = (2\sqrt{2} \text{ A})^2 \cdot (50\Omega) \Rightarrow P' = 400 \text{ W}.$$

$$\text{Αρχικά η ισχύς ήταν } P = I^2_{\text{εν}} R = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ A}\right)^2 \cdot (200\Omega) \Rightarrow P = 100 \text{ W}$$

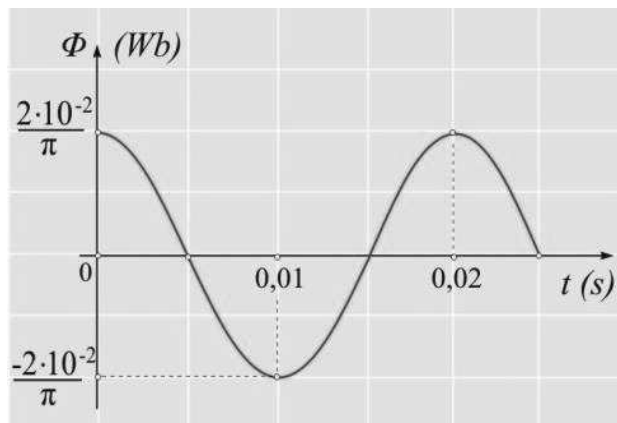
Άρα, η επί τοις εκατό (%) μεταβολή της μέσης ισχύος στο κύκλωμα είναι

$$\pi\% = \frac{P' - P}{P} 100\% = \frac{400 - 100}{100} 100\% \Rightarrow \pi\% = 300\%$$



Άσκηση 22.

Ένα συμμάτινο πλαίσιο σχήματος τετραγώνου πλευράς $\alpha = 0,1\text{m}$, αμελητέας αντίστασης, έχει $N=100$ σπείρες και στρέφεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B , με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από άξονα που περνά από τα μέσα δύο απέναντι πλευρών του πλαισίου και είναι κάθετος στις δυναμικές γραμμές του πεδίου. Στο διπλανό σχήμα παριστάνεται η μαγνητική ροή που διέρχεται από κάθε σπείρα του πλαισίου σε συνάρτηση με το χρόνο.



α) Να βρείτε την ένταση B του μαγνητικού πεδίου.

β) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της εναλλασσόμενης τάσης που δημιουργείται στα άκρα του πλαισίου.

γ) Να βρείτε για πόσο χρονικό διάστημα σε κάθε περίοδο η αλγεβρική τιμή της στιγμιαίας τάσης είναι μεγαλύτερη ή ίση από την ενεργό τάση.

δ) Συνδέουμε τα άκρα του πλαισίου με αντιστάτη αντίστασης $R=10\Omega$. Να βρείτε τη θερμότητα που εκλύεται στον αντιστάτη, στο χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο το πλαίσιο εκτελεί 200 στροφές.

Λύση

α) Για τη μαγνητική ροή που διέρχεται από μια σπείρα του πλαισίου ισχύει:

$$\Phi = BA \sin \omega t \quad \text{άρα} \quad \Phi_{\max} = BA \Rightarrow \Phi_{\max} = B \alpha^2 \Rightarrow B = \frac{\frac{2 \cdot 10^{-2}}{\pi} \text{Wb}}{10^{-2} \text{m}^2} \Rightarrow B = \frac{2}{\pi} \text{T}.$$

$$\beta) T = 0,02\text{s}, \quad f = 50\text{Hz}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 100\pi \text{rad/s}.$$

Για το πλάτος της εναλλασσόμενης τάσης έχουμε:

$$V = N\omega BA = 100 \cdot \left(100\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right) \cdot \left(\frac{2}{\pi} \text{T}\right) \cdot (10^{-2} \text{m}^2) \Rightarrow V = 200\text{V}$$

$$\text{και } v = V \eta \mu \omega t \Rightarrow v = 200 \eta \mu 100\pi t \text{ (SI)}$$

$$\gamma) \quad v \geq V_{\text{ev}} \Rightarrow V_{\text{ev}} \sqrt{2} \eta \mu 100\pi t \geq V_{\text{ev}} \Rightarrow \eta \mu 100\pi t \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{άρα} \quad 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \leq 100\pi t \leq 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \text{ (SI)} \quad \mu\epsilon$$

$$\kappa \in \mathbb{N}.$$

Συνεπώς το ζητούμενο χρονικό διάστημα για κάθε περίοδο θα είναι

$$\Delta t = \frac{(2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4}) - (2\kappa\pi + \frac{\pi}{4})}{100\pi} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{200} \text{ s}.$$

$$\delta) f = \frac{N}{t} \Rightarrow t = \frac{200}{50\text{Hz}} \Rightarrow t = 4\text{s}$$

$$I_{\varepsilon V} = \frac{V_{\varepsilon V}}{R} = \frac{V}{R\sqrt{2}} = \frac{200\text{V}}{10\Omega\sqrt{2}} \Rightarrow I_{\varepsilon V} = 10\sqrt{2}\text{A} \text{ και}$$

$$Q = I_{\varepsilon V}^2 R t \Rightarrow Q = (10\sqrt{2}\text{A})^2 \cdot (10\Omega) \cdot (4\text{s}) \Rightarrow Q = 8 \cdot 10^3 \text{ J}.$$

