

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο: ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ - ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

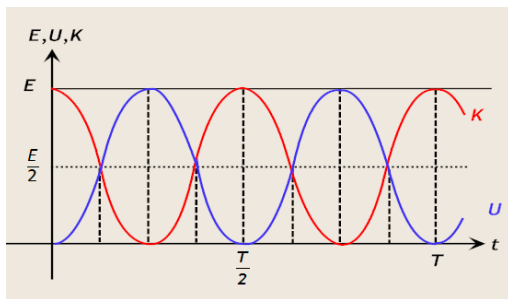
ΕΝΟΤΗΤΑ 1.2: ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ (ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ, ΑΡΧΙΚΗ ΦΑΣΗ, ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ, ΟΡΜΗ)

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με αρχική φάση μηδέν. Η γραφική παράσταση δείχνει τις μεταβολές της κινητικής K , της δυναμικής U και της ολικής ενέργειας E , σε συνάρτηση με το χρόνο.



Η κινητική του ενέργεια K εξισώνεται με τη δυναμική του ενέργεια U , 120 φορές ανά λεπτό. Η συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

- α) 30 Hz.
- β) 2 Hz.
- γ) 0,5 Hz.

Να επιλέξετε τις σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Όπως φαίνεται απ' το κοινό διάγραμμα $U - t$ και $K - t$, τα σημεία τομής, είναι οι στιγμές όπου εξισώνονται η κινητική ενέργεια K με τη δυναμική ενέργεια U . Αυτό συμβαίνει 4 φορές σε κάθε περίοδο, μιας και στο διάγραμμα έχουμε 4 σημεία τομής ανά περίοδο ταλάντωσης.

Άρα το σώμα εκτελεί $N_{\text{ταλ}} = \frac{120}{4} = 30$ ταλαντώσεις ανά λεπτό.

Επομένως με βάση τον ορισμό της συχνότητας: $f = \frac{N_{\text{ταλ}}}{\Delta t} = \frac{30 \text{ ταλ}}{1 \text{ min}} = \frac{30 \text{ ταλ}}{60 \text{ s}} \Rightarrow f = 0,5 \text{ Hz}$

Ερώτηση 2.

Σύστημα ελατηρίου σταθεράς k - μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση περιόδου T και συχνότητας f . Αντικαθιστούμε τη μάζα με άλλη $m' = \frac{m}{4}$ και διπλασιάζουμε το πλάτος της ταλάντωσης: $A' = 2A$.

A) Για τη συχνότητα f' ισχύει:

α) $f' = 2f$.

β) $f' = f$.

γ) $f' = \frac{f}{2}$.

B) Η ενέργεια της ταλάντωσης E' :

α) παραμένει η ίδια.

β) διπλασιάζεται.

γ) τετραπλασιάζεται.

Να επιλέξετε τις σωστές απαντήσεις και να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας.

Λύση

A) Σωστή απάντηση είναι η α.

B) Σωστή απάντηση είναι η γ.

Η σταθερά ταλάντωσης D του συστήματος ελατηρίου k - μάζας m , είναι ίση με k , δηλαδή είναι ανεξάρτητη της μάζας του ταλαντούμενου σώματος και του πλάτους ταλάντωσης. Συνεπώς και στις δύο περιπτώσεις: $D' = D = k$.

A) Η περίοδος μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{και η συχνότητα είναι το αντίστροφο της περιόδου:}$$

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}. \quad \text{Όπως φαίνεται απ' αυτήν η συχνότητα δεν εξαρτάται από το πλάτος ταλάντωσης.}$$

Με την αλλαγή της μάζας, η συχνότητα γίνεται: $f' = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m'}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\frac{m}{4}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4k}{m}}$.

Βγάζουμε το 4 από τη ρίζα και: $f' = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$, δηλαδή $f' = 2f$.

Β) Η ενέργεια ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $E = \frac{1}{2} DA^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} kA^2$, δηλαδή είναι ανεξάρτητη της μάζας m και ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους. Άρα:

$$E' = \frac{1}{2} kA'^2 = \frac{1}{2} k(2A)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} kA^2 \Rightarrow E' = 4E.$$

Ερώτηση 3.

Δύο σημειακά σώματα, που έχουν ίσες μάζες ($m_1 = m_2 = m$), εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση. Οι συχνότητες των δύο ταλαντώσεων ικανοποιούν τη σχέση $f_1 > f_2$ και τα πλάτη τη σχέση $A_2 < A_1$. Οι ενέργειες ταλάντωσης E_1 και E_2 των δύο σωμάτων 1 και 2 αντίστοιχα ικανοποιούν τη σχέση:

α) $E_1 = E_2$.

β) $E_1 > E_2$.

γ) $E_2 > E_1$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Η ολική ενέργεια μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} m 4\pi^2 f^2 A^2 \Rightarrow E = 2m\pi^2 f^2 A^2.$$
 Παρατηρούμε ότι η ολική ενέργεια είναι ανάλογη τόσο του τετραγώνου της συχνότητας όσο και του πλάτους. Άρα αφού η πρώτη ταλάντωση έχει μεγαλύτερη συχνότητα και μεγαλύτερο πλάτος, θα έχει και μεγαλύτερη ενέργεια, δηλαδή: $E_1 > E_2$.

Ερώτηση 4.

Σώμα εκτελεί αμείωτη απλή αρμονική ταλάντωση, πλάτους A . Σε κάποια θέση της τροχιάς του, η κινητική ενέργεια είναι το 50% της ολικής του ενέργειας και η δύναμη επαναφοράς έχει θετική τιμή. Η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας, ισούται με:

α) $-\frac{\sqrt{3}}{2}A$.

β) $\frac{\sqrt{2}}{2}A$.

γ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}A$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Η ολική ενέργεια E μιας αμείωτης απλής αρμονικής ταλάντωσης διατηρείται:

$$K + U = E \Rightarrow K = E - U.$$

Εφόσον η κινητική ενέργεια είναι το 50% της ολικής του ενέργειας: $K = \frac{50}{100}E = \frac{1}{2}E$.

Εξισώνοντας τα 2^α μέλη έχουμε: $E - U = \frac{1}{2}E \Rightarrow U = E - \frac{1}{2}E \Rightarrow U = \frac{1}{2}E$.

Αλλά $E = \frac{1}{2}DA^2$ και $U = \frac{1}{2}Dx^2$, οπότε η προηγούμενη σχέση δίνει:

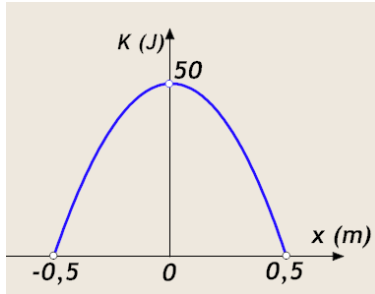
$$\frac{1}{2}D \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}D \cdot A^2 \text{ και απλοποιώντας έχουμε: } x^2 = \frac{1}{2}A^2 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}A \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}A.$$

Γνωρίζουμε ότι η δύναμη επαναφοράς μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης είναι πάντα αντίθετη της απομάκρυνσης (λόγω της συνθήκης της ταλάντωσης: $\Sigma F = -D \cdot x$). Με βάση το δεδομένο ότι η δύναμη επαναφοράς έχει θετική τιμή, συμπεραίνουμε ότι η απομάκρυνση x είναι αρνητική. Άρα από τις δύο πιθανές λύσεις της απομάκρυνσης,

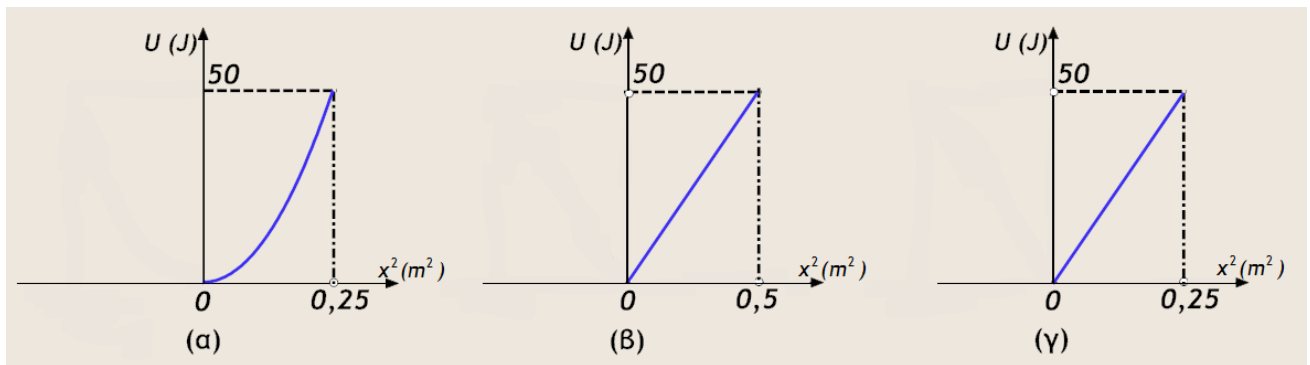
επιλέγουμε την αρνητική, δηλαδή: $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}A$

Ερώτηση 5.

Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της κινητικής ενέργειας K ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x από τη θέση Ισορροπίας του.



Η γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας U σε συνάρτηση με το τετράγωνο της απομάκρυνσης x^2 είναι η:



Να επιλέξετε τη σωστή γραφική παράσταση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Η κινητική ενέργεια ενός αρμονικού ταλαντωτή, μεγιστοποιείται στη θέση Ισορροπίας του ($x = 0$). Από το διάγραμμα φαίνεται ότι το σημείο αυτό είναι το σημείο τομής με τον κατακόρυφο άξονα $(0, 50 \text{ J})$, άρα η μέγιστη κινητική ενέργεια είναι: $K_{\max} = 50 \text{ J}$. Όμως, με βάση την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας η μέγιστη κινητική ενέργεια είναι ίση και με τη μέγιστη δυναμική ενέργεια: $K_{\max} = U_{\max} = E$, οπότε: $U_{\max} = 50 \text{ J}$.

Ο μηδενισμός της κινητικής ενέργειας γίνεται στα δύο ακρότατα ($x = -A$ και $x = +A$). Από το διάγραμμα φαίνεται ότι αυτό συμβαίνει στα σημεία τομής με τον οριζόντιο άξονα

$(-0,5, 0)$ και $(+0,5, 0)$, που είναι τα ακρότατα της ταλάντωσης. Άρα το πλάτος ταλάντωσης είναι: $A = 0,5 \text{ m}$.

Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $U = \frac{1}{2} D x^2 = \frac{D}{2} x^2$.

Από αυτήν προκύπτει ότι η δυναμική ενέργεια U είναι ανάλογη του τετραγώνου της απομάκρυνσης, άρα η γραφική παράσταση είναι γραμμική.

Ο πίνακας τιμών είναι:

$x^2 \text{ (m}^2\text{)}$	$(-0,5)^2 = 0,25$	0	$(+0,5)^2 = 0,25$
$U \text{ (J)}$	50	0	50

Τα παραπάνω αποδίδονται σωστά στη γραφική παράσταση (γ).

Ερώτηση 6.

Σε μία Α.Α.Τ. η κινητική ενέργεια γίνεται ίση με τη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης κατά τη διάρκεια μίας περιόδου:

α) Δύο φορές.

β) Μία φορά.

γ) Τέσσερις φορές.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Γνωρίζουμε ότι: $K = U$.

Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας Ταλάντωσης προκύπτει:

$$E = K + U \stackrel{(K=U)}{\Rightarrow} E = U + U \Rightarrow$$

$$E = 2 \cdot U \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot D \cdot A^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2 \Rightarrow$$

$$A^2 = 2 \cdot x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{A^2}{2} \Rightarrow$$

$$x = \pm \frac{A}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \pm \frac{A\sqrt{2}}{2}$$

Άρα η κινητική ενέργεια γίνεται ίση με τη δυναμική ενέργεια τέσσερις φορές κατά τη διάρκεια μίας περιόδου.

Ερώτηση 7.

Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. και τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση ισορροπίας και η ταχύτητά του έχει αρνητικό πρόσημο. Η αρχική φάση είναι:

α) 0 .

β) $\frac{\pi}{2}$.

γ) π .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα είναι στη θέση ισορροπίας δηλαδή $x = 0$ και η ταχύτητά του είναι αρνητική $u < 0$. Από την εξίσωση της απομάκρυνσης για $t = 0$ και $x = 0$ προκύπτει:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow 0 = A \cdot \eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 0$$

$$\text{Άρα } \varphi_0 = 2 \cdot k \cdot \pi + 0 \text{ ή } \varphi_0 = 2 \cdot k \cdot \pi + \pi$$

Επειδή $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ προκύπτει ότι:

Για την 1η λύση $0 \leq 2 \cdot k \cdot \pi < 2\pi$ άρα για $k = 0$ το $\varphi_0 = 0$

Για τη 2η λύση $0 \leq 2 \cdot k \cdot \pi + \pi < 2\pi$ άρα για $k = 0$ το $\varphi_0 = \pi$

Η εξίσωση της ταχύτητας για $t = 0$ και $\varphi_0 = 0$ είναι:

$$u = u_{\max} \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow u = u_{\max} \cdot \sigma\upsilon\nu 0 \quad (\sigma\upsilon\nu 0 = 1)$$

Άρα $u > 0$

Η εξίσωση της ταχύτητας για $t = 0$ και $\varphi_0 = \pi$ είναι:

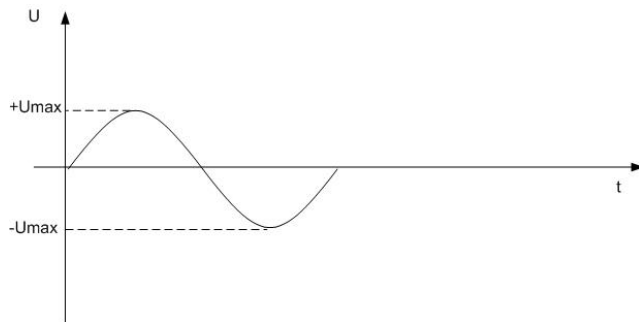
$$u = u_{\max} \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow u = u_{\max} \cdot \sigma\upsilon\nu\pi \quad (\sigma\upsilon\nu\pi = -1)$$

Άρα $u < 0$

Έτσι καταλήγουμε ότι η αρχική φάση είναι: $\varphi_0 = \pi$

Ερώτηση 8.

Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. και στο παρακάτω σχήμα δίνεται το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου. Η αρχική φάση ταλάντωσης είναι:



α) $\frac{3\pi}{2}$.

β) $\frac{\pi}{2}$.

γ) π .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Από το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου παρατηρούμε ότι τη χρονική στιγμή $t=0$ η ταχύτητα είναι μηδέν. Άρα το σώμα βρίσκεται σε μία από τις δύο ακραίες θέσεις. Επειδή

η ταχύτητα μετά από $\frac{T}{4}$ είναι $+u_{\max}$ καταλήγουμε ότι το σώμα τη χρονική στιγμή $t=0$

βρίσκεται στο $-A$. Άρα από την εξίσωση της απομάκρυνσης για $t=0$ και $x=-A$ προκύπτει η αρχική φάση της ταλάντωσης.

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow -A = A \cdot \eta\mu\varphi_0 \Rightarrow$$

$$\eta\mu\varphi_0 = -1 \Rightarrow \varphi_0 = 2 \cdot k \cdot \pi + \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Επειδή } 0 \leq \varphi_0 < 2\pi \Rightarrow 0 \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2} < 2\pi$$

$$\text{Άρα για } k=0 \text{ το } \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$$

Ερώτηση 9.

Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. και τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση $x = +\frac{A}{2}$ όπου A το πλάτος της ταλάντωσης και επιβραδύνεται. Η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι:

α) $\frac{\pi}{3}$.

β) $\frac{5\pi}{6}$.

γ) $\frac{\pi}{6}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = \frac{A}{2}$. Αφού επιβραδύνεται κινείται προς το $+A$, άρα η ταχύτητά του είναι θετική ($u > 0$). Από την εξίσωση της απομάκρυνσης για $t = 0$ και $x = +\frac{A}{2}$ προκύπτει:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow +\frac{A}{2} = A \cdot \eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Άρα } \varphi_0 = 2 \cdot k \cdot \pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } \varphi_0 = 2 \cdot k \cdot \pi + \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot k \cdot \pi + \frac{5\pi}{6}$$

Επειδή $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ προκύπτει ότι:

$$\text{για την 1η λύση: } 0 \leq 2 \cdot k \cdot \pi + \frac{\pi}{6} < 2\pi \text{ άρα για } k = 0 \text{ το } \varphi_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{για τη 2η λύση: } 0 \leq 2 \cdot k \cdot \pi + \frac{5\pi}{6} < 2\pi \text{ άρα για } k = 0 \text{ το } \varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$$

Η εξίσωση της ταχύτητας για $t = 0$ και $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ είναι:

$$u = u_{\max} \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow u = u_{\max} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} \quad (\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} > 0)$$

Άρα $u > 0$

Η εξίσωση ταχύτητας για $t = 0$ και $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$ είναι:

$$u = u_{\max} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow u = u_{\max} \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \left(\sin\frac{5\pi}{6} < 0\right)$$

Άρα $u < 0$

Επομένως $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$

Ερώτηση 10.

Να υπολογιστεί η απομάκρυνση σε μια Α.Α.Τ. όταν η δυναμική ενέργεια και η κινητική ενέργεια είναι ίσες.

Λύση

Από τη διατήρηση της ενέργειας ταλάντωσης έχουμε:

$$E = K + U \text{ (όμως } K = U \text{)} \Rightarrow$$

$$E = U + U \Rightarrow E = 2U \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot D \cdot A^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2 \Rightarrow$$

$$x^2 = \frac{A^2}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{A}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$x = \pm \frac{A\sqrt{2}}{2}$$

Ερώτηση 11.

Ένα σώμα συνδέεται στο ελεύθερο άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο. Το σύστημα εκτελεί Α.Α.Τ. με πλάτος ταλάντωσης A_1 . Η σταθερά επαναφοράς του συστήματος είναι D . Αντικαθιστούμε το σώμα με ένα άλλο τετραπλάσιας μάζας το οποίο εκτελεί επίσης Α.Α.Τ. αλλά με διπλάσιο πλάτος. Η σχέση που συνδέει την ενέργεια ταλάντωσης E_1 του πρώτου σώματος με την αντίστοιχη ενέργεια ταλάντωσης E_2 του δεύτερου σώματος είναι:

α) $E_2 = 4E_1$.

β) $E_2 = 16E_1$.

γ) $E_2 = \frac{E_1}{4}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Για τις ενέργειες E_1 και E_2 των δύο σωμάτων ισχύει:

$$\begin{cases} E_1 = \frac{1}{2} D_1 \cdot A_1^2 \\ E_2 = \frac{1}{2} D_2 \cdot A_2^2 \end{cases} \quad \text{Διαιρώ κατά μέλη}$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{2} D_1 \cdot A_1^2}{\frac{1}{2} D_2 \cdot A_2^2} \quad (\text{επειδή } D_1 = D_2 = D) \Rightarrow$$

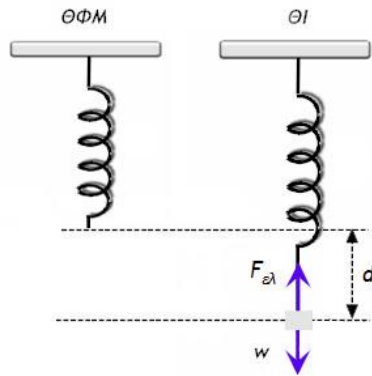
$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{A_1^2}{(2A_1)^2} \quad (\text{επειδή } A_2 = 2A_1) \Rightarrow$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow E_2 = 4E_1$$

Άρα σωστή απάντηση είναι η α.

Ερώτηση 12.

Δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 συνδέονται στο ελεύθερο κάτω άκρο δύο κατακόρυφων ελατηρίων των οποίων τα πάνω άκρα είναι σταθερά στερεωμένα. Για τις σταθερές των δύο ελατηρίων ισχύει $K_1 = 4K_2$. Παρατηρούμε ότι το πρώτο ελατήριο, όταν ισορροπεί το σώμα, έχει επιμηκυνθεί κατά d_1 , ενώ το δεύτερο κατά $d_2 = 2d_1$. Ποια από τις παρακάτω σχέσεις ισχύει για τις συχνότητες ταλάντωσης των δύο σωμάτων (Θεωρούμε ότι και τα δύο σώματα εκτελούν Α.Α.Τ.).



α) $f_1 = \sqrt{2} \cdot f_2$.

β) $f_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot f_2$.

γ) $f_1 = 4 \cdot f_2$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η συνθήκη που ισχύει στη θέση ισορροπίας για το κάθε σύστημα είναι:

$$m_1 \cdot g = K_1 \cdot d_1 \quad (1)$$

$$m_2 \cdot g = K_2 \cdot d_2 \quad (2)$$

Διαιρώ τις (1) και (2) κατά μέλη:

$$\frac{m_1 \cdot g}{m_2 \cdot g} = \frac{K_1 \cdot d_1}{K_2 \cdot d_2} \Rightarrow (K_1 = 4K_2 \text{ και } d_2 = 2d_1)$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{4K_2 \cdot d_1}{K_2 \cdot 2 \cdot d_1} \Rightarrow m_1 = 2m_2 \text{ Άρα}$$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{K_1}} \quad (3)$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{K_2}} \quad (4)$$

Διαιρώ τις (3) και (4) κατά μέλη:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m_1}{K_1}}}{2\pi\sqrt{\frac{m_2}{K_2}}} \Rightarrow$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{m_1 \cdot K_2}{m_2 \cdot K_1}} \Rightarrow (m_1 = 2m_2 \text{ και } K_1 = 4K_2)$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{2m_2 \cdot K_2}{m_2 \cdot 4K_2}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{1}{\frac{f_1}{f_2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{f_2}{f_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \sqrt{2}$$

Άρα $f_1 = \sqrt{2} \cdot f_2$ και σωστή απάντηση είναι η α.

Ερώτηση 13.

Ένα σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. Τη χρονική στιγμή t η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας είναι $x = -\frac{A}{2}$ όπου A το πλάτος της ταλάντωσης. Ο λόγος της κινητικής προς τη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t είναι:

α) $\frac{1}{2}$.

β) $\frac{1}{4}$.

γ) 3.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Για να υπολογίσουμε το λόγο εργαζόμαστε ως εξής:

$$\frac{K}{U} = \frac{E - U}{U} \text{ (επειδή } E = K + U \Rightarrow K = E - U) \Rightarrow$$

$$\frac{K}{U} = \frac{\frac{1}{2}DA^2 - \frac{1}{2}Dx^2}{\frac{1}{2}Dx^2} \Rightarrow$$

$$\frac{K}{U} = \frac{\frac{1}{2}D(A^2 - x^2)}{\frac{1}{2}Dx^2} \Rightarrow$$

$$\frac{K}{U} = \frac{A^2 - x^2}{x^2} \left(x = -\frac{A}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{K}{U} = \frac{A^2 - \frac{A^2}{4}}{\frac{A^2}{4}} \Rightarrow$$

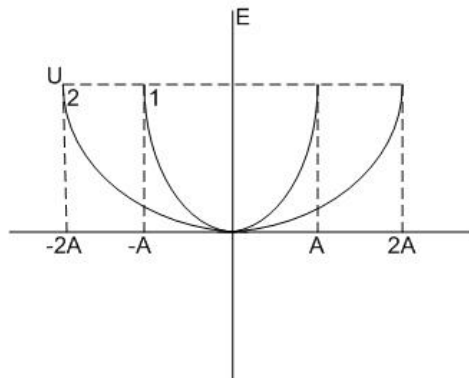
$$\frac{K}{U} = \frac{\frac{3A^2}{4}}{\frac{A^2}{4}} \Rightarrow$$

$$\frac{K}{U} = 3$$

Άρα σωστή απάντηση είναι η γ.

Ερώτηση 14.

Δύο σώματα με ίσες μάζες $m_1 = m_2$ εκτελούν Α.Α.Τ. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα διαγράμματα $U-x$ για τα δύο συστήματα. Ο λόγος των περιόδων ταλάντωσης $\frac{T_1}{T_2}$ είναι ίσος με:



α) 2 .

β) $\frac{1}{2}$.

γ) $\frac{1}{4}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Τα δύο συστήματα έχουν την ίδια ενέργεια ταλάντωσης. Δηλαδή:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot D_1 \cdot A_1^2 = \frac{1}{2} \cdot D_2 \cdot A_2^2 \quad (A_2 = 2A \text{ και } A_1 = A) \Rightarrow$$

$$D_1 \cdot A^2 = D_2 \cdot 4A^2 \Rightarrow$$

$$D_1 = 4D_2$$

Άρα ο λόγος των περιόδων υπολογίζεται:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m_1}{D_1}}}{2\pi\sqrt{\frac{m_2}{D_2}}} \Rightarrow$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{m_1 \cdot D_2}{m_2 \cdot D_1}} \quad (m_1 = m_2 \text{ και } D_1 = 4D_2) \Rightarrow$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{D_2}{4 \cdot D_2}} \Rightarrow$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{2}$$

Άρα σωστή απάντηση είναι η β.

Ερώτηση 15.

Μικρό σώμα μάζας m εκτελεί Α.Α.Τ. Τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στη θέση $x = +\frac{A}{2}$ και επιταχύνεται. Η αρχική του φάση είναι:

α) $\frac{\pi}{6}$.

β) $\frac{5\pi}{6}$.

γ) $\frac{\pi}{3}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Τη χρονική στιγμή $t=0$ έχουμε $x = +\frac{A}{2}$ δηλαδή $x > 0$. Επειδή το σώμα επιταχύνεται σημαίνει πως κατευθύνεται προς τη θέση ισορροπίας. Άρα πηγαίνει από το $+A$ στη θέση ισορροπίας και γι' αυτό η ταχύτητα είναι αρνητική, $u < 0$. Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad (\text{για } t=0 \text{ και } x = +\frac{A}{2}) \Rightarrow +\frac{A}{2} = A \cdot \eta\mu\varphi_0$$

Για $\eta\mu\varphi_0 = \frac{1}{2}$ προκύπτει:

$$\varphi_0 = 2 \cdot k \cdot \pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad \varphi_0 = 2 \cdot k \cdot \pi + (\pi - \frac{\pi}{6}) = 2 \cdot k \cdot \pi + \frac{5\pi}{6}$$

Επειδή $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ προκύπτει ότι $k=0$

$$\text{Άρα } \varphi_0 = \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad \varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$$

Από την εξίσωση της ταχύτητας για $t=0$ προκύπτει:

$$u = u_{\max} \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$u = u_{\max} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi_0 \Rightarrow$$

$$\text{Άρα αν } \varphi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ τότε } u > 0$$

και αν $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$ τότε $u < 0$

Άρα η αρχική φάση είναι $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$ και σωστή απάντηση είναι η β.

Ερώτηση 16.

Να βρεθεί ο λόγος της κινητικής ενέργειας προς τη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης ενός σώματος το οποίο εκτελεί Α.Α.Τ. όταν η ταχύτητά του είναι η μισή της μέγιστης ταχύτητας ταλάντωσης.

Λύση

$$\frac{K}{U} = \frac{K}{E - K} \quad (\text{επειδή } E = K + U \Rightarrow U = E - K) \Rightarrow$$

$$\frac{K}{U} = \frac{\frac{1}{2} m \cdot u^2}{\frac{1}{2} m \cdot u_{\max}^2 - \frac{1}{2} m \cdot u^2} \Rightarrow$$

$$\frac{K}{U} = \frac{\frac{1}{2} m \cdot u^2}{\frac{1}{2} m \cdot (u_{\max}^2 - u^2)} \quad \text{όμως } (u = \frac{u_{\max}}{2}) \Rightarrow$$

$$\frac{K}{U} = \frac{\frac{u_{\max}^2}{4}}{u_{\max}^2 - \frac{u_{\max}^2}{4}} \Rightarrow$$

$$\frac{K}{U} = \frac{\frac{u_{\max}^2}{4}}{\frac{3u_{\max}^2}{4}} \Rightarrow$$

$$\frac{K}{U} = \frac{1}{3}$$

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Σφαίρα μάζας $m=1\text{ kg}$ ισορροπεί δεμένη στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=400\text{ N/m}$, του οποίου το κάτω άκρο είναι στερεωμένο στο δάπεδο. Ανεβάζουμε τη σφαίρα κατακόρυφα προς τα πάνω και την αφήνουμε ελεύθερη, οπότε αυτή εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος $A=0,5\text{ m}$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνιακή συχνότητα ω καθώς και το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας $v_{\max}$ της σφαίρας.

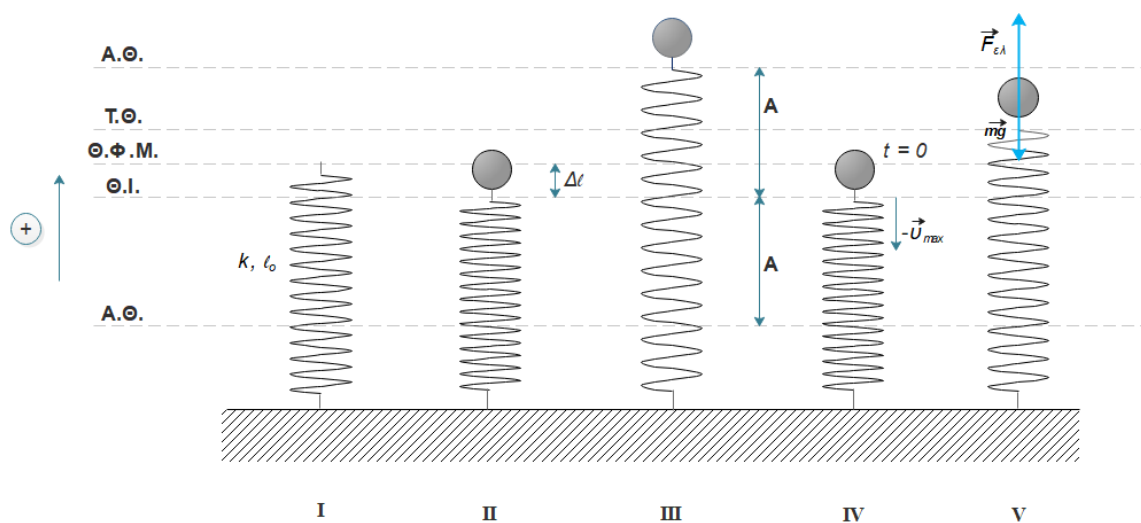
β) Να γράψετε τις εξισώσεις της απομάκρυνσης και της ταχύτητας της σφαίρας σε συνάρτηση με το χρόνο. Θεωρήστε θετική φορά την προς τα πάνω και ως χρονική στιγμή $t=0$, τη στιγμή που περνά από τη θέση ισορροπίας της με φορά κίνησης προς τα κάτω.

γ) Να γράψετε την εξίσωση της δύναμης ελατηρίου στη σφαίρα σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x . Στη συνέχεια να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης ελατηρίου στα δύο ακρότατα της ταλάντωσης.

δ) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{T}{8}$.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας: $g=10\text{ m/s}^2$.

Λύση



α) Η γωνιακή συχνότητα ω υπολογίζεται απ' τη σχέση: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{D}{m}}$. Επειδή η σφαίρα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση δεμένη στο κατακόρυφο ελατήριο, ισχύει ότι: $D = k$, οπότε: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{400}{1}} \text{ rad/s} \Rightarrow \omega = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας ταλάντωσης ισούται με: $v_{\max} = \omega \cdot A = 20 \text{ rad/s} \cdot 0,5 \text{ m} \Rightarrow v_{\max} = 10 \text{ m/s}$.

β) Για να βρούμε τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης, αρκεί να ξέρω το πλάτος A , τη γωνιακή συχνότητα ω και την αρχική φάση φ_0 . Γνωρίζοντας ήδη τα A και ω , αρκεί να βρω την αρχική φάση φ_0 .

Θέτω στη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης: $t=0$ και $x_{\text{αρχ}}=0$, οπότε: $0 = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot 0 + \varphi_0) \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0$ ή $\varphi_0 = \pi$.

Επιπλέον, με βάση την εκφώνηση, η ταχύτητα ($v = v_{\max} \sin\varphi_0$) είναι αρνητική. Επειδή $v = v_{\max} \sin 0 > 0$ και $v = v_{\max} \sin \pi < 0$, δεχόμαστε ως αρχική φάση την $\varphi_0 = \pi$.

Άρα οι ζητούμενες εξισώσεις είναι: $x = 0,5 \cdot \eta\mu(20t + \pi)$ και $v = 10 \cdot \sin(20t + \pi)$ (και οι δύο στο S.I.).

γ) Τοποθετούμε τη σφαίρα σε μια τυχαία θέση θετικής απομάκρυνσης x . Οι δυνάμεις που ασκούνται είναι το βάρος w , που είναι κατακόρυφο προς τα κάτω (άρα έχει αρνητική αλγεβρική τιμή, γιατί θετική φορά είναι η προς τα πάνω) και η $F_{\varepsilon\lambda}$, η οποία τοποθετείται αυθαίρετα στη θετική φορά. Η συνισταμένη τους είναι η δύναμη επαναφοράς και θα ικανοποιεί τη Συνθήκη της απλής αρμονικής ταλάντωσης:

$$\Sigma F = -D \cdot x \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - w = -k \cdot x \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = mg - k \cdot x \text{ και αντικαθιστώντας στο S.I.: } F_{\varepsilon\lambda} = 10 - 400 \cdot x.$$

Στο κάτω ακρότατο της ταλάντωσης, η σφαίρα έχει απομάκρυνση $x = -A$, οπότε αντικαθιστώντας στη σχέση που βρήκαμε, έχουμε: $F_{\varepsilon\lambda,(-A)} = 10 \text{ N} - 400 \text{ N/m} \cdot (-0,5) \text{ m} = (10 + 200) \text{ N} \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda,(-A)} = +210 \text{ N}$. Το πρόσημο (+) δείχνει ότι η $F_{\varepsilon\lambda}$ έχει φορά προς τα πάνω.

Στο πάνω ακρότατο, η σφαίρα έχει απομάκρυνση $x = +A$, οπότε αντικαθιστώντας στη σχέση που βρήκαμε, έχουμε: $F_{\varepsilon\lambda,(+A)} = 10 \text{ N} - 400 \text{ N/m} \cdot 0,5 \text{ m} = (10 - 200) \text{ N} \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda,(+A)} = -190 \text{ N}$. Το πρόσημο (-) δείχνει ότι η $F_{\varepsilon\lambda}$ έχει φορά προς τα κάτω.

Σχόλιο: Παρατηρήστε ότι και στις δύο περιπτώσεις, η $F_{\varepsilon\lambda}$ έχει φορά προς τη Θ.Φ.Μ., όπως αναμέναμε.

δ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt} = \Sigma F \frac{dx}{dt} = \Sigma F \cdot v = -k \cdot x \cdot v.$$

Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε την απομάκρυνση και την ταχύτητα τη χρονική στιγμή

$$t_1 = \frac{T}{8}.$$

$$\text{Η απομάκρυνση: } x_1 = 0,5\eta\mu(\omega t_1 + \pi) = 0,5\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{8} + \pi\right) = 0,5\eta\mu\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = -0,5\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ m}$$

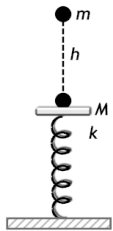
$$\text{και η ταχύτητα: } v_1 = 10\sigma\upsilon\nu(\omega t_1 + \pi) = 10\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{8} + \pi\right) = 10\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = -10\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ m/s}.$$

$$\text{Έτσι τη χρονική στιγμή } t_1, \quad \frac{dK}{dt} = -400\text{ N/m} \cdot \left(-0,5\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\text{ m} \cdot \left(-10\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\text{ m/s} \Rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = -1000\frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Πρόβλημα 2.

Δίσκος μάζας $M=1\text{ kg}$ είναι συνδεδεμένος στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=200\text{ N/m}$. Το κάτω άκρο του ελατηρίου στερεώνεται σε ακλόνητο σημείο του δαπέδου. Από ύψος $h=0,15\text{ m}$ πάνω από το δίσκο αφήνεται να πέσει ελεύθερο ένα σφαιρίδιο πλαστελίνης μάζας $m=1\text{ kg}$, το οποίο συγκρούεται με το δίσκο μετωπικά και πλαστικά. Το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Θεωρείστε την αντίσταση του αέρα και τη διάρκεια της κρούσης αμελητέες.



- Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σφαιριδίου ελάχιστα πριν την κρούση.
- Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος. Δίνεται η $g=10\text{ m/s}^2$.
- Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης επαναφοράς καθώς και το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου στο κατώτερο σημείο της ταλάντωσης του συσσωματώματος.
- Να γράψετε την εξίσωση της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης του συσσωματώματος σε συνάρτηση με το χρόνο.

Να θεωρήσετε ότι ο θετικός ημιάξονας είναι προς τα πάνω.

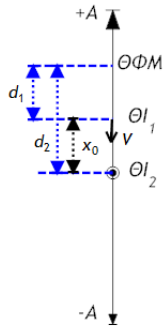
Λύση

α) Κατά τη διάρκεια της ελεύθερης πτώσης της σφαίρας η Μηχανική της ενέργεια διατηρείται. Θεωρώντας ως θέση (0) την αρχική, όπου αφήνεται ελεύθερο το σφαιρίδιο (άρα $K_0=0$), ως θέση (1) ελάχιστα πριν κτυπήσει στο δίσκο και ως επίπεδο αναφοράς το δίσκο (άρα $U_1=0$), έχουμε:

$$K_0 + U_0 = K_1 + U_1 \Rightarrow 0 + mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 + 0 \Rightarrow mv_1^2 = 2mgh \Rightarrow v_1^2 = 2gh \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10\text{ m/s}^2 \cdot 0,15\text{ m}} \Rightarrow v_1 = \sqrt{3}\text{ m/s}.$$

β) Εφαρμόζω τη Διατήρηση της ολικής Ορμής ($p_{ολ}=p'_{ολ}$) για την πλαστική κρούση των $m-M$, για να βρω την ταχύτητα του συσσωματώματος, αμέσως μετά την κρούση. Θεωρώντας θετική τη φορά προς τα κάτω έχουμε:

$$mu_1 + M \cdot 0 = (m + M)V \Rightarrow V = \frac{mu_1}{m + M} \Rightarrow V = \frac{1\text{kg} \cdot \sqrt{3}\text{m/s}}{1\text{kg} + 1\text{kg}} \Rightarrow V = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{m/s}$$



Ο δίσκος μάζας M ισορροπούσε, πριν την κρούση, στη θέση ισορροπίας 1 (ΘI_1), η οποία απέχει d_1 από τη Θέση Φυσικού Μήκους ($\Theta\Phi M$) του ελατηρίου. Στη θέση αυτή ισχύει η συνθήκη ισορροπίας:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\epsilon\lambda,(1)} - Mg = 0 \Rightarrow F_{\epsilon\lambda,(1)} = Mg \Rightarrow kd_1 = Mg \Rightarrow$$

$$d_1 = \frac{Mg}{k} \Rightarrow d_1 = \frac{1\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2}{200\text{N/m}} \Rightarrow d_1 = \frac{1}{20} \text{m} =$$

$$= 0,05 \text{ m}$$

Το συσσωμάτωμα που δημιουργείται μετά την κρούση εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με $D=k=200 \text{ N/m}$ γύρω από Νέα Θέση Ισορροπίας (ΘI_2), η οποία βρίσκεται κάτω απ' τη ΘI_1 και απέχει απόσταση d_2 από τη $\Theta\Phi M$.

Στη $\Theta. I. 2$ ισχύει η συνθήκη ισορροπίας:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\epsilon\lambda,(2)} - (M + m)g = 0 \Rightarrow F_{\epsilon\lambda,(2)} = (M + m)g \Rightarrow kd_2 = (M + m)g \Rightarrow$$

$$d_2 = \frac{(m + M)}{k} g = \frac{2\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2}{200\text{N/m}} \Rightarrow d_2 = \frac{1}{10} \text{ m} = 0,1 \text{ m} .$$

Για την αρμονική ταλάντωση του συσσωματώματος, εφαρμόζω τη Διατήρηση της Ενέργειας, εξισώνοντας την κινητική και δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης στη θέση της κρούσης (που είναι η θέση εκκίνησης της ταλάντωσης) με την ολική ενέργεια E της ταλάντωσης. Αμέσως μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα απέχει

$$x_o = d_2 - d_1 = \frac{1}{10} - \frac{1}{20} = \frac{1}{20} \text{ m} , \text{ από τη } \Theta I_2 \text{ και έχει ταχύτητα } V, \text{ άρα:}$$

$$U + K = E \Rightarrow \frac{1}{2} kx_o^2 + \frac{1}{2} (m + M)V^2 = \frac{1}{2} kA^2 \Rightarrow kx_o^2 + V^2 (m + M) = kA^2 \Rightarrow$$

$$A^2 = \frac{kx_o^2 + (m + M)V^2}{k} = \frac{kx_o^2}{k} + \frac{(m + M)V^2}{k} \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(m+M)V^2}{k}} = \sqrt{0,05^2 \text{ m}^2 + \frac{2\text{kg} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \text{ m}^2 / \text{s}^2}{200 \text{ N/m}}} = \sqrt{\frac{1}{400} + \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{200}} \text{ m} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{400} + \frac{3}{400}} \text{ m} = \sqrt{\frac{4}{400}} \text{ m} = \frac{1}{10} \text{ m} \Rightarrow A = 0,1 \text{ m}.$$

Σχόλιο: Προσέξτε τη διαφορά στις δυναμικές ενέργειες:

✓ Δυναμική ενέργεια ταλάντωσης: $U = \frac{1}{2} Dx^2$, όπου το x μετριέται από τη ΘΙ,

✓ Δυναμική ενέργεια ελατηρίου: $U_{ελ} = \frac{1}{2} kl^2$, όπου το l μετριέται από τη ΘΦΜ του ελατηρίου,

✓ Βαρυτική δυναμική ενέργεια: $U_{βαρ} = mg \cdot h$, όπου h είναι το ύψος του σώματος από ορισμένο επίπεδο αναφοράς.

Η Δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης «εμπεριέχει» τη δυναμική ενέργεια ελατηρίου και τη βαρυτική δυναμική ενέργεια.

γ) Το μέτρο της δύναμης επαναφοράς δίνεται από τη σχέση: $F = D \cdot x = k \cdot x$, (θυμηθείτε ότι στο παράδειγμα 1, του σχολικού βιβλίου, έχουμε αποδείξει ότι $D=k$) δηλαδή είναι ανάλογο της απομάκρυνσης x από τη ΘΙ, συνεπώς γίνεται μέγιστο στα ακρότατα της ταλάντωσης. Έτσι: $F_{\max} = k \cdot A = 200 \text{ N/m} \cdot 0,1 \text{ m} \Rightarrow F_{\max} = 20 \text{ N}$.

Η Δύναμη του ελατηρίου έχει μέγιστο μέτρο στη θέση που το ελατήριο εμφανίζει τη μέγιστη απόσταση από τη Θ.Φ.Μ. του, δηλαδή στην κατώτερη θέση της ταλάντωσης. Άρα:

$$F_{ελ, \max} = k \cdot \Delta l_{\max} = 200 \text{ N/m} (d_2 + A) = 200 (0,1 + 0,1) \text{ N} \Rightarrow F_{ελ, \max} = 40 \text{ N}.$$

δ) Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση: $U = \frac{1}{2} Dx^2 = \frac{1}{2} kx^2$.

Συνεπώς, χρειάζεται να βρούμε τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης: $x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$. Ήδη γνωρίζουμε το πλάτος $A=0,1 \text{ m}$, οπότε πρέπει να βρούμε τη γωνιακή συχνότητα ω και την αρχική φάση φ_0 .

$$\text{Η γωνιακή συχνότητα: } \omega = \sqrt{\frac{D}{M+m}} = \sqrt{\frac{200}{2}} \text{ rad/s} = \sqrt{100} \text{ rad/s} \Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}.$$

Για την αρχική φάση, θέτω στην χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$, $t = 0$ και $x = 0,05\text{m}$, επειδή το συσσωμάτωμα κινείται προς τα κάτω πρέπει η ταχύτητα να είναι αρνητική, οπότε:

$$0,05 = 0,1\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{0,05}{0,1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } \varphi_0 = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}.$$

Επειδή για την αρχική φάση πρέπει να ισχύει: $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$, θα είναι και στις δύο λύσεις

το $k = 0$, δηλαδή: $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ ή $\varphi_0 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Η 1^η λύση δίνει για την ταχύτητα: $v = v_{\max} \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} > 0$ και (φυσικά) η 2^η

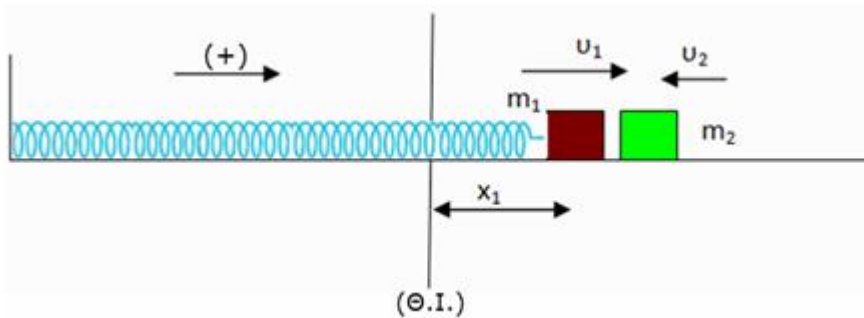
$$v = v_{\max} \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} < 0. \text{ Συνεπώς δεχόμαστε τη 2^η λύση: } \varphi_0 = \frac{5\pi}{6}.$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι: $x = 0,1\eta\mu(10t + \frac{5\pi}{6})$ (στο S.I.) και αντικαθιστώντας στη σχέση της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης, βρίσκουμε τελικά:

$$U = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} 200 \cdot 0,01\eta\mu^2(10t + \frac{5\pi}{6}) = 1 \cdot \eta\mu^2(10t + \frac{5\pi}{6}) \Rightarrow U = \eta\mu^2(10t + \frac{5\pi}{6}) \text{ (στο S.I.)}.$$

Πρόβλημα 3.

Ένα σώμα μάζας $m_1 = 4\text{kg}$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A = \sqrt{\frac{5}{4}}\text{m}$ πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στην άκρη οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 16\text{N/m}$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ που το σώμα βρίσκεται στη θέση $x_1 = 1\text{m}$ και κινείται από τη θέση ισορροπίας προς τη θέση μέγιστης απομάκρυνσης συγκρούεται ελαστικά με δεύτερο σώμα μάζας $m_2 = 12\text{kg}$ που κινείται με ταχύτητα μέτρου $v_2 = 1\text{m/s}$ αντίθετης φοράς από αυτή της v_1 .



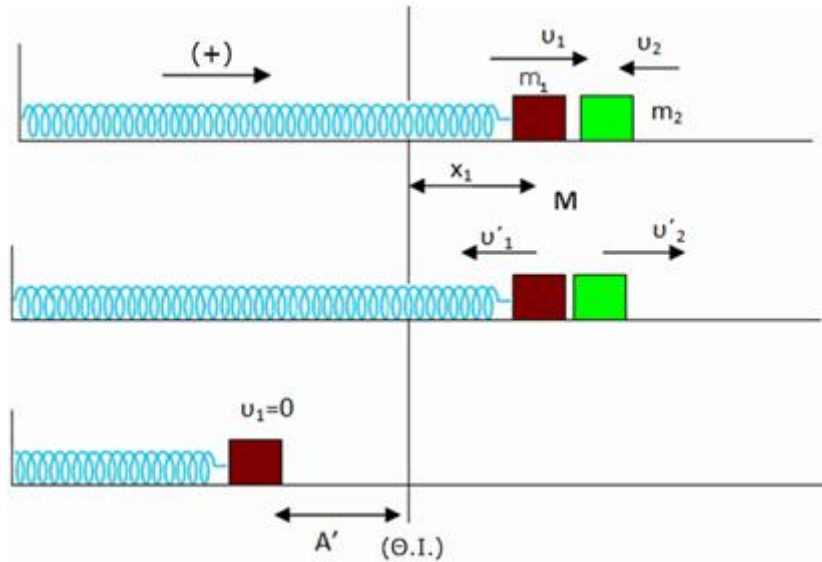
Να υπολογίσετε:

- το μέτρο της ταχύτητας του σώματος m_1 ελάχιστα πριν την κρούση.
- τις ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την ελαστική κρούση.
- το νέο πλάτος της ταλάντωσης του σώματος m_1 .
- το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του m_1 όταν αυτό βρίσκεται στη νέα ακραία θέση της ταλάντωσης του.

Λύση

α) Φαινόμενο 1°: Υπολογισμός της ταχύτητας v_1 του m_1 λίγο πριν την κρούση.

Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης Ενέργειας Ταλάντωσης από την ακραία θέση έως τη θέση Μ.



$$E_{x=A}(\text{ολ}) = E_{x=x_1}(\text{ολ}) \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow$$

$$v_1^2 = \frac{k}{m_1}(A^2 - x_1^2) \Rightarrow v_1^2 = \frac{16}{4}\left(\frac{5}{4} - 1\right)(m/s)^2 \Rightarrow$$

$$v_1^2 = 1(m/s)^2 \Rightarrow v_1 = 1m/s$$

β) Φαινόμενο 2 : Ελαστική κρούση $m_1 - m_2$.

Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Ορμής (λίγο πριν - λίγο μετά). Θετική φορά καθορίζεται προς τα δεξιά:

$$\vec{p}_{ολ}(\text{πριν}) = \vec{p}_{ολ}(\text{μετ}) \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \rightarrow$$

$$m_1v_1 - m_2v_2 = m_2v_2' - m_1v_1' \Rightarrow 4 - 12 = 12v_2' - 4v_1' \Rightarrow$$

$$v_1' = 3v_2' + 2 \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Κινητικής Ενέργειας κατά την κρούση.

$$K_{ολ}(\text{πριν}) = K_{ολ}(\text{μετ}) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \Rightarrow$$

$$4 + 12 = 4v_1'^2 + 12v_2'^2 \xrightarrow{(1)}$$

$$4 = (3v_2' + 2)^2 + 3v_2'^2 \Rightarrow$$

$$4 = 9v_2'^2 + 12v_2' + 4 + 3v_2'^2$$

$$12v_2'^2 + 12v_2' = 0 \Rightarrow$$

$$12v_2'(v_2' + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v_2' = 0 \text{ δεκτό} \\ v_2' = -1 \text{ m/s απορρίπτεται} \end{cases} \Rightarrow (1): v_1' = 2 \text{ m/s}$$

γ) Φαινόμενο 3 : Εύρεση του νέου πλάτους της ταλάντωσης του m_1 .

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ε.Τ. από τη θέση Μ (σημείο σύγκρουσης) έως την νέα ακραία θέση.

$$\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 = \frac{1}{2} k A'^2 \Rightarrow A'^2 = x_1^2 + \frac{m_1}{k} v_1'^2 \Rightarrow A'^2 = \left(1 + \frac{4}{16} 4\right) m^2 \Rightarrow A' = \sqrt{2} m$$

$$\delta) \frac{dK_1}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt} \xrightarrow{v = \frac{dx}{dt}} \frac{dK_1}{dt} = \Sigma F \cdot v$$

Αλλά στην ακραία θέση η ταχύτητα είναι μηδέν, συνεπώς:

$$\frac{dK_1}{dt} = 0$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 23/10/2018

Επιμέλεια: Αντώνιος Γεωργούσης, Γεώργιος Φωτεινάκης, Ευάγγελος Χατζέλλης
Επιστημονικός έλεγχος: Γεώργιος Ζησιμόπουλος, Κωνσταντίνος Στεφανίδης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο: ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ - ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.2: ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ (ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ, ΑΡΧΙΚΗ ΦΑΣΗ, ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ, ΟΡΜΗ)

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Ένα σώμα, μάζας m , εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση έχοντας ολική ενέργεια E . Χωρίς να αλλάξουμε τα φυσικά χαρακτηριστικά του συστήματος, προσφέρουμε στο σώμα επιπλέον ενέργεια $3E$. Τότε η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης:

- α) μένει σταθερή.
- β) διπλασιάζεται.
- γ) τετραπλασιάζεται.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Η ενέργεια του ταλαντωτή είναι ίση με τη μέγιστη κινητική ενέργεια ταλάντωσης:

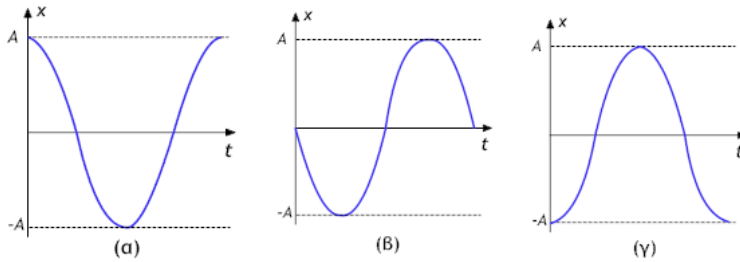
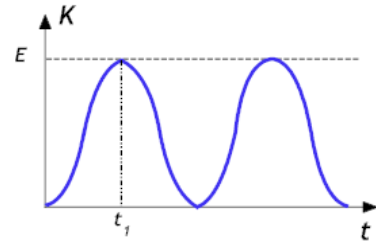
$$E = K_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2.$$

Η νέα ενέργεια του ταλαντωτή θα είναι: $E' = E + 3E = 4E$, ενώ δεν αλλάζει τη μάζα του. Αντικαθιστώντας τώρα έχουμε:

$$K'_{\max} = 4K_{\max} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_{\max}'^2 = 4 \frac{1}{2} m v_{\max}^2 \Rightarrow v_{\max}'^2 = 4 v_{\max}^2 \Rightarrow v'_{\max} = 2 v_{\max}.$$

Ερώτηση 2.

Η γραφική παράσταση της κινητικής ενέργειας ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τη χρονική στιγμή t_1 η ταχύτητα του σώματος έχει θετικό πρόσημο. Η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο είναι η:



Να επιλέξετε τη σωστή γραφική παράσταση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

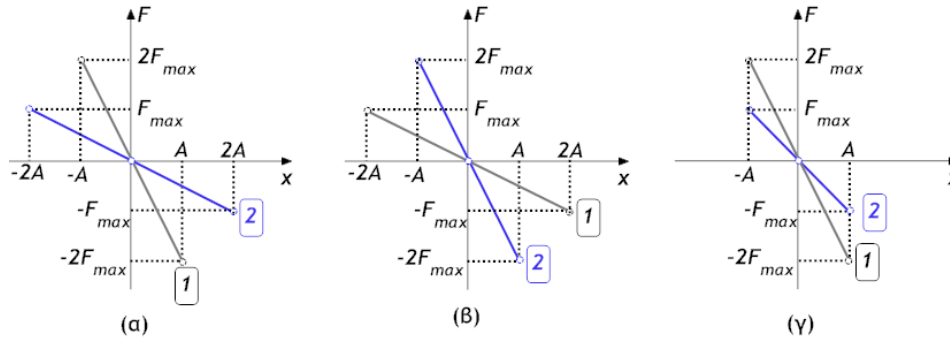
Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Παρατηρούμε από το διάγραμμα $K-t$, ότι τη χρονική στιγμή $t=0$, η κινητική ενέργεια του ταλαντωτή είναι μηδέν. Αυτό συμβαίνει στα ακρότατα της τροχιάς του. Επίσης τη χρονική στιγμή t_1 η κινητική του ενέργεια είναι μέγιστη. Αυτό συμβαίνει όταν περνά από τη θέση Ισορροπίας του.

Αν αρχικά ($t=0$) ήταν στο θετικό ακρότατο, σε χρόνο t_1 , θα περνούσε απ' τη Θ.Ι. του έχοντας αρνητική ταχύτητα. Όμως με βάση την εκφώνηση, τη χρονική στιγμή t_1 , έχει θετική ταχύτητα. Άρα τη στιγμή της εκκίνησης ήταν στο αρνητικό ακρότατο, συνεπώς το σωστό διάγραμμα $x-t$ είναι το (γ).

Ερώτηση 3.

Δύο αρμονικοί ταλαντωτές (1) και (2), είναι μικρά σώματα με μάζες m_1 και m_2 ($m_1=4m_2$), που είναι δεμένα σε δύο διαφορετικά ελατήρια με σταθερές k_1 και k_2 αντίστοιχα. Οι δύο ταλαντωτές έχουν ίδια ενέργεια E και ίδια περίοδο T . Με βάση τα δεδομένα αυτά, το σωστό διάγραμμα συνισταμένης δύναμης F - απομάκρυνσης x είναι το:



Να επιλέξετε τη σωστή γραφική παράσταση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι το (α).

Εφόσον έχουν ίδια περίοδο:

$$T_1 = T_2 \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k_2}} \Rightarrow \frac{m_1}{k_1} = \frac{m_2}{k_2} \Rightarrow k_1 = \frac{m_1}{m_2} k_2 = \frac{4m_2}{m_2} k_2 \Rightarrow k_1 = 4k_2.$$

Εφόσον έχουν ίδια ενέργεια:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{1}{2}k_1A_1^2 = \frac{1}{2}k_2A_2^2 \Rightarrow k_1A_1^2 = k_2A_2^2 \Rightarrow 4k_2A_1^2 = k_2A_2^2 \Rightarrow A_1^2 = \frac{A_2^2}{4} \Rightarrow A_1 = \frac{A_2}{2}.$$

Η μέγιστη δύναμη επαναφοράς του ταλαντωτή (1) είναι:

$$F_{1,\max} = k_1A_1 = 4k_2 \frac{A_2}{2} = 2k_2A_2 = 2F_{2,\max}.$$

Συνεπώς ο ταλαντωτής (1) έχει το μισό πλάτος και τη διπλάσια μέγιστη δύναμη επαναφοράς απ' τον ταλαντωτή (2).

Ερώτηση 4.

Σώμα Α είναι δεμένο σε κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο στην οροφή. Εκτρέπουμε κατακόρυφα το σώμα Α από τη θέση ισορροπίας του κατά d , προσφέροντας ενέργεια E_1 και το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί από τη θέση εκτροπής, οπότε αυτό εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Αντικαθιστούμε το σώμα Α με σώμα Β, που έχει μεγαλύτερη μάζα και εκτρέπουμε το σώμα Β από τη θέση ισορροπίας του κατά ίση απομάκρυνση d με τον ίδιο τρόπο. Η ενέργεια E_2 που προσφέραμε για να εκτρέψουμε το σώμα Β είναι:

α) ίση με την E_1 .

β) μικρότερη από την E_1 .

γ) μεγαλύτερη από την E_1 .

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Όταν εκτρέψουμε το σώμα από τη Θ.Ι. του και το αφήσουμε ελεύθερο, στο σημείο αυτό έχει μηδενική ταχύτητα, άρα αποτελεί ακρότατο της ταλάντωσης και το μέτρο της απομάκρυνσής του είναι τότε ίσο με το πλάτος ταλάντωσης: $d = A$.

Όταν ένα σώμα είναι δεμένο σε κατακόρυφο ελατήριο και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, η σταθερά της ταλάντωσης είναι ίση με τη σταθερά του ελατηρίου: $D = k$. (Σχολικό βιβλίο σελ. 12, παράδειγμα 1.1)

Με βάση τη Διατήρηση της ενέργειας, η ενέργεια, που προσφέρουμε στο σώμα για να το θέσουμε σε ταλάντωση είναι ίση με την ολική ενέργεια της ταλάντωσης:

$$E_{\text{προσ}} = E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}kA^2.$$

Οι ταλαντώσεις των σωμάτων Α και Β έχουν το ίδιο πλάτος, την ίδια σταθερά ταλάντωσης, ενώ η ενέργεια ταλάντωσης E είναι ανεξάρτητη της μάζας του ταλαντούμενου σώματος. Συνεπώς $E_2 = E_1$.

Ερώτηση 5.

Σώμα Σ_1 μάζας m είναι δεμένο σε κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A . Η μέγιστη δύναμη επαναφοράς, που δέχεται στη διάρκεια της ταλάντωσης είναι $F_{\max}$ και η μέγιστη επιτάχυνση $a_{\max}$. Αντικαθιστούμε το Σ_1 με άλλο σώμα Σ_2 , που έχει μεγαλύτερη μάζα m_2 από το Σ_1 και διεγείρουμε το σύστημα ώστε να εκτελέσει ταλάντωση ίδιου πλάτους A . Τότε το σώμα Σ_2 θα ταλαντώνεται με απλή αρμονική ταλάντωση και:

Α) η μέγιστη δύναμη που θα δέχεται θα είναι :

α) μικρότερη απ' του Σ_1 .

β) ίση με του Σ_1 .

γ) μεγαλύτερη απ' του Σ_1 .

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Β) η μέγιστη επιτάχυνσή του θα είναι:

α) μικρότερη απ' του Σ_1 .

β) ίση με του Σ_1 .

γ) μεγαλύτερη απ' του Σ_1 .

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Α) Σωστή απάντηση είναι η (β).

Β) Σωστή απάντηση είναι η (α).

Α) Η μέγιστη δύναμη επαναφοράς της ταλάντωσης ενός σώματος δεμένου σε ελατήριο, με βάση τη Συνθήκη της αρμονικής ταλάντωσης, θα είναι: $F_{\max} = k \cdot A$. Η σταθερά k του ελατηρίου δεν αλλάζει με την αλλαγή της μάζας, ενώ και το πλάτος ταλάντωσης, σύμφωνα με την εκφώνηση, είναι σταθερό. Συνεπώς η μέγιστη δύναμη επαναφοράς είναι η ίδια.

Β) Η μέγιστη επιτάχυνση, σύμφωνα με το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής, θα είναι:

$a_{\max} = \frac{F_{\max}}{m}$. Απ' τη σχέση αυτή προκύπτει ότι, αφού η μέγιστη δύναμη επαναφοράς είναι σταθερή, η μέγιστη επιτάχυνση είναι αντιστρόφως ανάλογη της μάζας του ταλαντωτή. Σύμφωνα με την εκφώνηση, το σώμα Σ_2 έχει μεγαλύτερη μάζα απ' το Σ_1 , συνεπώς η μέγιστη επιτάχυνσή του θα είναι μικρότερη απ' του Σ_1 .

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Ένα σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. Η σταθερά επαναφοράς συστήματος είναι $D = 100 \text{ N/m}$. Η ενέργεια ταλάντωσης είναι $E = 2 \text{ J}$. Αν η μάζα του ταλαντευόμενου σώματος είναι $m = 1 \text{ kg}$, να υπολογιστούν:

α) Η γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης.

β) Το πλάτος της επιτάχυνσης.

γ) Η απομάκρυνση του σώματος όταν η κινητική του ενέργεια είναι $K = 0.5 \text{ J}$.

δ) Η ταχύτητα u_1 του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 όπου η απομάκρυνση είναι $x_1 = 0,1\sqrt{2} \text{ m}$.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι:

$$\alpha) T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{1\text{kg}}{100\frac{\text{N}}{\text{m}}}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{10}\text{s} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5}\text{s}$$

$$\text{Η γωνιακή συχνότητα υπολογίζεται ως εξής: } \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}\text{s}} \Rightarrow \omega = 10\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

β) Η ενέργεια ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{D}} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2\cdot 2\text{J}}{100\frac{\text{N}}{\text{m}}}} \Rightarrow A = \pm 0,2 \text{ m}$$

Άρα το πλάτος της ταλάντωσης είναι: $A = 0,2 \text{ m}$

Το πλάτος της επιτάχυνσης υπολογίζεται εύκολα:

$$a_{\max} = \omega^2 \cdot A = \left(10\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \cdot 0,2\text{m} = 20\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

γ) Εφαρμόζουμε Αρχή Διατήρησης Ενέργειας για την Α.Α.Τ.

$$E = K + U \Rightarrow 2 = 0,5 + \frac{1}{2} D x^2 \Rightarrow 1,5 = \frac{1}{2} D x^2 \Rightarrow$$

$$3J = 100 \frac{N}{m} x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{3J}{100 \frac{N}{m}} \Rightarrow$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{10} m$$

δ) Εφαρμόζουμε Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας για την Α.Α.Τ. τη χρονική στιγμή t_1 :

$$E = K_1 + U_1 \Rightarrow E = \frac{1}{2} m u_1^2 + \frac{1}{2} D x_1^2 \Rightarrow$$

$$E - \frac{1}{2} D x_1^2 = \frac{1}{2} m u_1^2 \Rightarrow$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{2E - D x_1^2}{m}} \Rightarrow$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 2J - 100 \frac{N}{m} (0,1 \cdot \sqrt{2} m)^2}{1kg}} \Rightarrow$$

$$u_1 = \sqrt{4 - 100 \cdot 0,01 \cdot 2} \frac{m}{s} \Rightarrow$$

$$u_1 = \pm \sqrt{2} \frac{m}{s}$$

Άσκηση 2.

Ένα σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. και τη χρονική στιγμή t_1 έχει απομάκρυνση $x_1 = 5 \text{ cm}$ και ταχύτητα $u_1 = 10\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ενώ τη χρονική στιγμή t_2 έχει απομάκρυνση $x_2 = 5\sqrt{2} \text{ cm}$ και ταχύτητα $u_2 = 10\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Αν η μάζα του σώματος είναι $m = 0,5 \text{ kg}$ να υπολογιστούν:

- Η σταθερά επαναφοράς του συστήματος.
- Το πλάτος της ταλάντωσης.
- Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας τη χρονική στιγμή t_1 .

Λύση

α) Η ενέργεια της ταλάντωσης παραμένει σταθερή άρα για τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 ισχύει:

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow \frac{1}{2} m u_1^2 + \frac{1}{2} D x_1^2 = \frac{1}{2} m u_2^2 + \frac{1}{2} D x_2^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} D (x_1^2 - x_2^2) = \frac{1}{2} m (u_2^2 - u_1^2) \Rightarrow$$

$$D = \frac{m(u_2^2 - u_1^2)}{x_1^2 - x_2^2} \Rightarrow$$

$$D = \frac{0,5 \text{ kg} \left[\left(10\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \left(10\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right]}{(5 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 - (5\sqrt{2} \cdot 10^{-2} \text{ m})^2} \Rightarrow$$

$$D = \frac{0,5(200 - 300)}{25 \cdot 10^{-4} - 50 \cdot 10^{-4}} \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$D = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

β) Το πλάτος της ταλάντωσης υπολογίζεται εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας τη χρονική στιγμή t_1 :

$$E = K_1 + U_1 \Rightarrow E = \frac{1}{2} m u_1^2 + \frac{1}{2} D x_1^2$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \text{ kg} \cdot \left(10 \cdot \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}} (5 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 \Rightarrow$$

$$E = (75 + 25) \text{ J} \Rightarrow E = 100 \text{ J}$$

Όμως είναι:

$$E = \frac{1}{2} \cdot D A^2 \Rightarrow A = \pm \sqrt{\frac{2E}{D}} \Rightarrow A = \pm \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \text{ J}}{2 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}}} \Rightarrow A = \pm \sqrt{10^{-2} \text{ m}} \Rightarrow A = \pm 10 \text{ cm}$$

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι ίσος με την ισχύ της δύναμης επαναφοράς τη χρονική στιγμή t_1 :

$$\frac{dK_1}{dt} = P_1 = F_1 \cdot u_1 \Rightarrow$$

$$\frac{dK_1}{dt} = -D \cdot x_1 u_1 \Rightarrow$$

$$\frac{dK_1}{dt} = -2 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 10 \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow$$

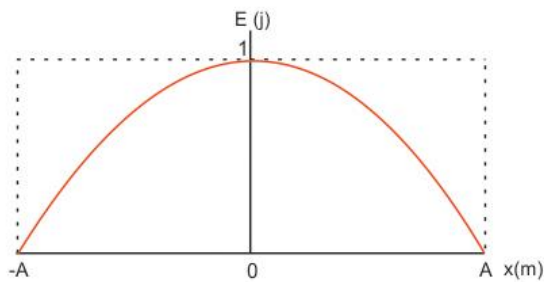
$$\frac{dK_1}{dt} = -\sqrt{3} \cdot 10^4 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Άσκηση 3.

Σώμα μάζας $m = 0,2 \text{ kg}$ εκτελεί Α.Α.Τ. Η συχνότητα μεταβολής της δυναμικής ενέργειας είναι $f' = 2 \text{ Hz}$.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ταλάντωσης σε σχέση με την απομάκρυνση. Για $t = 0$ το σώμα κινείται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα $x'x$.

α) Αφού ξανασχεδιάσετε το διάγραμμα να συμπληρώσετε τις αριθμητικές τιμές που λείπουν και να φτιάξετε και τη γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης, σε σχέση με την απομάκρυνση.



β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος την χρονική στιγμή όπου η απομάκρυνση είναι $x = 0,25 \text{ m}$.

γ) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας τη χρονική στιγμή όπου η ταχύτητα του σώματος είναι $u = \frac{\pi}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ και η επιτάχυνση του σώματος είναι θετική $a > 0$.

Δίνεται $\pi^2 = 10$.

Λύση

α) Η συχνότητα ταλάντωσης είναι το μισό της συχνότητας μεταβολής της δυναμικής ενέργειας.

$$\text{Άρα: } f = \frac{f'}{2} \Rightarrow f = 1 \text{ Hz}$$

$$\text{Επομένως: } \omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη σταθερά επαναφοράς:

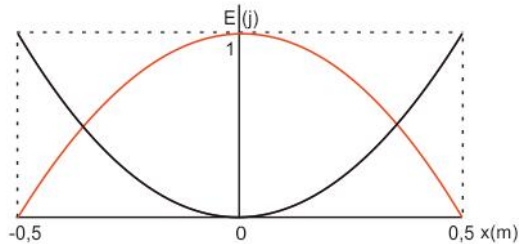
$$D = m \cdot \omega^2 = 0,2 \cdot \left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 = 8 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Επειδή η ενέργεια ταλάντωσης είναι ίση με τη μέγιστη κινητική ενέργεια, από το διάγραμμα προκύπτει:

$$K_{\max} = E \Rightarrow 1 \text{ J} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot A^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 8 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot A^2 = 1 \text{ J} \Rightarrow$$

$$A^2 = \frac{1}{4} \text{ m}^2 \Rightarrow A = \pm 0,5 \text{ m} \text{ άρα το πλάτος είναι } A = 0,5 \text{ m}$$

Έτσι το διάγραμμα είναι:



β) Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης έχουμε:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot D \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot u^2 + \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2 \Rightarrow$$

$$u = \pm \sqrt{\frac{D(A^2 - x^2)}{m}} \Rightarrow$$

$$u = \pm \sqrt{\frac{8 \frac{\text{N}}{\text{m}} [(0,5 \text{ m})^2 - (0,25 \text{ m})^2]}{0,2 \text{ kg}}} \Rightarrow$$

$$u = \pm \sqrt{7,5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Επειδή η ενέργεια της ταλάντωσης είναι σταθερή και ίση με το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης προκύπτει ότι ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας είναι αντίθετος του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας.

Άρα:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = -\frac{dW}{dt} = -\frac{F \cdot dx}{dt} = -F \cdot u \Rightarrow$$

$$\frac{dU}{dt} = -(-D \cdot x) \cdot u = D \cdot x \cdot u \quad (1)$$

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης (βλ. απάντηση ερωτήματος β) υπολογίζουμε την απομάκρυνση:

$$E = K + U \Rightarrow$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{D \cdot A^2 - m \cdot u^2}{D}} \Rightarrow$$

$$x = \pm \sqrt{A^2 - \frac{m \cdot u^2}{D}} \Rightarrow$$

$$x = \pm \sqrt{(0,5\text{m})^2 - \frac{0,2\text{kg} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{8 \frac{\text{N}}{\text{m}}}} \Rightarrow$$

$$x = \pm \sqrt{0,25 - \frac{0,2 \cdot \frac{10}{4}}{8}} \text{ m} \Rightarrow$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}} \text{ m} \Rightarrow$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ m}$$

Επειδή όμως $a > 0$ προκύπτει: $x = -\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ m}$

Άρα από τη σχέση (1) με αντικατάσταση:

$$\frac{dU}{dt} = D \cdot x \cdot u = 8 \frac{\text{N}}{\text{m}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ m} \right) \cdot \frac{\pi}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -\sqrt{3} \cdot \pi \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Άσκηση 4.

Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. και τη χρονική στιγμή $t=0$ έχει απομάκρυνση $x=+\sqrt{2}$ m και ταχύτητα $u=-\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Το σώμα μετά από μία πλήρη ταλάντωση έχει διαγράψει τροχιά μήκους $d=8$ m

Να υπολογιστούν:

- Η περίοδος της ταλάντωσης.
- Η αρχική φάση της ταλάντωσης.
- Να βρεθεί η εξίσωση της επιτάχυνσης σε σχέση με το χρόνο.
- Να υπολογιστεί ο λόγος της κινητικής προς τη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t=0$.

Λύση

α) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t=0$:

$$E = K + U \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot D A^2 = \frac{1}{2} m u^2 + \frac{1}{2} D x^2 \quad (D = m \omega^2) \Rightarrow$$

$$m \omega^2 A^2 = m u^2 + m \omega^2 x^2 \Rightarrow$$

$$u^2 = \omega^2 (A^2 - x^2) \quad (1)$$

Σε μια πλήρη ταλάντωση το σώμα έχει διαγράψει τροχιά μήκους $4A$ άρα:

$$d = 4A \Rightarrow 8 = 4A \Rightarrow A = 2 \text{ m}$$

Έτσι με αντικατάσταση η (1) γίνεται:

$$\left(-\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = \omega^2 (4 - 2) \text{m}^2 \Rightarrow$$

$$\omega^2 = \left(1 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (\omega > 0) \text{ άρα}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow$$

$$1 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi \text{ s}$$

Β) Για τον υπολογισμό της αρχικής φάσης από την εξίσωση της απομάκρυνσης προκύπτει για $t = 0$ και $x = +\sqrt{2} \text{ m}$:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$\sqrt{2} \text{ m} = 2 \text{ m} \cdot \eta\mu\varphi_0 \Rightarrow$$

$$\eta\mu\varphi_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ άρα } \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ ή } \varphi_0 = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{4}) = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$$

για την 1^η λύση επειδή $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \Rightarrow$

$$0 \leq 2k\pi + \frac{\pi}{4} < 2\pi \text{ άρα } k = 0 \text{ και } \varphi_0 = \frac{\pi}{4}$$

για την 2^η λύση επειδή $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \Rightarrow$

$$0 \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{4} < 2\pi \text{ άρα } k = 0 \text{ και } \varphi_0 = \frac{3\pi}{4}$$

Από την εξίσωση της ταχύτητας για $t = 0$ και $\varphi_0 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$$u = u_{\max} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} \text{ άρα } u > 0$$

Ομοίως για $t = 0$ και $\varphi_0 = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow$

$$u = u_{\max} \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{4} \text{ άρα } u < 0$$

Επειδή λοιπόν τη χρονική στιγμή $t = 0$ η ταχύτητα είναι αρνητική η αρχική φάση είναι

$$\varphi_0 = \frac{3\pi}{4}$$

γ) Το πλάτος της επιτάχυνσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$a_{\max} = \omega^2 \cdot A$$

$$a_{\max} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Η εξίσωση της επιτάχυνσης είναι:

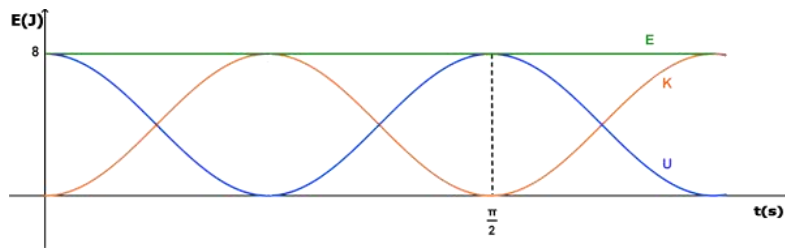
$$a = -a_{\max} \eta \mu(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = -2\eta \mu\left(t + \frac{3\pi}{4}\right) \text{ S.I}$$

$$\delta) \frac{K}{U} = \frac{E - U}{U} = \frac{\frac{1}{2}DA^2 - \frac{1}{2}Dx^2}{\frac{1}{2}Dx^2} = \frac{4 - 2}{2} = 1$$

Άσκηση 5.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης σε σχέση με το χρόνο.



Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η επιτάχυνση είναι $a = +a_{\max}$. Αν η σταθερά επαναφοράς είναι

$$D = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \text{ να υπολογιστούν:}$$

α) Το πλάτος της ταλάντωσης.

β) Η μάζα του ταλαντευόμενου σώματος.

γ) Η χρονική στιγμή t στην οποία η κινητική και η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης γίνονται ίσες για 1^η φορά μετά τη στιγμή $t = 0$.

δ) Η μέγιστη δύναμη επαναφοράς και να γραφεί η συνάρτηση δύναμης επαναφοράς-χρόνου.

Λύση

α) Από το διάγραμμα προκύπτει ότι: $E = 8 \text{ J}$, και $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = \pi \text{ s}$

$$E = \frac{1}{2} D A^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{D}} \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\frac{2 \cdot 8 \text{ J}}{100 \frac{\text{N}}{\text{m}}}} \Rightarrow A = \pm \frac{4}{10} \text{ m} \Rightarrow A = \pm 0,4 \text{ m} \text{ άρα το πλάτος της ταλάντωσης είναι}$$

$$A = 0,4 \text{ m}.$$

$$\beta) D = m \cdot \omega^2 \Rightarrow \left(\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$$

$$100 \frac{\text{N}}{\text{m}} = m \cdot \left(2 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 \Rightarrow m = 25 \text{ kg}$$

γ) Από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι τη χρονική στιγμή $t=0$ η δυναμική ενέργεια είναι μέγιστη και επομένως το σώμα είναι σε ακραία θέση.

Επειδή όμως $a = +a_{\max}$ βρίσκεται στο $x = -A$

Έτσι από την εξίσωση της απομάκρυνσης για $t=0$ και $x = -A$ προκύπτει:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow -A = A \eta\mu\varphi_0 \Rightarrow$$

$$\eta\mu\varphi_0 = -1 \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Επειδή } 0 \leq \varphi_0 < 2\pi \Rightarrow 0 \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2} < 2\pi \text{ άρα } k=0 \text{ και } \varphi_0 = \frac{3\pi}{2} \text{ rad.}$$

Ισχύει $K = U$ άρα εφαρμόζουμε αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης για να βρούμε την απομάκρυνση

$$E = K + U \Rightarrow E = U + U \Rightarrow E = 2U \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot D A^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} D x^2 \Rightarrow$$

$$x^2 = \frac{A^2}{2} \Rightarrow$$

$$x = \pm \frac{A}{\sqrt{2}} = \pm \frac{A\sqrt{2}}{2}$$

Όμως επειδή τη χρονική στιγμή $t=0$ το σώμα βρίσκεται στο $x = -A$, προκύπτει ότι η κινητική και η δυναμική ενέργεια γίνονται ίσες για 1^η φορά όταν $x = -\frac{A\sqrt{2}}{2}$.

Από την εξίσωση της απομάκρυνσης

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$-\frac{A\sqrt{2}}{2} = A \cdot \eta\mu\left(2t + \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\eta\mu\left(2t + \frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (S.I.)}$$

Άρα

$$2t + \frac{3\pi}{2} = 2k\pi + \frac{7\pi}{4} \quad (1)$$

ή

$$2t + \frac{3\pi}{2} = 2k\pi + \pi - \frac{7\pi}{4} \quad (2)$$

Πρέπει: $0 < t < \frac{T}{4}$, $T = \pi$ s

$$(1) \Rightarrow 2t = 2k\pi + \frac{7\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$t = k\pi + \frac{\pi}{8}$$

$$0 < k\pi + \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$-\frac{\pi}{8} < k\pi < \frac{\pi}{8} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{8} < k < \frac{1}{8} \Rightarrow k = 0 \text{ άρα } t = \frac{\pi}{8} \text{ s}$$

$$(2) \Rightarrow 2t + \frac{3\pi}{2} = 2k\pi + \pi - \frac{7\pi}{4} = 2k\pi - \frac{3\pi}{4} = 2k\pi + 2\pi - \frac{3\pi}{4} \Rightarrow$$

$$2t + \frac{3\pi}{2} = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \Rightarrow$$

$$2t = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$t = k\pi - \frac{\pi}{8}$$

$$0 < k\pi - \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{8} < k\pi < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \Rightarrow \frac{\pi}{8} < k\pi < \frac{3\pi}{8} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{8} < k < \frac{3}{8}, \text{ επειδή } k \text{ ακέραιος, δεν υπάρχει λύση.}$$

Τελικά έχουμε μόνο μία λύση την $t = \frac{\pi}{8}$ s

δ) $F_{\max} = m a_{\max} \Rightarrow$

$$F_{\max} = m \omega^2 \cdot A \Rightarrow$$

$$F_{\max} = 25 \text{ kg} \cdot \left(2 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 \cdot 0,4 \text{ m} \Rightarrow$$

$$F_{\max} = 40 \text{ N}$$

Η εξίσωση δύναμης επαναφοράς-χρόνου είναι:

$$F = -F_{\max} \cdot \eta \mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$F = -40 \cdot \eta \mu\left(2 \cdot t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Άσκηση 6.

Μια σφαίρα μάζας $m=2 \text{ kg}$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γωνιακής συχνότητας $\omega=10 \text{ rad/s}$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στη θέση όπου έχει τη μέγιστη τιμή της δύναμης επαναφοράς της ταλάντωσης $F_{\max}=+20 \text{ N}$.

α) Να υπολογίσετε τη περίοδο και το πλάτος της ταλάντωσης.

β) Να γράψετε τη συνάρτηση απομάκρυνσης - χρόνου και να την παραστήσετε γραφικά σε κατάλληλα βαθμολογημένους άξονες. Η αρχική φάση έχει πεδίο τιμών $[0, 2\pi)$.

γ) Να βρείτε την ταχύτητα της σφαίρας τη στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{4} \text{ s}$.

δ) Να βρείτε τη δυναμική και την κινητική ενέργεια ταλάντωσης της σφαίρας τη στιγμή t_1 .

Λύση

α) Η περίοδος T της αρμονικής ταλάντωσης, υπολογίζεται απ' τη γωνιακή συχνότητα:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,2\pi \text{ s}.$$

Γνωρίζουμε ότι η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$D = m\omega^2 = 2 \cdot 10^2 = 200 \text{ N/m}.$$

Από τη συνθήκη της απλής αρμονικής ταλάντωσης (ΑΑΤ) $F = -D \cdot x$, καταλαβαίνουμε ότι τη χρονική στιγμή $t=0$, η σφαίρα δέχεται τη μέγιστη δύναμη επαναφοράς όταν βρίσκεται στο αρνητικό ακρότατο. Έτσι: $F_{\max} = -D \cdot (-A) \Rightarrow A = \frac{F_{\max}}{D} = \frac{20\text{N}}{200\text{N/m}} = 0,1 \text{ m}$.

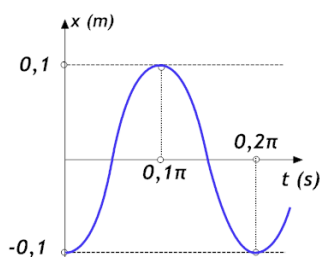
$$\text{στο αρνητικό ακρότατο. Έτσι: } F_{\max} = -D \cdot (-A) \Rightarrow A = \frac{F_{\max}}{D} = \frac{20\text{N}}{200\text{N/m}} = 0,1 \text{ m}.$$

β) Για να βρούμε την αρχική φάση φ_0 , θέτουμε στη χρονική εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου, $t=0$ και $x_{\text{αρχ}}=-A$, οπότε: $-A = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{-A}{A} = -1 \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$.

Επειδή όμως η αρχική φάση βρίσκεται μεταξύ 0 και 2π , θέτουμε $k=0$, οπότε $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$

Συνεπώς η χρονική εξίσωση $x - t$ είναι η: $x = 0,1\eta\mu(10t + \frac{3\pi}{2})$ (S.I.).

Η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



γ) Η χρονική εξίσωση ταχύτητας - χρόνου t είναι η: $v = v_{\max} \sin(\omega t + \phi_0)$, με

$$v_{\max} = \omega A = (10 \text{ rad/s}) \cdot 0,1 \text{ m} = 1 \text{ m/s}.$$

Έτσι την $t_1 = \frac{\pi}{4} \text{ s}$, η ταχύτητα είναι: $v_1 = \sin(10 \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}) = \sin(4\pi) \Rightarrow v_1 = 1 \text{ m/s}.$

δ) Η κινητική ενέργεια τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} 2 \text{ kg} \cdot 1^2 \text{ m}^2 / \text{s}^2 \Rightarrow$

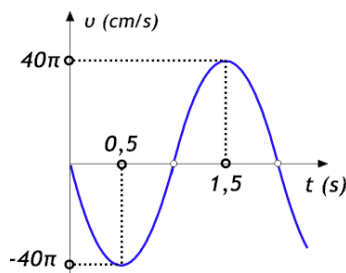
$$K_1 = 1 \text{ J}.$$

Η δυναμική ενέργεια θα υπολογιστεί από τη Διατήρηση της Ενέργειας:

$$K_1 + U_1 = E \Rightarrow U_1 = E - K_1 = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 - K_1 = 1 - 1 \Rightarrow U_1 = 0 \text{ J}.$$

Άσκηση 7.

Το διάγραμμα του σχήματος παριστάνει την ταχύτητα σε συνάρτηση με το χρόνο ενός σώματος μάζας $m=0,5 \text{ kg}$, που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.



- Να υπολογίσετε τη γωνιακή συχνότητα ω και το πλάτος A της ταλάντωσης.
- Να βρείτε την αρχική φάση της ταλάντωσης. Η αρχική φάση έχει πεδίο τιμών $[0, 2\pi)$.
- Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της συνισταμένης δύναμης, που δέχεται το σώμα.
- Να βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσης στις θέσεις όπου η κινητική ενέργεια της ταλάντωσης είναι το 75% της ολικής ενέργειας.

Δίνεται: $\pi^2 \approx 10$.

Λύση

- Από το διάγραμμα ταχύτητας v - χρόνου t , που δίνεται, παρατηρούμε (απ' τον οριζόντιο άξονα των t), ότι $\frac{T}{4} = 0,5 \text{ s} \Rightarrow T = 2 \text{ s}$.

Η γωνιακή συχνότητα υπολογίζεται απ' τη σχέση: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} \Rightarrow \omega = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Γνωρίζουμε ότι η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $v_{\max} = \omega \cdot A$.

Από το διάγραμμα ταχύτητας v - χρόνου t , που δίνεται, παρατηρούμε (απ' τον κατακόρυφο άξονα των v), ότι η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης είναι:

$$v_{\max} = 40\pi \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 0,4\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$\text{Άρα: } A = \frac{v_{\max}}{\omega} = \frac{0,4\pi \text{ m/s}}{\pi \text{ rad/s}} \Rightarrow A = 0,4 \text{ m}.$$

- Γνωρίζουμε από τη θεωρία, ότι όταν ο αρμονικός ταλαντωτής βρίσκεται στα δύο ακραία σημεία της ταλάντωσης, έχει μηδενική ταχύτητα. Πιο συγκεκριμένα αν βρίσκεται στο θετικό ακρότατο, αμέσως μετά κινείται προς τη Θ.Ι. κινούμενος στην αρνητική φορά (άρα έχει αρνητική ταχύτητα), ενώ αν βρίσκεται στο αρνητικό ακρότατο, κινείται προς τη Θ.Ι. έχοντας θετική φορά κίνησης, δηλαδή θετική ταχύτητα.

Από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι τη χρονική στιγμή $t=0$, το σώμα έχει μηδενική ταχύτητα και αμέσως μετά το σώμα έχει αρνητική τιμή ταχύτητας.

Συνεπώς με βάση τα παραπάνω το σώμα θα βρίσκεται στο θετικό ακρότατο, δηλαδή $x_0 = +A$.

Αντικαθιστώντας τώρα στη χρονική εξίσωση απομάκρυνσης, βρίσκουμε την αρχική φάση

ως εξής: $A = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot 0 + \varphi_0) \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ και για $k=0$,

προκύπτει: $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

γ) Γνωρίζουμε ότι η συνισταμένη δύναμη επαναφοράς βρίσκεται από τη Συνθήκη της απλής αρμονικής ταλάντωσης: $F = -D \cdot x = -m\omega^2 \cdot A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$. Αντικαθιστώντας στο S.I. έχουμε:

$$F = -0,5 \cdot \pi^2 \cdot 0,4 \cdot \eta\mu(\pi t + \frac{\pi}{2}) = -0,5 \cdot 10 \cdot 0,4 \cdot \eta\mu(\pi t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow F = -2 \cdot \eta\mu(\pi t + \frac{\pi}{2}) \text{ (S.I.)}.$$

δ) Γνωρίζουμε ότι, σε μια απλή αρμονική ταλάντωση, η επιτάχυνση υπολογίζεται από τη σχέση: $a = -\omega^2 \cdot x$ και το μέτρο της: $|a| = \omega^2 \cdot |x|$.

Με βάση το γεγονός ότι σε μια αμείωτη απλή αρμονική ταλάντωση, η ολική ενέργεια διατηρείται: $K + U = E$, αφού η κινητική ενέργεια είναι το 75% της ολικής ενέργειας E , συμπεραίνουμε ότι η δυναμική ενέργεια θα είναι το 25% της E . Άρα:

$$U = \frac{25}{100} E = \frac{1}{4} E \Rightarrow \frac{1}{2} D \cdot x^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} D \cdot A^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} A^2 \Rightarrow x = \pm \frac{A}{2} \text{ ή το μέτρο της } |x| = \frac{A}{2}.$$

Έτσι: $|a| = \omega^2 \frac{A}{2} = (\pi \text{ rad/s})^2 \cdot \frac{0,4}{2} \text{ m} \Rightarrow |a| = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Άσκηση 8.

Ένα σώμα με μάζα $m=0,1 \text{ kg}$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, μεταξύ δύο ακραίων θέσεων που απέχουν $d=40 \text{ cm}$. Ο ελάχιστος χρόνος μετάβασης του σώματος από τη μια ακραία θέση στην άλλη είναι $\Delta t=0,1\pi \text{ s}$. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ το σώμα διέρχεται από τη θέση $x_0 = 0,1\sqrt{2} \text{ m}$ και το μέτρο της ταχύτητάς του μειώνεται.

α) Να βρείτε το πλάτος A και τη γωνιακή συχνότητα ω της ταλάντωσης.

β) Πόση ενέργεια E προσφέραμε στο σώμα για να το θέσουμε σε ταλάντωση;

γ) Να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια του σώματος, κάποια χρονική στιγμή, όταν έχει μέτρο ταχύτητας $v_1 = \sqrt{3} \text{ m/s}$.

δ) Να υπολογίσετε την αρχική φάση φ_0 ταλάντωσης. Η αρχική φάση έχει πεδίο τιμών $[0, 2\pi)$.

ε) Να υπολογίσετε την απομάκρυνση και τη δυναμική ενέργεια του σώματος, τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{3T}{4}$.

Δίνεται: $\eta\mu \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι η απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης είναι $2A$, οπότε: $d = 2A = 0,4\text{m} \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$. Επίσης γνωρίζουμε ότι ο ελάχιστος χρόνος μετάβασης από τη μια ακραία θέση στην άλλη είναι $\frac{T}{2}$. Άρα

$$\Delta t = \frac{T}{2} = 0,1\pi \text{ s} \Rightarrow T = 0,2\pi \text{ s}.$$

Η σχέση γωνιακής συχνότητας - περιόδου είναι: $T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,2\pi} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

β) Γνωρίζουμε ότι η ενέργεια που προσφέρουμε για να το θέσουμε σε ταλάντωση είναι ίση με την ολική ενέργεια E της ταλάντωσης, η οποία θα υπολογιστεί από τη σχέση:

$$E = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} 0,1\text{kg} \cdot (10\text{rad/s})^2 \cdot (0,2\text{m})^2 \Rightarrow E = 0,2 \text{ J}.$$

γ) Η δυναμική ενέργεια του σώματος σε συνάρτηση της ταχύτητας θα προκύψει από τη

Διατήρηση της Ενέργειας: $K + U = E \Rightarrow U = E - K = E - \frac{1}{2} m v^2$.

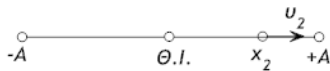
Αντικαθιστώντας στο S.I. έχουμε: $U_1 = 0,2\text{J} - \frac{1}{2}0,1\text{kg} \cdot (\sqrt{3})^2\text{m}^2/\text{s}^2 = (0,2 - 0,15)\text{J} \Rightarrow$
 $U_1 = 0,05\text{J}.$

δ) Στη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης, επειδή για $t=0\text{ s}$ έχω $x_0 = 0,1\sqrt{2}\text{ m}$, αντικαθιστώ και βρίσκω την αρχική φάση:

$$0,1\sqrt{2} = 0,2\eta\mu(10 \cdot 0 + \varphi_0) \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ ή } \varphi_0 = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \text{ και για } k=0, \varphi_0 = \frac{\pi}{4}\text{rad ή } \varphi_0 = \frac{3\pi}{4}\text{rad}.$$

Η 1^η λύση δίνει $v_1 = v_{\max}\sin\frac{\pi}{4} > 0$, ενώ η 2^η $v_1 = v_{\max}\sin\frac{3\pi}{4} < 0$. Επειδή το μέτρο της ταχύτητάς του μειώνεται, το σώμα κινείται προς το ακραίο σημείο, δηλαδή έχει φορά (και συνεπώς ταχύτητα) θετική. Έτσι δεχόμαστε την 1^η λύση, δηλαδή $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}\text{rad}.$



ε) Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης είναι της μορφής: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ και αντικαθιστώντας τις τιμές των A , ω , φ_0 , που ήδη έχουμε βρει: $x = 0,2\eta\mu(10t + \frac{\pi}{4})$ (S.I.).

Τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{3T}{4} = \frac{3 \cdot 0,2\pi}{4} = \frac{0,3\pi}{2}\text{s}$ η απομάκρυνση είναι:
 $x_2 = 0,2\eta\mu(10 \frac{0,3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}) = 0,2\eta\mu\frac{7\pi}{4} = -0,1\sqrt{2}\text{ m}.$

Γνωρίζουμε ότι η δυναμική ενέργεια του σώματος είναι ίση με: $U = \frac{1}{2}Dx^2$ και αντικαθιστώντας βρίσκουμε:

$$U_2 = \frac{1}{2}Dx_2^2 = \frac{1}{2}0,1 \cdot 100 \cdot (-0,1\sqrt{2})^2 \Rightarrow U_2 = 0,1\text{J}.$$

Άσκηση 9.

Ένα σώμα, μάζας $m=0,5 \text{ kg}$, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα $f = \frac{5}{\pi} \text{ Hz}$, ενώ διανύει σε κάθε περίοδο της ταλάντωσής του διάστημα $d=2 \text{ m}$. Το σώμα δέχεται κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του, και στη διεύθυνση της κίνησής του, δύο δυνάμεις F_1 και F_2 , εκ των οποίων η F_2 είναι σταθερή με μέτρο $F_2=10 \text{ N}$ και φορά αρνητική. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το σημείο διέρχεται επιταχυνόμενο από τη θέση $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ m}$.

- Να υπολογίσετε το πλάτος και τη σταθερά επαναφοράς D της ταλάντωσης.
- Να υπολογίσετε την αρχική φάση φ_0 της ταλάντωσης. Η αρχική φάση έχει πεδίο τιμών $[0, 2\pi)$.
- Να υπολογίσετε το ποσοστό % της κινητικής ενέργειας του σώματος ως προς την ολική ενέργεια ταλάντωσης, τη χρονική στιγμή $t=0$.
- Να γράψετε την εξίσωση της δύναμης F_1 σε συνάρτηση με το χρόνο.

Λύση

α) Επειδή σε κάθε πλήρη ταλάντωση το σώμα διανύει διάστημα $d = 4A \Rightarrow A = \frac{d}{4} \Rightarrow A = 0,5 \text{ m}$.

Η γωνιακή συχνότητα ω ισούται με: $\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{5}{\pi} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Γνωρίζουμε ότι η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης, δίνεται από τη σχέση:

$$D = m \cdot \omega^2 \xrightarrow{\text{s.i.}} D = 0,5 \cdot 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \Rightarrow D = 50 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

β) Στην απλή αρμονική ταλάντωση, η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης έχει τη μορφή: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$. Επειδή για $t=0\text{s}$ έχω $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ m}$, αντικαθιστώ τα δεδομένα

αυτά και: $-\frac{\sqrt{3}}{4} = 0,5\eta\mu(10 \cdot 0 + \varphi_0) \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu(-\frac{\pi}{3}) \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi - \frac{\pi}{3}$ ή

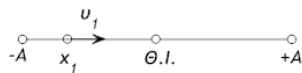
$$\varphi_0 = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi + \frac{4\pi}{3}.$$

Για $k=1$, η 1^η δίνει $\varphi_0 = \frac{5\pi}{3}$ και για $k=0$ η 2^η δίνει $\varphi_0 = \frac{4\pi}{3}$.

Η 1^η λύση δίνει $v_1 = v_{\max} \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{3} > 0$ ενώ η 2^η $v_1 = v_{\max} \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{3} < 0$.

Επειδή το σώμα βρίσκεται στον αρνητικό ημιάξονα (απομάκρυνση αρνητική) και επιταχύνεται, άρα κινείται προς τη θέση ισορροπίας του, οπότε απ' το σχήμα φαίνεται ότι έχει φορά κίνησης (και συνεπώς ταχύτητα) θετική. Έτσι δεχόμαστε την 1^η λύση,

$$\text{δηλαδή } \varphi_0 = \frac{5\pi}{3}.$$



γ) Το ζητούμενο ποσοστό είναι: $\frac{K_1}{E} 100\%$.

Η κινητική ενέργεια θα υπολογιστεί από τη Διατήρηση της Ενέργειας:

$$K_1 = E - U_1 = \frac{1}{2}DA^2 - \frac{1}{2}Dx_1^2 = \frac{1}{2}D(A^2 - x_1^2), \quad \text{οπότε:}$$

$$\frac{K_1}{E} 100\% = \frac{\frac{1}{2}D(A^2 - x_1^2)}{\frac{1}{2}DA^2} 100\% = \frac{A^2 - x_1^2}{A^2} 100\% = \frac{0,5^2 - (-\frac{\sqrt{3}}{4})^2}{0,5^2} 100\% = \frac{1}{4} 100\% \Rightarrow$$

$$\frac{K_1}{E} 100\% = 25\%.$$

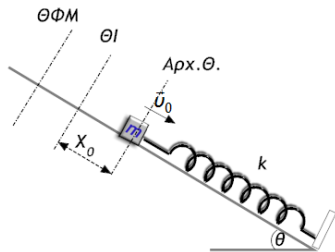
δ) Γνωρίζουμε ότι η συνισταμένη των δυνάμεων $\Sigma F = F_1 + F_2$ (όπου F_1, F_2 είναι οι αλγεβρικές τιμές των δυνάμεων) είναι η δύναμη επαναφοράς της ταλάντωσης. Άρα:

$$\Sigma F = F_1 + F_2 = -D \cdot x \Rightarrow F_1 + F_2 = -D \cdot A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \text{ και αντικαθιστώντας στο S.I. έχουμε:}$$

$$F_1 + (-10) = -50 \cdot 0,5 \cdot \eta\mu(10t + \frac{5\pi}{3}) \Rightarrow F_1 = 10 - 25\eta\mu(10t + \frac{5\pi}{3}) \text{ (S.I.)}.$$

Άσκηση 10.

Το κάτω άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς $k=100 \text{ N/m}$, είναι ακλόνητα στερεωμένο στη βάση λείου κεκλιμένου επιπέδου, γωνίας κλίσης $\theta=30^\circ$. Στο πάνω άκρο του ισορροπεί δεμένο σώμα, αμελητέων διαστάσεων, μάζας $m=1 \text{ kg}$. Συμπιέζουμε το ελατήριο επιπλέον κατά $x_0=0,1 \text{ m}$ και τη χρονική στιγμή $t=0$, εκτοξεύουμε το σώμα με ταχύτητα μέτρου $v_0=\sqrt{3} \text{ m/s}$ με φορά προς τα κάτω παράλληλη προς το κεκλιμένο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το σύστημα εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση και να βρείτε τη συχνότητά της.

β) Να υπολογίσετε το πλάτος ταλάντωσης A .

γ) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο. Θεωρήστε θετική φορά την προς τα κάτω. Η αρχική φάση έχει πεδίο τιμών $[0, 2\pi)$.

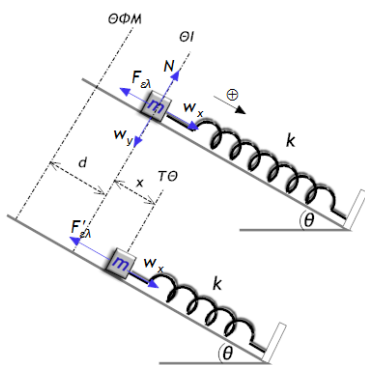
δ) Να υπολογίσετε τη δύναμη του ελατηρίου στις θέσεις όπου μηδενίζεται η κινητική ενέργεια του σώματος.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10 \text{ m/s}^2$.

Λύση

α) Σημειώνουμε τις δυνάμεις στη θέση ισορροπίας (ΘI), αναλύουμε το βάρος w σε συνιστώσες w_x και w_y και εφαρμόζουμε τη συνθήκη ισορροπίας στον x -άξονα:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow w_x = F_{ελ} \Rightarrow w_x = k \cdot d.$$



Θεωρούμε θετική φορά την προς τα κάτω και τοποθετούμε το σώμα σε μια τυχαία θέση (ΤΘ) θετικής απομάκρυνσης x απ' τη ΘΙ του. Υπολογίζουμε τώρα τη συνισταμένη δύναμη:

$$\Sigma F_x = w_x - F'_{ελ} = k \cdot d - k(x+d) = k \cdot d - k \cdot x - k \cdot d = -k \cdot x.$$

Συγκρίνοντας την με τη Συνθήκη της απλής αρμονικής ταλάντωσης: $\Sigma F = -D \cdot x$, προκύπτει ότι το σώμα θα εκτελέσει γραμμική αρμονική ταλάντωση με $D = k$, και

$$\text{συχνότητα: } f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \xrightarrow{\text{S.I.}} f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{100 \text{ N/m}}{1 \text{ kg}}} \Rightarrow f = \frac{5}{\pi} \text{ Hz}.$$

β) Το πλάτος ταλάντωσης θα υπολογιστεί με εφαρμογή της Διατήρησης της ενέργειας στην αρχική θέση και στη θέση μέγιστης απομάκρυνσης:

$$K_0 + U_0 = E \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow A^2 = \frac{m v_0^2 + k x_0^2}{k} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{m v_0^2 + k x_0^2}{k}} \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\frac{1 \text{ kg} \cdot 3 \text{ m}^2 / \text{s}^2 + 10^2 \text{ N/m} \cdot 10^{-2} \text{ m}^2}{10^2 \text{ N/m}}} \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}.$$

γ) Η εξίσωση απομάκρυνσης είναι της μορφής: $x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0)$, οπότε πρέπει να βρούμε επιπλέον τη γωνιακή συχνότητα και την αρχική φάση.

$$\text{Η γωνιακή συχνότητα είναι: } \omega = 2\pi f = 2\pi \frac{5 \text{ rad}}{\pi \text{ s}} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Επειδή για $t=0$ s έχω $x_0=0,1$ m, αντικαθιστώ και βρίσκω την αρχική φάση:

$$0,1 = 0,2 \eta \mu(10 \cdot 0 + \varphi_0) \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = \frac{1}{2} = \eta \mu \frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } \varphi_0 = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \text{ και για να είναι } 0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ θέτω } k=0,$$

$$\text{δηλαδή: } \varphi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ ή } \varphi_0 = \frac{5\pi}{6}.$$

$$\text{Η 1}^{\text{η}} \text{ λύση δίνει } v_1 = v_{\max} \sigma \upsilon \nu \frac{\pi}{6} > 0 \text{ ενώ η 2}^{\text{η}} \text{ } v_1 = v_{\max} \sigma \upsilon \nu \frac{5\pi}{6} < 0. \text{ Επειδή η αρχική}$$

ταχύτητα έχει θετική φορά, δεχόμαστε την 1^η λύση, δηλαδή $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$.

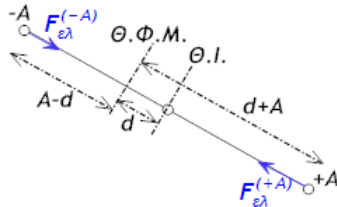
$$\text{Άρα η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης είναι: } x = 0,2 \eta \mu(10t + \frac{\pi}{6}) \text{ (S.I.).}$$

δ) Οι θέσεις όπου μηδενίζεται η κινητική ενέργεια του σώματος είναι τα δύο ακρότατα της ταλάντωσης. Γνωρίζουμε ότι το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου, σύμφωνα με το

Νόμο του Hooke, υπολογίζεται από τη σχέση: $F_{ελ} = k\Delta\ell$, όπου $\Delta\ell$ είναι η απόσταση από τη Θέση Φυσικού Μήκους (ΘΦΜ) του ελατηρίου.

Η Θέση Ισορροπίας (Θ.Ι.) απέχει d από τη ΘΦΜ, που μπορεί να υπολογιστεί από τη

Συνθήκη Ισορροπίας: $w_x = k \cdot d \Rightarrow d = \frac{m \cdot g \cdot \eta \mu \theta}{k} \Rightarrow d = \frac{10 \text{ kg} \cdot \frac{1}{2} \text{ m/s}^2}{100 \text{ N/m}} \Rightarrow d = 0,05 \text{ m}.$



Απ' το σχήμα φαίνεται ότι:

✓ το πάνω (αρνητικό) ακρότατο απέχει $A-d=0,2-0,05=0,15 \text{ m}$ από τη Θ.Φ.Μ., και η δύναμη ελατηρίου έχει φορά προς τα κάτω (θετική), άρα:

$$F_{ελ}^{(-A)} = k(A-d) \Rightarrow F_{ελ}^{(-A)} = 100 \text{ N/m} \cdot 0,15 \text{ m} \Rightarrow F_{ελ}^{(-A)} = 15 \text{ N}.$$

✓ το κάτω (θετικό) ακρότατο απέχει $A+d=0,2+0,05=0,25 \text{ m}$ από τη Θ.Φ.Μ., και η δύναμη ελατηρίου έχει φορά προς τα πάνω (αρνητική), άρα:

$$F_{ελ}^{(+A)} = -k(A+d) \Rightarrow F_{ελ}^{(+A)} = 100 \text{ N/m} \cdot 0,25 \text{ m} \Rightarrow F_{ελ}^{(+A)} = 25 \text{ N}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Ένα σώμα, μάζας $m=2\text{ kg}$, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η απόσταση των ακραίων θέσεων του υλικού σημείου είναι $d=0,4\text{ m}$ και τη χρονική στιγμή $t_0=0$ διέρχεται απ' τη θέση $x_1=0,1\text{ m}$, έχοντας ταχύτητα μέτρου $v_1=2\sqrt{3}\text{ m/s}$ με φορά προς τη θέση ισορροπίας του.

- Να υπολογίσετε το πλάτος A και τη σταθερά επαναφοράς D της ταλάντωσης.
- Να παραστήσετε γραφικά την κινητική του ενέργεια σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του, σε κατάλληλα βαθμολογημένους άξονες στο S.I.
- Να υπολογίσετε την γωνιακή συχνότητα ω και την αρχική φάση της φ_0 ταλάντωσης. Η αρχική φάση έχει πεδίο τιμών $[0,2\pi)$.
- Να βρείτε ποια χρονική στιγμή περνά, για πρώτη φορά, από την ακραία θετική θέση.

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι η απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων της ταλάντωσης είναι $2A$,

$$\text{άρα: } d = 2A \Rightarrow A = \frac{d}{2} \Rightarrow A = 0,2\text{ m}.$$

Με βάση τη Διατήρηση της Ενέργειας, εξισώνουμε την ενέργεια ταλάντωσης στην αρχική θέση x_1 και στη θέση μέγιστης απομάκρυνσης, έχουμε:

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Dx_1^2 = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow mv_1^2 = D(A^2 - x_1^2) \Rightarrow D = \frac{mv_1^2}{A^2 - x_1^2} \Rightarrow$$

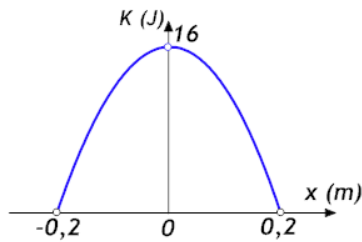
$$D = \frac{2\text{kg} \cdot (2\sqrt{3}\text{m/s})^2}{(0,2\text{m})^2 - (0,1\text{m})^2} \Rightarrow D = 800\text{ N/m}.$$

β) Βρίσκουμε πρώτα τη συνάρτηση Κινητικής ενέργειας K - απομάκρυνσης x , σε μια τυχαία θέση της απλής αρμονικής ταλάντωσης, εφαρμόζοντας τη Διατήρηση της Ενέργειας:

$$K + U = E \Rightarrow K + \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}DA^2 - \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow K = 400 \cdot 0,04 - 400x^2 \Rightarrow$$

$$K = 16 - 400x^2 \text{ (S.I.)}.$$

Αυτή είναι μια εξίσωση παραβολής με «τα κοίλα» προς τα κάτω, που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



γ) Γνωρίζουμε ότι χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης είναι της μορφής: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$, οπότε χρειαζόμαστε ακόμη την γωνιακή συχνότητα ω και την αρχική φάση φ_0 .

Από τη σχέση ορισμού της σταθεράς επαναφοράς, έχουμε:

$$D = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{800}{2}} = 20 \text{ rad/s}.$$

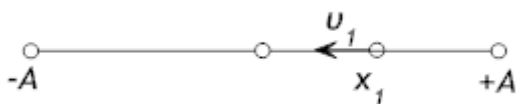
Από την εκφώνηση προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή $t=0$, το υλικό σημείο έχει απομάκρυνση $x_1=0,1$ m και εφόσον έχει φορά προς τη θέση ισορροπίας του, θα έχει αρνητική φορά κίνησης, άρα αρνητική ταχύτητα. Έτσι:

$$0,1 = 0,2\eta\mu(20 \cdot 0 + \varphi_0) \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{1}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } \varphi_0 = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

και για $k=0$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ ή $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$.

Η 1^η λύση δίνει $v_1 = v_{\max} \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} > 0$ ενώ η 2^η $v_1 = v_{\max} \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} < 0$, οπότε δεχόμαστε τη 2^η

λύση, δηλαδή $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$.



δ) Η εξίσωση της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με το χρόνο t είναι της μορφής: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$. Αντικαθιστώντας τις τιμές των A , ω και φ_0 , που

υπολογίσαμε προηγουμένως, έχουμε $x = 0,2\eta\mu(20t + \frac{5\pi}{6})$ (S.I.).

Όταν περνά από το θετικό ακρότατο, θα έχει $x = +0,2\text{m}$. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση $x - t$ και λύνουμε την τριγωνομετρική εξίσωση ως προς το χρόνο t :

$$0,2 = 0,2\eta\mu(20t + \frac{5\pi}{6}) \Rightarrow \eta\mu(20t + \frac{5\pi}{6}) = 1 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$20t + \frac{5\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 20t = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} = 2k\pi - \frac{\pi}{3}, \text{ με } k=1,2,\dots \text{ (το } k=0 \text{ δεν είναι}$$

δεκτό διότι «δίνει» αρνητικό χρόνο).

Η 1^η φορά που περνά από το +0,2 m αντιστοιχεί στην 1^η δεκτή τιμή του k, που είναι η

$$k=1, \text{ άρα: } 20t = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{12} \text{ s.}$$

Πρόβλημα 2.

Ένα σώμα, αμελητέων διαστάσεων, μάζας m ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k , το πάνω άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Στη θέση Ισορροπίας το ελατήριο ασκεί στο μικρό σώμα δύναμη μέτρου $F_0=1$ N. Ανεβάζουμε το σώμα από τη θέση Ισορροπίας του κατακόρυφα προς τα πάνω έως τη θέση Φυσικού Μήκους του ελατηρίου και τη χρονική στιγμή $t=0$, το εκτοξεύουμε με κατακόρυφη προς τα κάτω ταχύτητα μέτρου u_0 . Το σώμα μετά την εκτόξευσή του εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Το διάστημα που διανύει μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων απ' τη θέση Ισορροπίας του είναι $s=0,4$ m σε χρόνο $\Delta t=\frac{\pi}{10}$ s.

α) Να υπολογίσετε το πλάτος A και τη σταθερά k του ελατηρίου. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10$ m/s².

β) Να βρείτε τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στη θέση, που η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι μηδέν.

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της αρχικής ταχύτητας u_0 .

δ) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος τη χρονική στιγμή $t=0$. Θεωρήστε θετική φορά την προς τα πάνω.

Λύση

α) Επειδή το διάστημα, που διανύει το σώμα, μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων απ' τη

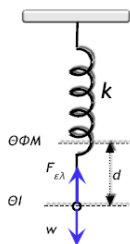
Θ.Ι. του είναι: $s = 2A \Rightarrow A = \frac{s}{2} \Rightarrow A = 0,2$ m .

Η χρονική διάρκεια μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων απ' τη Θ.Ι. του σώματος είναι:

$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 2\Delta t \Rightarrow T = \frac{\pi}{5}$ s και η γωνιακή συχνότητα ω ισούται με:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi \text{ rad}}{\frac{\pi}{5} \text{ s}} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} .$$

Γνωρίζουμε ότι όταν ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση δεμένο στο άκρο ελατηρίου, η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης ισούται με τη σταθερά του ελατηρίου: $k = D = m\omega^2$. (Σχολικό βιβλίο, παράδειγμα 1.1, σελ. 12).



Υπολογίζουμε τη μάζα του σώματος από τη Συνθήκη Ισορροπίας:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ} - mg = 0 \Rightarrow m = \frac{F_0}{g} = 0,1 \text{ kg}$$

$$\text{Άρα: } k = D = m \cdot \omega^2 = 0,1 \cdot 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \Rightarrow k = 10 \frac{\text{N}}{\text{m}} .$$

β) Γνωρίζουμε ότι η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$U_{ελ} = \frac{1}{2} k \Delta \ell^2, \text{ όπου } \Delta \ell \text{ είναι η απόσταση από τη Θέση Φυσικού Μήκους (ΘΦΜ) του ελατηρίου.}$$

Η θέση, που η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι μηδέν, είναι η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης. Άρα ζητείται η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στη ΘΙ, που φαίνεται απ' το σχήμα, απέχει d από τη Θέση Φυσικού Μήκους, οπότε αρκεί να υπολογίσουμε την

$$d, \text{ απ' το Νόμο του Hooke στη Θ.Ι. της ταλάντωσης: } F_0 = kd \Rightarrow d = \frac{F_0}{k} = \frac{1\text{N}}{10\text{N/m}} = 0,1 \text{ m} .$$

Συνεπώς η ζητούμενη δυναμική ενέργεια ελατηρίου θα είναι:

$$U_{ελ} = \frac{1}{2} kd^2 = \frac{1}{2} 10\text{N/m} \cdot 0,1^2 \text{m}^2 \Rightarrow U_{ελ} = 0,05 \text{ J} .$$

γ) Για να υπολογίσουμε την αρχική ταχύτητα, θα εφαρμόσουμε τη Διατήρηση της Ενέργειας στην αρχική θέση και στη θέση μέγιστης απομάκρυνσης:

$$K_0 + U_0 = E \Rightarrow \frac{1}{2} mv_0^2 + \frac{1}{2} kd^2 = \frac{1}{2} kA^2 \Rightarrow v_0^2 = \frac{k(A^2 - d^2)}{m} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{k(A^2 - d^2)}{m}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{10(0,04 - 0,01)}{0,1}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_0 = \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

δ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος υπολογίζεται ως εξής:

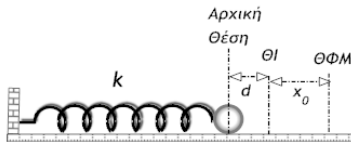
$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt} = \Sigma F \cdot \frac{dx}{dt} = \Sigma F \cdot v = -D \cdot x \cdot v .$$

Τη χρονική στιγμή t=0, το σώμα βρίσκεται σε απομάκρυνση x=d=0,1 m και έχει ταχύτητα μέτρου $\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ με φορά αρνητική, άρα: $v = -\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}} .$

$$\text{Αντικαθιστούμε και βρίσκουμε: } \frac{dK}{dt} = -10\text{N/m} \cdot 0,1\text{m} \cdot (-\sqrt{3})\text{m/s} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \sqrt{3} \frac{\text{J}}{\text{s}} .$$

Πρόβλημα 3.

Μικρή μεταλλική σφαίρα μάζας $m=100\text{ g}$ είναι δεμένη στο δεξιό ελεύθερο άκρο ενός οριζώντιου ελατηρίου σταθεράς $k=10\text{ N/cm}$, του οποίου το αριστερό άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο. Η σφαίρα δέχεται σταθερή δύναμη μέτρου $F=2\cdot 10^2\text{ N}$, της οποίας η διεύθυνση είναι παράλληλη με τον άξονα του ελατηρίου και η φορά προς τ' αριστερά, οπότε η σφαίρα ισορροπεί με το ελατήριο συσπειρωμένο. Εκτρέπουμε τη σφαίρα από τη θέση ισορροπίας της κατά $d=0,1\text{ m}$ προς τ' αριστερά και τη χρονική στιγμή $t=0$ την αφήνουμε ελεύθερη να κινηθεί.



- Να υπολογίσετε την απόσταση x_0 της θέσης ισορροπίας της σφαίρας από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.
- Να αποδείξετε ότι η σφαίρα θα εκτελέσει γραμμική αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε τη γωνιακή συχνότητα καθώς και την ολική ενέργεια της ταλάντωσης.
- Σε ποιο σημείο της τροχιάς έχει ταυτόχρονα μέγιστο μέτρο δύναμης επαναφοράς και δύναμης ελατηρίου; Βρείτε τότε το λόγο των μέτρων της μέγιστης δύναμης επαναφοράς προς τη μέγιστη δύναμη ελατηρίου.
- Τη στιγμή που η σφαίρα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της, καταργείται ακαριαία η δύναμη F . Βρείτε το λόγο της ολικής ενέργειας E' της νέας ταλάντωσης προς την ολική ενέργεια E της αρχικής ταλάντωσης.

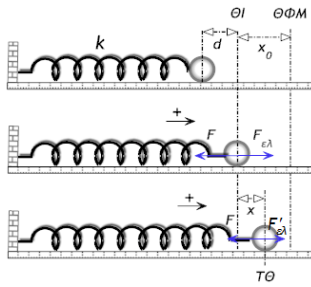
Λύση

- Η σφαίρα θα ισορροπήσει σε απόσταση x_0 αριστερά της Θέσης φυσικού μήκους (ΘΦΜ) του ελατηρίου, δεχόμενη τη σταθερή δύναμη F και την δύναμη ελατηρίου, που έχει φορά προς τη ΘΦΜ, δηλαδή προς τα δεξιά.

Στη Θέση Ισορροπίας: $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{ελ} - F = 0 \Rightarrow F = k \cdot x_0$ (1), οπότε: $x_0 = \frac{F}{k}$.

Μετατρέπουμε τη σταθερά ελατηρίου στο S.I.: $k = 10 \frac{\text{N}}{\text{cm}} = 10 \frac{\text{N}}{10^{-2}\text{ m}} = 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, οπότε στο

S.I.: $x_0 = \frac{200}{1000}\text{ m} \Rightarrow x_0 = 0,2\text{ m}$.



β) Τοποθετούμε τη σφαίρα σε μια τυχαία θέση (ΤΘ) θετικής απομάκρυνσης x απ' τη θέση ισορροπίας της (ΘΙ) και υπολογίζουμε τη συνισταμένη δύναμη στον x -άξονα:

$$\Sigma F = F'_{ελ} - F = k(x_0 - x) - F \text{ και με βάση την (1), } \Sigma F = F'_{ελ} - F = k(x_0 - x) - kx_0 = -k \cdot x.$$

Συγκρίνοντάς την με τη Συνθήκη της απλής αρμονικής ταλάντωσης: $\Sigma F = -D \cdot x$, προκύπτει ότι η σφαίρα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k$, με γωνιακή

$$\text{συχνότητα: } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10^3}{10^{-1}}} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Το σημείο, που την αφήνουμε ελεύθερη είναι το αρνητικό ακρότατο της ταλάντωσης (διότι $u_0=0$), άρα το πλάτος είναι: $A = d = 0,1\text{m}$.

Η ολική ενέργεια της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$E = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} 10^3 \text{ N/m} (10^{-1})^2 \text{ m}^2 = \frac{1}{2} 10^3 10^{-2} \text{ J} \Rightarrow E = 5 \text{ J}.$$

γ) Η δύναμη επαναφοράς της ταλάντωσης μεγιστοποιείται όταν μεγιστοποιείται η απόσταση από τη ΘΙ, ενώ η δύναμη ελατηρίου μεγιστοποιείται όταν μεγιστοποιείται η απόσταση από τη ΘΦΜ. Οι δύο συνθήκες, με βάση το σχήμα, επαληθεύονται ταυτόχρονα όταν το σώμα βρίσκεται στο αρνητικό ακρότατο.

Η απόσταση, με βάση το σχήμα, από τη ΘΦΜ είναι $x_0 + A$, οπότε:

$$F_{ελ} = k(x_0 + A) = 1000 \text{ N/m} (0,2 + 0,1) \text{ m} = 300 \text{ N}$$

Η απόσταση από τη ΘΙ είναι A , οπότε: $F_{επ} = k \cdot A = 1000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,1 \text{ m} = 100 \text{ N}$. Άρα:

$$\frac{F_{επ}}{F_{ελ}} = \frac{100}{300} \Rightarrow \frac{F_{επ}}{F_{ελ}} = \frac{1}{3}.$$

δ) Αν καταργηθεί δύναμη F , τότε ΘΙ του σώματος γίνεται τώρα η ΘΦΜ και η αρχική ΘΙ γίνεται ένα τυχαίο σημείο της ταλάντωσης. Οπότε στο σημείο αυτό υπάρχει και δυναμική ενέργεια με $x' = 0,2\text{m}$ και κινητική ενέργεια με ταχύτητα αυτήν, που είχε όταν καταργήθηκε η F στην αρχική ΘΙ, δηλαδή της μέγιστης ταχύτητας της προηγούμενης ταλάντωσης: $v' = \omega \cdot A = 100 \text{ rad/s} \cdot 0,1 \text{ m} = 10 \text{ m/s}$.

Έτσι,

$$E' = K' + U' = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}kx'^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-1} \text{kg} \cdot 10^2 \text{m}^2/\text{s}^2 + \frac{1}{2} \cdot 10^3 \text{N/m} \cdot 4 \cdot 10^{-2} \text{m}^2 = (5 + 20) \text{J} \Rightarrow$$
$$E' = 25 \text{ J}.$$

Συνεπώς ο λόγος των ενεργειών είναι: $\frac{E'}{E} = \frac{25}{5} \Rightarrow \frac{E'}{E} = 5.$

Πρόβλημα 4.

Μικρό σώμα, μάζας $m = 0,5 \text{ kg}$, είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k = 200 \text{ N/m}$, του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο. Το σώμα κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το σώμα εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση δεχόμενο σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 50 \text{ N}$ προς τα δεξιά, μέσω μη εκτατού νήματος αμελητέας μάζας. Όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση, που μηδενίζεται η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, μεγιστοποιείται η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης.

α) Να προσδιορίσετε τη θέση ισορροπίας του σώματος και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης είναι ίση με τη σταθερά k του ελατηρίου.

β) Να υπολογίσετε την ενέργεια ταλάντωσης E του σώματος.

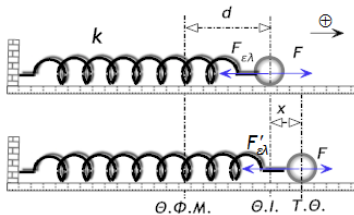
Κάποια στιγμή, που τη θεωρούμε ως $t = 0$, κόβεται το νήμα, στη θέση όπου η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι μέγιστη. Το σύστημα εκτελεί νέα απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος A' .

γ) Θεωρώντας θετική τη φορά προς τα δεξιά, γράψτε την εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο. Η αρχική φάση έχει πεδίο τιμών $[0, 2\pi)$.

δ) Να υπολογίσετε το λόγο των ενεργειών ταλάντωσης του σώματος $\frac{E}{E'}$, πριν και μετά την κατάργηση της δύναμης F .

Λύση

α) Οι δυνάμεις που δέχεται το σώμα είναι η σταθερή οριζόντια δύναμη F και η δύναμη ελατηρίου, που έχει πάντα φορά προς τη Θέση Φυσικού Μήκους του.



Στη θέση Ισορροπίας, που βρίσκεται στη θετική φορά και απόσταση d από τη Θ.Φ.Μ., εφαρμόζω τη Συνθήκη Ισορροπίας στον οριζόντιο άξονα:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F - F_{el} = 0 \Rightarrow F_{el} = k \cdot d \Rightarrow d = \frac{F_0}{k} = \frac{50 \text{ N}}{200 \text{ N/m}} \Rightarrow d = 0,25 \text{ m}.$$

Τοποθετούμε κατόπιν τη σφαίρα σε μια τυχαία θέση θετικής απομάκρυνσης x απ' τη Θ.Ι. της και υπολογίζουμε τη συνισταμένη δύναμη:

$$\Sigma F_x = F - F'_{el} = kd - k(d+x) = kd - kd - k \cdot x = -k \cdot x.$$

Συγκρίνοντάς την με τη Συνθήκη της απλής αρμονικής ταλάντωσης: $\Sigma F_x = -D \cdot x$, προκύπτει ότι η σφαίρα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k$.

β) Η θέση, που μηδενίζεται η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, είναι η Θ.Φ.Μ., ενώ η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης μεγιστοποιείται στα ακρότατα. Συνεπώς, με βάση την εκφώνηση, το (αριστερό) ακρότατο θα είναι η Θ.Φ.Μ., δηλαδή $A = d = 0,25 \text{ m}$.

Η ενέργεια ταλάντωσης υπολογίζεται απ' τη σχέση: $E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}200\text{N/m} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2\text{m}^2 \Rightarrow$
 $E = 6,25 \text{ J}$.

γ) Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου μεγιστοποιείται στη θέση μέγιστης απόστασης από τη Θ.Φ.Μ., δηλαδή στη δεξιά ακραία θέση της ταλάντωσης. Εκεί το σώμα έχει ταχύτητα $u_0=0$ και απέχει d από τη Θ.Ι. και $2d$ από τη Θ.Φ.Μ.

Μετά την κοπή του νήματος, η μόνη δύναμη του σώματος είναι η δύναμη ελατηρίου, οπότε έχουμε «μετατόπιση» της Θ.Ι. στη Θ.Φ.Μ. του ελατηρίου.

Έτσι τη χρονική στιγμή $t=0$, το σώμα θα απέχει $2d$ από τη Νέα Θ.Ι. και θα έχει ταχύτητα μηδενική, δηλαδή η θέση εκκίνησης της Νέας απλής αρμονικής ταλάντωσης, θα είναι το θετικό ακρότατο, με νέο πλάτος: $A' = 2d = 0,5 \text{ m}$.

Η γωνιακή συχνότητα θα είναι ίδια με την αρχική, δηλαδή:

$$\omega' = \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200}{0,5}} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Η αρχική φάση θα υπολογιστεί με βάση το ότι για $t=0$, $x = +A'$, άρα:

$$+A' = A' \eta \mu \varphi_0 \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ και για να είναι } 0 \leq \varphi_0 < 2\pi, \text{ θέτουμε } k=0,$$

$$\text{οπότε } \varphi_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Συνεπώς η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης για τη νέα αρμονική ταλάντωση θα είναι:

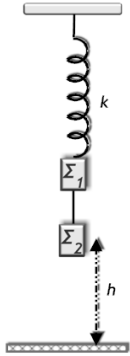
$$x = 0,5 \eta \mu \left(20t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ (S.I.)}.$$

δ) Η ενέργεια της νέας ταλάντωσης είναι: $E' = \frac{1}{2}kA'^2$, ενώ της αρχικής ήταν: $E = \frac{1}{2}kA^2$,

$$\text{έτσι ο λόγος τους θα είναι: } \frac{E}{E'} = \frac{\frac{1}{2}kA^2}{\frac{1}{2}kA'^2} = \left(\frac{A}{A'}\right)^2 = \left(\frac{A}{2A}\right)^2 \Rightarrow \frac{E}{E'} = \frac{1}{4}.$$

Πρόβλημα 5.

Το σύστημα των δύο σωμάτων Σ_1 και Σ_2 , ίσων μαζών $m_1=m_2=10 \text{ kg}$, ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=100 \text{ N/m}$. Τα σώματα έχουν αμελητέες διαστάσεις. Το Σ_1 είναι δεμένο στο ελατήριο, ενώ αβαρές νήμα μικρού μήκους συνδέει τα Σ_1 και Σ_2 . Τη χρονική στιγμή $t=0$ κόβουμε το νήμα που συνδέει τα δύο σώματα, οπότε το Σ_1 αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.



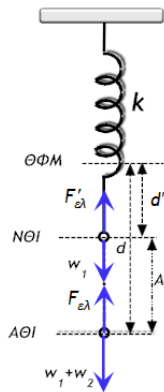
- Να προσδιορίσετε τη θέση ισορροπίας του συστήματος των Σ_1 - Σ_2 και στη συνέχεια τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του Σ_1 μετά το κόψιμο του νήματος.
- Να υπολογίσετε το πλάτος ταλάντωσης A καθώς και την ολική της ενέργεια E .
- Θεωρώντας θετική φορά την προς τα πάνω, να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης x - χρόνου t . Στη συνέχεια να την παραστήσετε γραφικά σε κατάλληλα βαθμολογημένους άξονες, στη διάρκεια της 1^{ης} περιόδου. Θεωρήστε ότι: $\sqrt{10} \approx \pi$.
- Αν το σώμα Σ_2 έχει ως προς το δάπεδο, που βρίσκεται κάτω του, στη θέση ισορροπίας του συστήματος, βαρυτική δυναμική ενέργεια $U_{\text{βαρ}} = 180 \text{ J}$, να βρείτε ποιο απ' τα δύο θα φτάσει πρώτο: το Σ_2 στο έδαφος ή το Σ_1 στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Λύση

- Για την Αρχική Θέση Ισορροπίας (ΑΘΙ) των $m_1 - m_2$, εφαρμόζω τη Συνθήκη Ισορροπίας:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\text{ελ}} = w_1 + w_2 \Rightarrow k \cdot d = (m_1 + m_2)g \Rightarrow d = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} \Rightarrow d = 2 \text{ m}.$$



Για την Νέα Θέση Ισορροπίας (ΝΘΙ) του m_1 , εφαρμόζω πάλι τη Συνθήκη Ισορροπίας:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F'_{ελ} = w_1 \Rightarrow k \cdot d' = m_1 g \Rightarrow d' = \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow d' = 1 \text{ m}.$$

β) Η εκκίνηση της ταλάντωσης είναι από την Αρχική Θέση Ισορροπίας (ΑΘΙ) με ταχύτητα μηδέν (άρα αποτελεί ακρότατο της ταλάντωσης του m_1), ενώ η Θέση Ισορροπίας της ταλάντωσης του Σ_1 είναι η Νέα Θέση Ισορροπίας (ΝΘΙ). Συνεπώς η απόσταση των δύο θέσεων ισορροπίας αποτελεί το πλάτος ταλάντωσης και ισούται με: $A = d - d' = 2 - 1 \Rightarrow A = 1 \text{ m}$.

Το m_1 εκτελεί αρμονική ταλάντωση δεμένο στο κάτω άκρο του ελατηρίου, με σταθερά ταλάντωσης: $D = k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ και η ενέργεια ταλάντωσης θα υπολογιστεί από τη σχέση:

$$E = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} 100 \text{ N/m} \cdot 1^2 \text{ m}^2 \Rightarrow E = 50 \text{ J}.$$

γ) Η γωνιακή συχνότητα θα είναι: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{10}} = \sqrt{10} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega \approx \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ και η περίοδος

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\pi} \Rightarrow T = 2 \text{ s}.$$

Η αρχική φάση θα υπολογιστεί με βάση το ότι για $t=0, x=-A$, άρα:

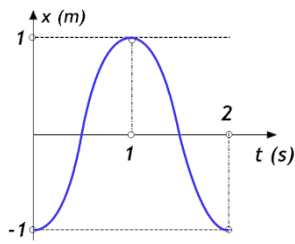
$$-A = A \eta \mu \varphi_0 \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = -1 \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \text{ και για να είναι } 0 \leq \varphi_0 < 2\pi, \text{ θέτουμε } k=1,$$

$$\text{οπότε: } \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}.$$

Συνεπώς η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης θα είναι: $x = \eta \mu(\pi t + \frac{3\pi}{2})$ (S.I.). Με βάση τον πίνακα τιμών:

t (s)	0	1	2
x (m)	-1	1	-1

και το ότι η συνάρτηση είναι ημιτονική, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση του διαγράμματος.



δ) Γνωρίζουμε ότι η βαρυτική δυναμική ενέργεια ενός σώματος δίνεται από τη σχέση: $U_{\text{βαρ}} = mgh$, όπου h είναι η κατακόρυφη απόσταση του σώματος από το επίπεδο αναφοράς. Στην περίπτωση μας, από τη βαρυτική δυναμική ενέργεια του Σ_2 ως προς το έδαφος, μπορούμε να υπολογίσουμε το ύψος h :

$$U_{\text{βαρ}} = m_2 g \cdot h \Rightarrow h = \frac{U_{\text{βαρ}}}{m_2 g} = \frac{180}{10 \cdot 10} \Rightarrow h = 1,8 \text{ m}.$$

Το σώμα Σ_2 εκτελεί ελεύθερη πτώση ως το έδαφος, οπότε μπορούμε να βρούμε το χρόνο

$$\text{πτώσης } t_2 \text{ ως εξής: } h = \frac{1}{2} g t_2^2 \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,8}{10}} \Rightarrow t_2 = 0,6 \text{ s}.$$

Ο χρόνος t_1 για να φτάσει το Σ_1 στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του, ξεκινώντας από το

$$\text{κάτω ακρότατο, είναι: } t_1 = \frac{T}{2} = \frac{2}{2} \Rightarrow t_1 = 1 \text{ s}.$$

Άρα το Σ_2 θα φτάσει πρώτο στο έδαφος.

Πρόβλημα 6.

Το κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=100 \text{ N/m}$ είναι στερεωμένο σε οριζόντιο δάπεδο. Στο πάνω άκρο του είναι δεμένος δίσκος Σ_1 μάζας $m_1=0,8 \text{ kg}$. Πάνω στο δίσκο είναι τοποθετημένος κύβος Σ_2 μάζας $m_2=0,2 \text{ kg}$. Το σύστημα αρχικά ισορροπεί. Πιέζουμε το σύστημα κατακόρυφα προς τα κάτω μεταφέροντας ενέργεια στο σύστημα ίση με $E=2 \text{ J}$ και το αφήνουμε ελεύθερο.

α) Να βρείτε το πλάτος ταλάντωσης A του συστήματος, τη γωνιακή συχνότητα ω καθώς και το χρόνο Δt στον οποίο θα περάσει για 1^η φορά απ' τη θέση ισορροπίας του.

β) Να γράψετε τη συνάρτηση της δύναμης επαφής N , που δέχεται ο κύβος από το δίσκο Σ_1 , σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του.

γ) Να υπολογίσετε την απόσταση y από τη θέση ισορροπίας του, στην οποία ο κύβος θα χάσει την επαφή με το δίσκο.

δ) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του κύβου τη χρονική στιγμή, που εγκαταλείπει το δίσκο και το ύψος στο οποίο θα φθάσει πάνω από τη θέση που εγκαταλείπει το δίσκο.

Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα και $g=10 \text{ m/s}^2$.

Λύση

α) Το σύστημα των Σ_1 και Σ_2 , εφόσον είναι δεμένο στο κατακόρυφο ελατήριο θα ταλαντώνεται αρμονικά με σταθερά ταλάντωσης: $D_{ολ} = k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

Το πλάτος ταλάντωσης του συστήματος, θα υπολογιστεί από τη σχέση, που δίνει την

ολική ενέργεια E : $E = \frac{1}{2} D_{ολ} A^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{100}} \text{ m} \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}.$

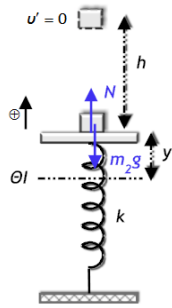
Η περίοδος ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_{ολ}}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{100}} \text{ s} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5} \text{ s}$.

Η γωνιακή συχνότητα του συστήματος είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi \text{ rad}}{\frac{\pi}{5} \text{ s}} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$

Η θέση εκκίνησης είναι το κάτω ακρότατο της ταλάντωσης και ο χρόνος που απαιτείται

για να φτάσει για 1^η φορά στη θέση ισορροπίας του είναι: $\Delta t = \frac{T}{4} \Rightarrow \Delta t = 0,05 \pi \text{ s}.$

β) Για να βρούμε μια έκφραση για την αλγεβρική τιμή της δύναμης επαφής N , που ασκεί ο δίσκος στον κύβο, εργαζόμαστε ως εξής: Τοποθετούμε τον κύβο σε μια Τυχαία Θέση x του θετικού ημιάξονα και σχεδιάζουμε τις δυνάμεις $m_2 g$ και N που δέχεται.



Εφαρμόζουμε για τον κύβο Σ_2 τη συνθήκη της ταλάντωσης:

$$\Sigma F_2 = -D_2 \cdot x \Rightarrow N - m_2 g = -m_2 \omega^2 \cdot x \Rightarrow N = m_2 g - m_2 \omega^2 \cdot x \Rightarrow N = 2 - 20 \cdot x, \text{ με}$$

$$-A \leq x \leq A \Rightarrow -0,2 \leq x \leq 0,2 \text{ (στο S.I.)}.$$

γ) Όταν χάνεται η επαφή των δύο σωμάτων, τότε μηδενίζεται η δύναμη N . Ας δούμε σε ποιες θέσεις μπορεί να χαθεί η επαφή των δύο σωμάτων.

✓ Όταν το σύστημα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας ($x=0$):

$N_{\Theta.I.} = (2 - 20 \cdot 0)N = 2 \text{ N} > 0$. Άρα, στη θέση ισορροπίας δεν χάνεται η επαφή των δύο σωμάτων.

✓ Όταν το σύστημα βρίσκεται κάτω από τη θέση ισορροπίας ($x < 0$ ή $x = -|x|$):

$N = 2 - 20 \cdot (-|x|) = 2 + 20|x| > 0$. Άρα, και κάτω από τη θέση ισορροπίας δεν χάνεται η επαφή των δύο σωμάτων.

✓ Όταν το σώμα βρίσκεται πάνω από τη θέση ισορροπίας ($x > 0$), έχουμε:

$N = 2 - 20 \cdot x = 2 - 20 \cdot x$, που είναι μια φθίνουσα πρωτοβάθμια συνάρτηση του x . Έτσι μπορεί σε κάποια θέση y (όπου $0 < y \leq +A$) πάνω απ' τη $\Theta.I.$ να χαθεί η επαφή του κύβου με το δίσκο. Στη θέση αυτή θα είναι:

$$N = 0 \Rightarrow 2 - 20 \cdot y = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{20} \text{ m} \Rightarrow y = 0,1 \text{ m}.$$

δ) Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του κύβου στη θέση y , που χάνεται η επαφή με το δίσκο. Από τη Διατήρηση της Ενέργειας της ταλάντωσης του συστήματος, στη θέση απώλειας επαφής y και στη μέγιστη απομάκρυνση, έχουμε:

$$\frac{1}{2} m_{\text{ολ}} v^2 + \frac{1}{2} k y^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow v^2 = \frac{k(A^2 - y^2)}{m_{\text{ολ}}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k(A^2 - y^2)}{m_{\text{ολ}}}} = \sqrt{\frac{100 \text{ N/m}(0,2^2 - 0,1^2) \text{ m}}{1 \text{ kg}}} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το ζητούμενο μέγιστο ύψος θα προκύψει με εφαρμογή της Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας του κύβου (η μόνη ασκούμενη δύναμη είναι το βάρος - συντηρητική δύναμη), από τη θέση εκτόξευσης (όπου $h = 0$) έως το μέγιστο ύψος (όπου $v' = 0$):

$$K + U_{\beta\alpha\rho} = K' + U'_{\beta\alpha\rho} \Rightarrow \frac{1}{2}m_2v^2 + 0 = 0 + m_2gh_{\max} \Rightarrow h_{\max} = \frac{v^2}{2g} \Rightarrow h_{\max} = \frac{(\sqrt{3})^2 m^2 / s^2}{2 \cdot 10 m / s^2} \Rightarrow$$

$$h_{\max} = 0,15 \text{ m} .$$

Πρόβλημα 7.

Το αριστερό άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=400 \text{ N/m}$ στερεώνεται ακλόνητα και στο δεξιό άκρο του προσδένεται σώμα Σ_1 μάζας $m_1=3 \text{ kg}$, το οποίο μπορεί να κινείται σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Πάνω στο Σ_1 τοποθετείται δεύτερο σώμα Σ_2 μάζας $m_2=1 \text{ kg}$. Εκτοξεύουμε προς τα δεξιά το σύστημα από τη θέση ισορροπίας του, με ταχύτητα μέτρου V και παράλληλη με το οριζόντιο επίπεδο, όπως στο σχήμα, οπότε το σύστημα εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση. Τα δύο σώματα διατηρούν την επαφή στη διάρκεια της ταλάντωσης.



- Να υπολογίσετε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης καθώς και τις σταθερές ταλάντωσης $D_{ολ}$, D_1 και D_2 του συστήματος και των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα.
- Να τοποθετήσετε το σύστημα σε μια τυχαία θέση της ταλάντωσης του, να σχεδιάσετε και να περιγράψετε σε τρία κατάλληλα σχήματα τις δυνάμεις, που δέχονται: i) το σύστημα $\Sigma_1 - \Sigma_2$, ii) το Σ_1 και iii) το Σ_2 .
- Να παραστήσετε γραφικά την αλγεβρική τιμή της στατικής τριβής από το Σ_1 στο Σ_2 σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του, για πλάτος ταλάντωσης $A=3 \text{ cm}$.
- Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή της αρχικής ταχύτητας εκτόξευσης V_{max} , του συστήματος των Σ_1 , Σ_2 ώστε το σώμα Σ_2 να μην ολισθήσει πάνω στο σώμα Σ_1 . Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10 \text{ m/s}^2$ και ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων Σ_1 και Σ_2 είναι $\mu_s=0,5$.

Λύση

- Τα δύο σώματα του συστήματος, έχουν κοινή γωνιακή συχνότητα ω , αλλά έχουν διαφορετική σταθερά Ταλάντωσης ($D_1 \neq D_2 \neq D_{ολ}$).

Το σύστημα έχει σταθερά ταλάντωσης: $D_{ολ} = k = 400 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ και ολική μάζα $m_{ολ} = m_1 + m_2$.

Η γωνιακή συχνότητα του συστήματος είναι: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{400}{4}} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Εξισώνουμε τις γωνιακές συχνότητες:

$$\omega_1 = \omega_{ολ} \Rightarrow \sqrt{\frac{D_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{D_{ολ}}{m_{ολ}}} \Rightarrow \frac{D_1}{m_1} = \frac{D_{ολ}}{m_{ολ}} = \frac{k}{m_1 + m_2} \Rightarrow D_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} k \Rightarrow D_1 = 300 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

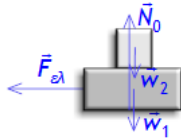
$$\omega_2 = \omega_{ολ} \Rightarrow \sqrt{\frac{D_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{D_{ολ}}{m_{ολ}}} \Rightarrow \frac{D_2}{m_2} = \frac{D_{ολ}}{m_{ολ}} = \frac{k}{m_1 + m_2} \Rightarrow D_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} k \Rightarrow D_2 = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Β) Οι ασκούμενες δυνάμεις είναι:

i) στο σύστημα $\Sigma_1 - \Sigma_2$:

Στον x-άξονα: Η δύναμη από το ελατήριο $F_{ελ}$.

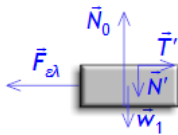
Στον y-άξονα: Το βάρος $w_{ολ} = w_1 + w_2$, η δύναμη επαφής N_0 από το λείο οριζόντιο δάπεδο.



ii) στο Σ_1 :

Στον x-άξονα: Η δύναμη από το ελατήριο $F_{ελ}$ και η δύναμη της στατικής τριβής T' από το Σ_2 .

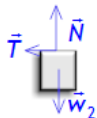
Στον y-άξονα: Το βάρος w_1 , η δύναμη επαφής N_0 από το λείο οριζόντιο δάπεδο και η δύναμη επαφής N' από το Σ_2 .



iii) στο Σ_2 :

Στον x-άξονα: Η δύναμη της στατικής τριβής T από το Σ_1 .

Στον y-άξονα: Το βάρος w_2 και η δύναμη επαφής N από το Σ_1 .



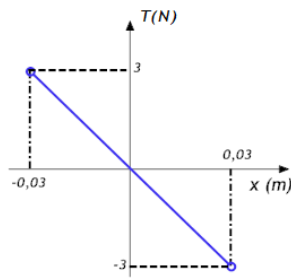
γ) Εφαρμόζουμε τη Συνθήκη ταλάντωσης για το Σ_2 και λαμβάνουμε υπόψη ότι η μοναδική δύναμη, που δέχεται στον οριζόντιο άξονα είναι η στατική τριβή T , άρα αποτελεί τη δύναμη επαναφοράς του Σ_2 :

$$\Sigma F_x^{(2)} = -D_2 \cdot x \Rightarrow T = -D_2 \cdot x.$$

Άρα η αλγεβρική τιμή της στατικής τριβής δίνεται από τη συνάρτηση:

$T = -100 \cdot x$, με $-A \leq x \leq A \Rightarrow -0,03 \leq x \leq 0,03$, οπότε και $-3 \leq T \leq 3$ (όλες οι τιμές στο S.I.).

Η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



δ) Εφαρμόζουμε τη Συνθήκη ταλάντωσης για το Σ_2 : $\Sigma F_x^{(2)} = -D_2 \cdot x$. Θεωρώντας θετική φορά την προς τα δεξιά, έχουμε: $-T = -D_2 \cdot x \Rightarrow T = D_2 \cdot x$.

Παρατηρούμε ότι το μέτρο της στατικής τριβής είναι ανάλογο της απομάκρυνσης x , άρα η στατική τριβή μεγιστοποιείται στα ακρότατα, δηλαδή: $T_{\max} = D_2 \cdot A$.

Γνωρίζουμε ότι η μέγιστη τιμή της στατικής, δηλαδή η οριακή τριβή είναι ίση με: $T_{\text{op}} = \mu_{\sigma} \cdot N$, όπου μ_{σ} είναι ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων και N είναι η κάθετη αντίδραση στο Σ_2 , η οποία υπολογίζεται από τη Συνθήκη Ισορροπίας στον y -άξονα: $\Sigma F_y^{(2)} = 0 \Rightarrow N = m_2 g$.

Τελικά, η οριακή τριβή είναι ίση με: $T_{\text{op}} = \mu_{\sigma} \cdot m_2 g = 0,5 \cdot 1 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \Rightarrow T_{\text{op}} = 5 \text{ N}$.

Για να μην ολισθήσει το Σ_2 πάνω στο Σ_1 πρέπει:

$$T_{\max} \leq T_{\text{op}} \Rightarrow D_2 \cdot A \leq T_{\text{op}} \Rightarrow A \leq \frac{T_{\text{op}}}{D_2} \Rightarrow A \leq \frac{5 \text{ N}}{100 \text{ N/m}} \Rightarrow A \leq 0,05 \text{ m}.$$

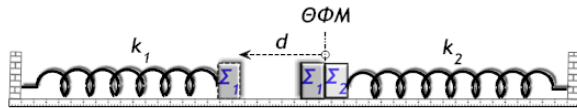
Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $u_{\max} = \omega \cdot A \Rightarrow A = \frac{u_{\max}}{\omega}$,

οπότε με βάση την προηγούμενη ανισότητα θα ισχύει: $\frac{u_{\max}}{\omega} \leq 0,05 \Rightarrow u_{\max} \leq \omega \cdot 0,05 \Rightarrow$

$$u_{\max} \leq 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Πρόβλημα 8.

Τα ιδανικά ελατήρια του σχήματος έχουν σταθερές $k_1=300 \text{ N/m}$ και $k_2=600 \text{ N/m}$ και τα σώματα Σ_1 και Σ_2 , αμελητέων διαστάσεων, που είναι δεμένα στα άκρα των ελατηρίων, έχουν μάζες $m_1=3 \text{ kg}$ και $m_2=1 \text{ kg}$. Τα δύο ελατήρια βρίσκονται αρχικά στο φυσικό τους μήκος και τα σώματα σε επαφή. Εκτρέπουμε από τη θέση ισορροπίας του το σώμα Σ_1 κατά $d=0,4 \text{ m}$ συμπιέζοντας το ελατήριο k_1 και το αφήνουμε ελεύθερο. Κάποια στιγμή συγκρούεται με το Σ_2 και κολλά σ' αυτό. Τα σώματα κινούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και η διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.



- Να υπολογίσετε σε πόσο χρόνο και με τι ταχύτητα το σώμα Σ_1 θα συγκρουστεί με το σώμα Σ_2 .
- Να δείξετε ότι το συσσωμάτωμα $\Sigma_1 - \Sigma_2$ θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την σταθερά της.
- Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.
- Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος σε συνάρτηση με το χρόνο, θεωρώντας ως αρχή του χρόνου τη στιγμή αμέσως μετά την κρούση.
- Σε πόσο χρόνο από τη στιγμή που αφήσαμε το σώμα m_1 θα μηδενιστεί η ταχύτητα του συσσωματώματος για 2^η φορά και πόση απόσταση θα έχει διανύσει το m_1 μέχρι τότε;

Λύση

- Εφόσον το Σ_1 αφήνεται στην αρχική του θέση, αυτό σημαίνει ότι είναι ακρότατο της ταλάντωσής του, συνεπώς: $A_1 = d = 0,4 \text{ m}$.

Επειδή $D_1=k_1$, για την ταλάντωση του Σ_1 , η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του Σ_1

$$\text{είναι: } \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{300}{3}} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega_1 = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ και η περίοδός της είναι: } T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{\pi}{5} \text{ s}.$$

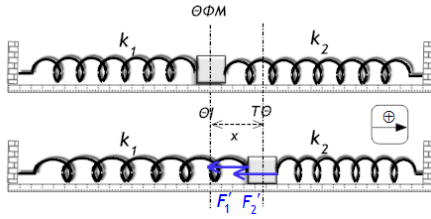
Το Σ_1 θα φτάσει από την ακραία θέση στη Θέση Ισορροπίας σε χρόνο: $\Delta t = \frac{T_1}{4} \Rightarrow$

$$\Delta t = \frac{\pi}{20} \text{ s}.$$

Η ταχύτητα του Σ_1 στη Θέση Ισορροπίας θα είναι η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης, άρα:

$$v_1 = v_{\max} = \omega_1 \cdot A_1 = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 0,4 \text{ m} \Rightarrow v_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

β) Όταν το συσσωμάτωμα είναι στη Θ.Ι. του, τα ελατήρια είναι στη Θέση Φυσικού Μήκους τους, οπότε δεν ασκούν δυνάμεις.



Σημειώνουμε κατόπιν το συσσωμάτωμα σε μια Τυχαία Θέση (ΤΘ) θετικής απομάκρυνσης x απ' τη ΘΙ του, οπότε οι ασκούμενες δυνάμεις ελατηρίου είναι F_1' και F_2' , των οποίων η φορά, όπως φαίνεται στο σχήμα, είναι αριστερά προς τη θέση φυσικού μήκους (ΘΦΜ) τους.

Θεωρούμε θετική φορά την προς τα δεξιά και υπολογίζουμε τη συνισταμένη δύναμη:

$$\Sigma F = -F_1' - F_2' = -k_1 x - k_2 x = -(k_1 + k_2)x.$$

Συγκρίνοντας την με τη γενική συνθήκη της αρμονικής ταλάντωσης: $\Sigma F = -D \cdot x$, προκύπτει ότι το συσσωμάτωμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση με σταθερά της ταλάντωσης: $D = k_1 + k_2 \Rightarrow D = 900 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

γ) Για την πλαστική κρούση εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Ορμής και βρίσκουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση:

$$p_1 + p_2 = p'_{\text{ολ}} \Rightarrow m_1 v_1 + 0 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = \frac{m_1 v_1}{(m_1 + m_2)} \Rightarrow V = \frac{3 \cdot 4 \text{ m}}{4 \text{ s}} \Rightarrow V = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η ταχύτητα αυτή είναι η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης, γιατί η κρούση έγινε στη Θ.Ι. (η οποία δεν μετατοπίστηκε λόγω της κρούσης, γιατί η διάρκεια κρούσης θεωρείται αμελητέα), άρα: $V = v_{\text{max}} = \omega' A'$.

Η νέα γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \omega' = \sqrt{\frac{900}{4}} \Rightarrow \omega' = 15 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

$$\text{Άρα το νέο πλάτος ταλάντωσης θα είναι: } A' = \frac{V}{\omega'} \Rightarrow A' = \frac{3 \text{ m/s}}{15 \text{ rad/s}} \Rightarrow A' = 0,2 \text{ m}.$$

δ) Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος είναι της μορφής: $x' = A' \eta \mu(\omega t + \phi_0)$, οπότε χρειαζόμαστε επιπλέον την αρχική φάση. Αυτή θα υπολογιστεί με βάση το γεγονός ότι για $t=0$, $x'=0$, άρα: $0 = A' \eta \mu \phi_0 \Rightarrow \eta \mu \phi_0 = 0$ και επειδή πρέπει: $0 \leq \phi_0 < 2\pi$ θα είναι: $\phi_0 = 0$ ή $\phi_0 = \pi$.

Παρατηρούμε ότι το συσσωμάτωμα, αμέσως μετά την κρούση κινείται στη θετική φορά.

Έτσι θα δεχτούμε τη λύση $\varphi_0 = 0$, η οποία δίνει θετική ταχύτητα ($v = v_{\max} \sin 0 > 0$).

Συνεπώς η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης θα είναι: $x' = 0,2 \sin(15t)$ (S.I.).

ε) Η περίοδος της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι: $T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{15} \text{ s}$.

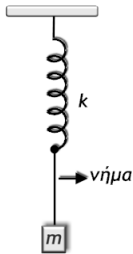
Ο χρόνος και το αντίστοιχο διάστημα, από τη στιγμή που αφήσαμε το σώμα m_1 , μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητα του συσσωματώματος για 2^η φορά φαίνονται στον πίνακα.

	Χρονική διάρκεια	Διάστημα κίνησης
Το Σ_1 από το αρνητικό ακρότατο έως τη Θ.Ι.:	$\frac{T_1}{4} = \frac{\pi}{20} \text{ s}$	$A = 0,4 \text{ m}$
Το Σ_1 - Σ_2 από τη Θ.Ι. έως το θετικό ακρότατο:	$\frac{T'}{4} = \frac{\pi}{30} \text{ s}$	$A' = 0,2 \text{ m}$
Το Σ_1 - Σ_2 από το θετικό ακρότατο έως το αρνητικό ακρότατο:	$\frac{T'}{2} = \frac{2\pi}{30} \text{ s}$	$2A' = 0,4 \text{ m}$

Άρα ο ολικός χρόνος είναι: $t_{\text{ολ}} = \frac{T_1}{4} + \frac{3T'}{4} = \frac{\pi}{20} \text{ s} + \frac{\pi}{10} \text{ s} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = \frac{3\pi}{20} \text{ s}$ και το ολικό διάστημα κίνησης είναι: $s_{\text{ολ}} = A + 3A' \Rightarrow s_{\text{ολ}} = (0,4 + 0,6) \text{ m} \Rightarrow s_{\text{ολ}} = 1 \text{ m}$.

Πρόβλημα 9.

Στο παρακάτω σχήμα το σώμα μάζας $m=10 \text{ kg}$ ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο του αβαρούς νήματος το πάνω άκρο του οποίου είναι δεμένο στο κάτω άκρο του κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=10 \text{ N/cm}$.



- Σχεδιάστε τις δυνάμεις, που ασκούνται στο σώμα και αιτιολογήστε γιατί η δύναμη ελατηρίου στο νήμα είναι ίση με την τάση του νήματος στο σώμα.
- Υπολογίστε την επιμήκυνση $\Delta \ell$ του ελατηρίου. Θεωρήστε ότι $g = 10 \text{ m/s}^2$.
Τραβάμε το σώμα κατακόρυφα προς τα κάτω από τη Θ.Ι. του, μεταφέροντας ενέργεια στο σύστημα $E_{\text{μετ}}=5 \text{ J}$ και το αφήνουμε να ταλαντωθεί.
- Να αποδείξετε ότι θα εκτελέσει γραμμική αρμονική ταλάντωση και να βρείτε το πλάτος ταλάντωσης.
- Γράψτε την εξίσωση της τάσης του νήματος στο σώμα σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x απ' τη θέση Ισορροπίας και σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της τάσης του νήματος T σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x , σε κατάλληλα βαθμολογημένους άξονες.
- Να βρείτε το σημείο της ταλάντωσης στο οποίο η τάση του νήματος θα μηδενισθεί.

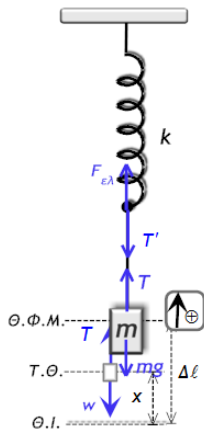
Λύση

α) Στο σημείο επαφής ελατηρίου - νήματος ασκούνται η $F_{\text{ελ}}$ από το ελατήριο στο νήμα και η τάση του νήματος T' στο ελατήριο. Επειδή το σημείο αυτό έχει αμελητέα μάζα, οι δυνάμεις αυτές είναι αντίθετες, άρα κατά μέτρο ίσες: $F_{\text{ελ}} = T'$.

Το νήμα, εφόσον είναι τεντωμένο, ασκεί τάσεις κατά μέτρο ίσες στο ελατήριο και στο σώμα: $T' = T$.

Απ' τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι η δύναμη ελατηρίου $F_{\text{ελ}}$ στο νήμα είναι ίση με την τάση T του νήματος στο σώμα: $F_{\text{ελ}} = T$.

β) Η σταθερά του ελατηρίου στο S.I. είναι: $k = 10 \frac{\text{N}}{\text{cm}} = 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.



Εφαρμόζω τη Συνθήκη Ισορροπίας για το σώμα: $\Sigma F = 0 \Rightarrow T = mg$, και επειδή $F_{ελ} = T$,

$$\text{έχουμε: } k\Delta\ell = mg \Rightarrow \Delta\ell = \frac{mg}{k} = \frac{100}{1000} \text{ m} \Rightarrow \Delta\ell = 0,1 \text{ m}.$$

γ) Θεωρούμε θετική φορά την προς τα πάνω και τοποθετούμε το σώμα σε μια τυχαία θέση θετικής απομάκρυνσης x πάνω απ' τη Θ.Ι. του. Υπολογίζουμε τώρα τη συνισταμένη δύναμη: $\Sigma F = T - w = F'_{ελ} - w = k(\Delta\ell - x) - k \cdot \Delta\ell = k \cdot \Delta\ell - k \cdot x - k \cdot \Delta\ell = -k \cdot x$.

Με βάση την Αρχή διατήρησης της ενέργειας, η μεταφερόμενη ενέργεια είναι ίση με την ενέργεια της ταλάντωσης: $E_{μετ} = E$, ενώ το σημείο που αφήνουμε ελεύθερο το σώμα είναι η κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης.

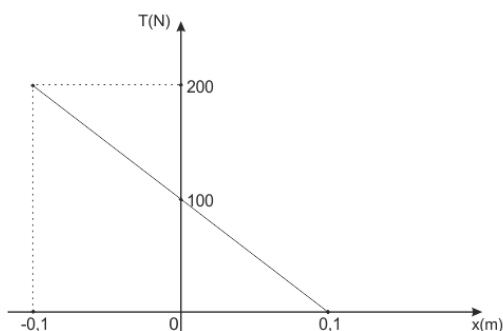
Το πλάτος ταλάντωσης A θα υπολογιστεί από τη σχέση, που δίνει την ενέργεια ταλάντωσης:

$$E = \frac{1}{2} kA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \text{ J}}{1000 \text{ N/m}}} \Rightarrow A = 0,1 \text{ m}.$$

δ) Τοποθετούμε το σώμα σε μια τυχαία θέση x του θετικού ημιάξονα και σχεδιάζουμε τις δυνάμεις mg και T που δέχεται. Εφαρμόζουμε τη Συνθήκη της ταλάντωσης:

$$\Sigma F = -D \cdot x \Rightarrow T - mg = -k \cdot x \Rightarrow T = mg - k \cdot x \Rightarrow T = 100 - 1000 \cdot x \text{ (S.I.) με}$$

$$-0,1 \leq x \leq 0,1$$



ε) Παρατηρούμε ότι όταν το σώμα είναι κάτω από τη Θ.Ι. του ($x < 0$) ή στη ΘΙ ($x = 0$), η τάση είναι θετική. Αντίθετα όταν είναι πάνω από τη Θ.Ι. του και πλησιάζει στην πάνω ακραία θέση, τότε η τάση μειώνεται και μπορεί να μηδενιστεί.

Έστω ότι η τάση του νήματος θα μηδενιστεί σε κάποιο σημείο x_0 της τροχιάς, οπότε:

$$0 = 100 - 1000 \cdot x_0 \Rightarrow x_0 = 0,1 \text{ m}.$$

Σχόλιο:

Όταν η τάση μηδενίζεται, το νήμα χαλαρώνει. Επειδή το πλάτος ταλάντωσης είναι επίσης $A = 0,1 \text{ m}$, το νήμα θα χαλαρώσει οριακά στην θέση μέγιστης απομάκρυνσης της τροχιάς, συνεπώς το σώμα θα συνεχίσει την αρμονική ταλάντωσή του έστω και οριακά.

Πρόβλημα 10.

Κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς k , έχει το κάτω άκρο του δεμένο στο έδαφος και στο άνω άκρο του έχουμε δέσει μικρό σώμα Σ_2 μάζας $m_2=3\text{kg}$. Το σώμα ισορροπεί με το ελατήριο συσπειρωμένο κατά $d=0,3\text{m}$. Στην ίδια κατακόρυφο με τον άξονα του ελατηρίου και σε ύψος $d_0=0,2\text{m}$ πάνω από το Σ_2 αφήνουμε ένα μικρό σώμα Σ_1 μάζας $m_1=1\text{kg}$. Τα δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά και πλαστικά. Το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση των σωμάτων.

β) Να υπολογίσετε τη σταθερά επαναφοράς του ελατηρίου και την περίοδο ταλάντωσης που θα εκτελέσει το συσσωμάτωμα.

γ) Να υπολογίσετε την ενέργεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

δ) Να γράψετε την εξίσωση της επιτάχυνσης του συσσωματώματος σε σχέση με το χρόνο, θεωρώντας θετική φορά κατακόρυφη προς τα επάνω και λαμβάνοντας ως χρονική στιγμή $t=0$ τη στιγμή αμέσως μετά την κρούση.

Δίνεται: $g=10\text{m/s}^2$

Λύση

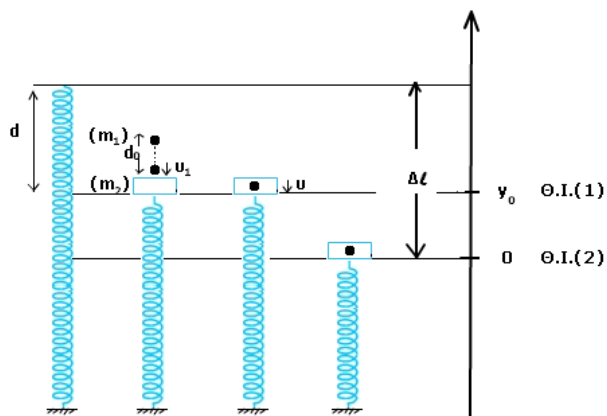
α) Για την κίνηση του Σ_1 , εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας:

$$E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\eta\chi(\tau\epsilon\lambda)} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = m_1 g d_0 \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{2gd_0} \Rightarrow v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Κατά την κρούση η ορμή του συστήματος διατηρείται άρα αν u η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση, τότε:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) u \Rightarrow u = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



β) Στην αρχική θέση ισορροπίας, Θ.Ι. (1), πριν την κρούση των σωμάτων ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\epsilon\lambda} - W_{w_2} = 0 \Rightarrow kd - m_2 g = 0 \Rightarrow k = \frac{m_2 g}{d} \Rightarrow k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Επειδή $D=k$ ισχύει ότι:

$$k = (m_1 + m_2) \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\text{Άρα: } T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,4\pi \text{ s}$$

γ) Στην περίπτωση πλαστικής κρούσης σωμάτων, όπου το ένα είναι δεμένο στο άκρο ελατηρίου, αν το ελατήριο είναι κατακόρυφο ή πλάγιο, το συσσωμάτωμα έχει νέα θέση ισορροπίας. Αν στη νέα θέση ισορροπίας το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά Δl , θα πρέπει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\text{ελ}} - W_{\text{ολ}} = 0 \Rightarrow k\Delta l = (m_1 + m_2)g \Rightarrow \Delta l = 0,4\text{m}$$

Συνεπώς αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα βρίσκεται σε σχέση με τη νέα θέση ισορροπίας σε απομάκρυνση μέτρου: $y_0 = \Delta l - d = 0,1\text{m}$.

Η ενέργεια της ταλάντωσης ισούται:

$$E = K + U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot v^2 + \frac{1}{2}ky_0^2 \Rightarrow E = 1\text{J}$$

δ) Η επιτάχυνση του $(m_1 + m_2)$ περιγράφεται από την εξίσωση $a = -\omega^2 A \eta \mu(\omega t + \varphi_0)$.

Από την ενέργεια ταλάντωσης του συσσωματώματος έχουμε: $E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = 0,1\sqrt{2}\text{m}$

Η απομάκρυνση του $(m_1 + m_2)$ περιγράφεται από την $y = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0)$. Την $t = 0$ είναι (S.I.):

$$y = y_0 \Rightarrow 0,1\sqrt{2} \cdot \eta \mu \varphi_0 = 0,1 \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = \eta \mu \frac{\pi}{4} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \text{ ή } \varphi_0 = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

Όμως (θετική φορά προς τα πάνω) $v < 0 \Rightarrow \text{syn} \varphi_0 < 0$. Άρα $\varphi_0 = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$

Συνεπώς, η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$$a = -\omega^2 A \eta \mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow a = -2,5\sqrt{2} \eta \mu(5t + \frac{3\pi}{4}) \quad (\text{S.I.})$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 23/10/2018

Επιμέλεια: Ιωάννης Αλεξόπουλος, Γεώργιος Φωτεινάκης, Ευάγγελος Χατζέλλης
 Επιστημονικός έλεγχος: Γεώργιος Ζησιμόπουλος, Αντώνιος Παλόγος, Κωνσταντίνος Στεφανίδης