

Πρόβλημα 6.

Το κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=100 \text{ N/m}$ είναι στερεωμένο σε οριζόντιο δάπεδο. Στο πάνω άκρο του είναι δεμένος δίσκος Σ_1 μάζας $m_1=0,8 \text{ kg}$. Πάνω στο δίσκο είναι τοποθετημένος κύβος Σ_2 μάζας $m_2=0,2 \text{ kg}$. Το σύστημα αρχικά ισορροπεί. Πιέζουμε το σύστημα κατακόρυφα προς τα κάτω μεταφέροντας ενέργεια στο σύστημα ίση με $E=2 \text{ J}$ και το αφήνουμε ελεύθερο.

α) Να βρείτε το πλάτος ταλάντωσης A του συστήματος, τη γωνιακή συχνότητα ω καθώς και το χρόνο Δt στον οποίο θα περάσει για 1^η φορά απ' τη θέση ισορροπίας του.

β) Να γράψετε τη συνάρτηση της δύναμης επαφής N , που δέχεται ο κύβος από το δίσκο Σ_1 , σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του.

γ) Να υπολογίσετε την απόσταση y από τη θέση ισορροπίας του, στην οποία ο κύβος θα χάσει την επαφή με το δίσκο.

δ) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του κύβου τη χρονική στιγμή, που εγκαταλείπει το δίσκο και το ύψος στο οποίο θα φθάσει πάνω από τη θέση που εγκαταλείπει το δίσκο.

Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα και $g=10 \text{ m/s}^2$.

Λύση

α) Το σύστημα των Σ_1 και Σ_2 , εφόσον είναι δεμένο στο κατακόρυφο ελατήριο θα ταλαντώνεται αρμονικά με σταθερά ταλάντωσης: $D_{ολ} = k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

Το πλάτος ταλάντωσης του συστήματος, θα υπολογιστεί από τη σχέση, που δίνει την

ολική ενέργεια E : $E = \frac{1}{2} D_{ολ} A^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{100}} \text{ m} \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}.$

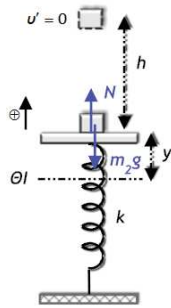
Η περίοδος ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_{ολ}}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{100}} \text{ s} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5} \text{ s}$.

Η γωνιακή συχνότητα του συστήματος είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi \text{ rad}}{\frac{\pi}{5} \text{ s}} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$

Η θέση εκκίνησης είναι το κάτω ακρότατο της ταλάντωσης και ο χρόνος που απαιτείται

για να φτάσει για 1^η φορά στη θέση ισορροπίας του είναι: $\Delta t = \frac{T}{4} \Rightarrow \Delta t = 0,05\pi \text{ s}.$

β) Για να βρούμε μια έκφραση για την αλγεβρική τιμή της δύναμης επαφής N , που ασκεί ο δίσκος στον κύβο, εργαζόμαστε ως εξής: Τοποθετούμε τον κύβο σε μια Τυχαιά Θέση x του θετικού ημιάξονα και σχεδιάζουμε τις δυνάμεις m_2g και N που δέχεται.



Εφαρμόζουμε για τον κύβο Σ_2 τη συνθήκη της ταλάντωσης:

$$\Sigma F_2 = -D_2 \cdot x \Rightarrow N - m_2 g = -m_2 \omega^2 \cdot x \Rightarrow N = m_2 g - m_2 \omega^2 \cdot x \Rightarrow N = 2 - 20 \cdot x, \text{ με}$$

$$-A \leq x \leq A \Rightarrow -0,2 \leq x \leq 0,2 \text{ (στο S.I.)}.$$

γ) Όταν χάνεται η επαφή των δύο σωμάτων, τότε μηδενίζεται η δύναμη N . Ας δούμε σε ποιες θέσεις μπορεί να χαθεί η επαφή των δύο σωμάτων.

✓ Όταν το σύστημα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας ($x=0$):

$N_{\Theta.I.} = (2 - 20 \cdot 0) N = 2 \text{ N} > 0$. Άρα, στη θέση ισορροπίας δεν χάνεται η επαφή των δύο σωμάτων.

✓ Όταν το σύστημα βρίσκεται κάτω από τη θέση ισορροπίας ($x < 0$ ή $x = -|x|$):

$N = 2 - 20 \cdot (-|x|) = 2 + 20|x| > 0$. Άρα, και κάτω από τη θέση ισορροπίας δεν χάνεται η επαφή των δύο σωμάτων.

✓ Όταν το σώμα βρίσκεται πάνω από τη θέση ισορροπίας ($x > 0$), έχουμε:

$N = 2 - 20 \cdot x = 2 - 20 \cdot y$, που είναι μια φθίνουσα πρωτοβάθμια συνάρτηση του x . Έτσι μπορεί σε κάποια θέση y (όπου $0 < y \leq +A$) πάνω απ' τη Θ.Ι. να χαθεί η επαφή του κύβου με το δίσκο. Στη θέση αυτή θα είναι:

$$N = 0 \Rightarrow 2 - 20 \cdot y = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{20} \text{ m} \Rightarrow y = 0,1 \text{ m}.$$

δ) Έστω v το μέτρο της ταχύτητας του κύβου στη θέση y , που χάνεται η επαφή με το δίσκο. Από τη Διατήρηση της Ενέργειας της ταλάντωσης του συστήματος, στη θέση απώλειας επαφής y και στη μέγιστη απομάκρυνση, έχουμε:

$$\frac{1}{2} m_{\text{ολ}} v^2 + \frac{1}{2} k y^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow v^2 = \frac{k(A^2 - y^2)}{m_{\text{ολ}}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k(A^2 - y^2)}{m_{\text{ολ}}}} = \sqrt{\frac{100 \text{ N/m}(0,2^2 - 0,1^2) \text{ m}}{1 \text{ kg}}} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το ζητούμενο μέγιστο ύψος θα προκύψει με εφαρμογή της Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας του κύβου (η μόνη ασκούμενη δύναμη είναι το βάρος - συντηρητική δύναμη), από τη θέση εκτόξευσης (όπου $h = 0$) έως το μέγιστο ύψος (όπου $v' = 0$):

$$K + U_{\beta\alpha\rho} = K' + U'_{\beta\alpha\rho} \Rightarrow \frac{1}{2}m_2v^2 + 0 = 0 + m_2gh_{\max} \Rightarrow h_{\max} = \frac{v^2}{2g} \Rightarrow h_{\max} = \frac{(\sqrt{3})^2 m^2 / s^2}{2 \cdot 10 m / s^2} \Rightarrow$$

$$h_{\max} = 0,15 \text{ m} .$$

Πρόβλημα 7.

Το αριστερό άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=400 \text{ N/m}$ στερεώνεται ακλόνητα και στο δεξιό άκρο του προσδένεται σώμα Σ_1 μάζας $m_1=3 \text{ kg}$, το οποίο μπορεί να κινείται σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Πάνω στο Σ_1 τοποθετείται δεύτερο σώμα Σ_2 μάζας $m_2=1 \text{ kg}$. Εκτοξεύουμε προς τα δεξιά το σύστημα από τη θέση ισορροπίας του, με ταχύτητα μέτρου V και παράλληλη με το οριζόντιο επίπεδο, όπως στο σχήμα, οπότε το σύστημα εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση. Τα δύο σώματα διατηρούν την επαφή στη διάρκεια της ταλάντωσης.



- Να υπολογίσετε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης καθώς και τις σταθερές ταλάντωσης $D_{ολ}$, D_1 και D_2 του συστήματος και των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα.
- Να τοποθετήσετε το σύστημα σε μια τυχαία θέση της ταλάντωσης του, να σχεδιάσετε και να περιγράψετε σε τρία κατάλληλα σχήματα τις δυνάμεις, που δέχονται: i) το σύστημα $\Sigma_1 - \Sigma_2$, ii) το Σ_1 και iii) το Σ_2 .
- Να παραστήσετε γραφικά την αλγεβρική τιμή της στατικής τριβής από το Σ_1 στο Σ_2 σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του, για πλάτος ταλάντωσης $A=3 \text{ cm}$.
- Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή της αρχικής ταχύτητας εκτόξευσης V_{max} , του συστήματος των Σ_1 , Σ_2 ώστε το σώμα Σ_2 να μην ολισθήσει πάνω στο σώμα Σ_1 . Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10 \text{ m/s}^2$ και ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων Σ_1 και Σ_2 είναι $\mu_s=0,5$.

Λύση

- Τα δύο σώματα του συστήματος, έχουν κοινή γωνιακή συχνότητα ω , αλλά έχουν διαφορετική σταθερά Ταλάντωσης ($D_1 \neq D_2 \neq D_{ολ}$).

Το σύστημα έχει σταθερά ταλάντωσης: $D_{ολ} = k = 400 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ και ολική μάζα $m_{ολ} = m_1 + m_2$.

Η γωνιακή συχνότητα του συστήματος είναι: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{400}{4}} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Εξισώνουμε τις γωνιακές συχνότητες:

$$\omega_1 = \omega_{ολ} \Rightarrow \sqrt{\frac{D_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{D_{ολ}}{m_{ολ}}} \Rightarrow \frac{D_1}{m_1} = \frac{D_{ολ}}{m_{ολ}} = \frac{k}{m_1 + m_2} \Rightarrow D_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} k \Rightarrow D_1 = 300 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

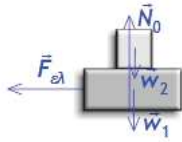
$$\omega_2 = \omega_{ολ} \Rightarrow \sqrt{\frac{D_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{D_{ολ}}{m_{ολ}}} \Rightarrow \frac{D_2}{m_2} = \frac{D_{ολ}}{m_{ολ}} = \frac{k}{m_1 + m_2} \Rightarrow D_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} k \Rightarrow D_2 = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

β) Οι ασκούμενες δυνάμεις είναι:

i) στο σύστημα $\Sigma_1 - \Sigma_2$:

Στον x-άξονα: Η δύναμη από το ελατήριο $F_{ελ}$.

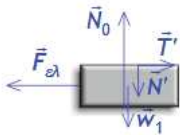
Στον y-άξονα: Το βάρος $w_{ολ} = w_1 + w_2$, η δύναμη επαφής N_0 από το λείο οριζόντιο δάπεδο.



ii) στο Σ_1 :

Στον x-άξονα: Η δύναμη από το ελατήριο $F_{ελ}$ και η δύναμη της στατικής τριβής T' από το Σ_2 .

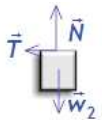
Στον y-άξονα: Το βάρος w_1 , η δύναμη επαφής N_0 από το λείο οριζόντιο δάπεδο και η δύναμη επαφής N' από το Σ_2 .



iii) στο Σ_2 :

Στον x-άξονα: Η δύναμη της στατικής τριβής T από το Σ_1 .

Στον y-άξονα: Το βάρος w_2 και η δύναμη επαφής N από το Σ_1 .



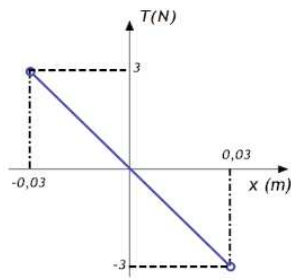
γ) Εφαρμόζουμε τη Συνθήκη ταλάντωσης για το Σ_2 και λαμβάνουμε υπόψη ότι η μοναδική δύναμη, που δέχεται στον οριζόντιο άξονα είναι η στατική τριβή T , άρα αποτελεί τη δύναμη επαναφοράς του Σ_2 :

$$\Sigma F_x^{(2)} = -D_2 \cdot x \Rightarrow T = -D_2 \cdot x.$$

Άρα η αλγεβρική τιμή της στατικής τριβής δίνεται από τη συνάρτηση:

$T = -100 \cdot x$, με $-A \leq x \leq A \Rightarrow -0,03 \leq x \leq 0,03$, οπότε και $-3 \leq T \leq 3$ (όλες οι τιμές στο S.I.).

Η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



δ) Εφαρμόζουμε τη Συνθήκη ταλάντωσης για το Σ_2 : $\Sigma F_x^{(2)} = -D_2 \cdot x$. Θεωρώντας θετική φορά την προς τα δεξιά, έχουμε: $-T = -D_2 \cdot x \Rightarrow T = D_2 \cdot x$.

Παρατηρούμε ότι το μέτρο της στατικής τριβής είναι ανάλογο της απομάκρυνσης x , άρα η στατική τριβή μεγιστοποιείται στα ακρότατα, δηλαδή: $T_{\max} = D_2 \cdot A$.

Γνωρίζουμε ότι η μέγιστη τιμή της στατικής, δηλαδή η οριακή τριβή είναι ίση με: $T_{\text{op}} = \mu_{\sigma} \cdot N$, όπου μ_{σ} είναι ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων και N είναι η κάθετη αντίδραση στο Σ_2 , η οποία υπολογίζεται από τη Συνθήκη Ισορροπίας στον y -άξονα: $\Sigma F_y^{(2)} = 0 \Rightarrow N = m_2 g$.

Τελικά, η οριακή τριβή είναι ίση με: $T_{\text{op}} = \mu_{\sigma} \cdot m_2 g = 0,5 \cdot 1\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2 \Rightarrow T_{\text{op}} = 5\text{ N}$.

Για να μην ολισθήσει το Σ_2 πάνω στο Σ_1 πρέπει:

$$T_{\max} \leq T_{\text{op}} \Rightarrow D_2 \cdot A \leq T_{\text{op}} \Rightarrow A \leq \frac{T_{\text{op}}}{D_2} \Rightarrow A \leq \frac{5\text{N}}{100\text{N/m}} \Rightarrow A \leq 0,05\text{ m}.$$

Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $u_{\max} = \omega \cdot A \Rightarrow A = \frac{u_{\max}}{\omega}$,

οπότε με βάση την προηγούμενη ανισότητα θα ισχύει: $\frac{u_{\max}}{\omega} \leq 0,05 \Rightarrow u_{\max} \leq \omega \cdot 0,05 \Rightarrow$

$$u_{\max} \leq 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$