

**1<sup>ο</sup> Διαγώνισμα στις Κρούσεις  
με Θέματα από το Ψηφιακό Σχολείο**

**Τα θέματα επιμελήθηκαν οι Ιστάπολος Βασίλειος και Ποντικός Ηλίας.**

**A1.** Σε κάθε μετωπική κρούση μεταξύ δύο σωμάτων διατηρείται:

**α.** Η ορμή κάθε σώματος ξεχωριστά.

**β.** Η κινητική ενέργεια κάθε σώματος ξεχωριστά.

**γ.** Η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων.

**δ.** Η ορμή του συστήματος των δύο σωμάτων.

**δ**

**A2.** Σε κάθε πλαστική κρούση μεταξύ δύο σωμάτων:

**α.** Διατηρείται η κινητική ενέργεια του συστήματός τους.

**β.** Που πριν την κρούση τα σώματα έχουν αντίθετες ορμές, το δημιουργούμενο συσσωμάτωμα παραμένει ακίνητο.

**γ.** Το σώμα μικρότερης μάζας υφίσταται μικρότερη κατά μέτρο μεταβολή στην ορμή του.

**δ.** Που πριν την κρούση τα σώματα κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις με ίσες κινητικές ενέργειες, η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος μετατρέπεται πάντα όλη σε θερμότητα.

**β**

**A3.** Ένα σώμα μάζας  $m$  προσκρούει κάθετα και ελαστικά σε μια ακλόνητη επιφάνεια με ορμή μέτρου  $p$  και κινητική ενέργεια  $K$ .

**α.** Η μεταβολή του μέτρου της ορμής του σώματος είναι  $2p$ .

**β.** Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος είναι  $2K$ .

**γ.** Το μέτρο της μεταβολής της ταχύτητας του σώματος είναι ίσο με **μηδέν**.

**δ.** Το έργο της συνολικής δύναμης που ασκεί η επιφάνεια στο σώμα είναι ίσο με **μηδέν**.

**δ**

**A4.** Για την **επιβράδυνση** των νετρονίων στους πυρηνικούς αντιδραστήρες, προκαλούμε την κρούση τους με **ακίνητους** πυρήνες. Αν οι κρούσεις θεωρηθούν κεντρικές ελαστικές, για να επιτύχουμε τα νετρόνια να έχουν **μηδενική** κινητική ενέργεια μετά την κρούση, θα πρέπει αυτά να συγκρουστούν με πυρήνες:

**α.** Βηρυλλίου ( $m_{Be}=8m_n$ ).

**β.** Ηλίου ( $m_{He}=4m_n$ ).

**γ.** Υδρογόνου ( $m_H=m_n$ ).

**δ.** Ουρανίου ( $m_U=238m_n$ ).

**γ**



**A.** Στην έκκεντρη κρούση οι ταχύτητες των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται είναι παράλληλες πριν και μετά την κρούση.

**B.** Η σκέδαση είναι φαινόμενο του μακρόκοσμου.

**Γ.** Η πλαστική κρούση είναι ειδική περίπτωση ανελαστικής κρούσης που οδηγεί στη συγκόλληση των σωμάτων.

**Δ.** Μια σφαίρα προσπίπτει πλάγια σε μια ακλόνητη επιφάνεια και συγκρούεται ελαστικά με αυτήν. Για τη σφαίρα ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής.

**Ε.** Η ορμή ενός μονωμένου συστήματος σωμάτων διατηρείται και στην περίπτωση της ανελαστικής κρούσης.

**A – Λ**

**B – Λ**

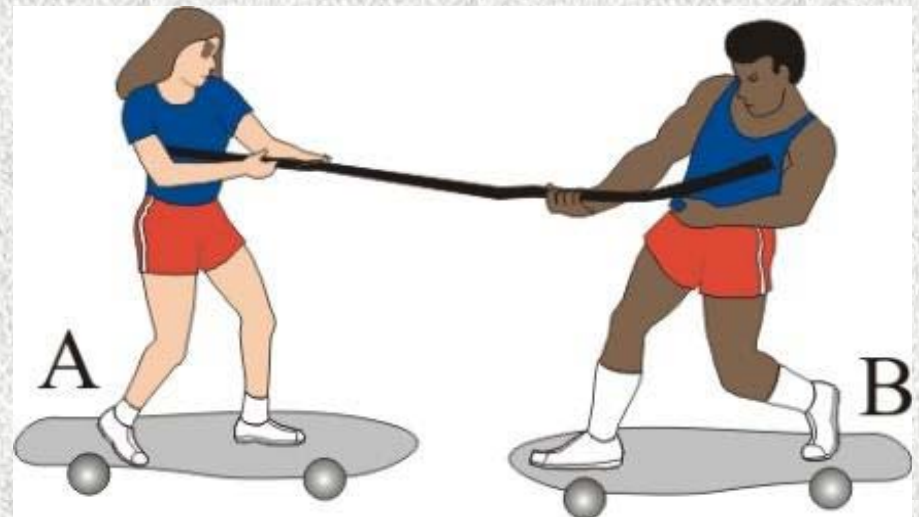
**Γ – Σ**

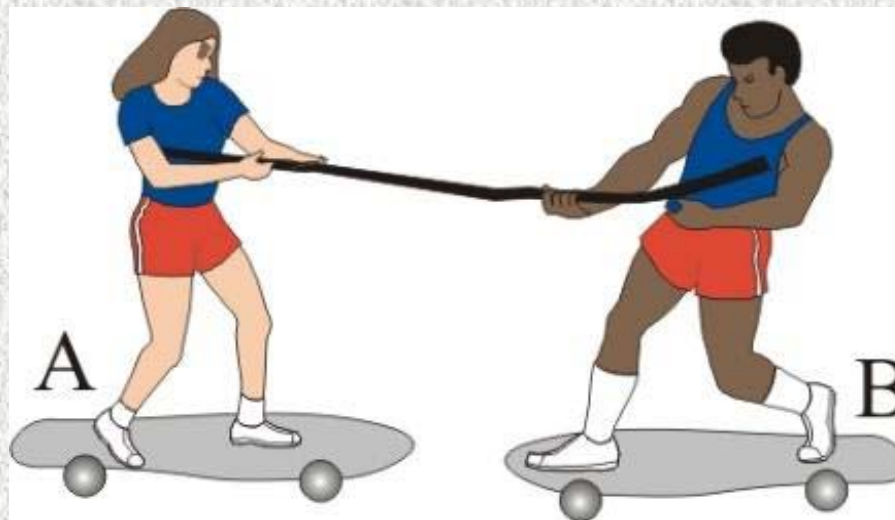
**Δ – Λ**

**Ε – Σ**

**B1.** Στο σχήμα δείχνονται δύο παιδιά με πατίνια που ήταν αρχικά **ακίνητα**. Η μάζα του αγοριού είναι μεγαλύτερη από τη μάζα του κοριτσιού ( $m_B > m_A$ ). Τα παιδιά τραβούν το σχοινί καθένα προς το μέρος του, όταν συναντηθούν αγκαλιάζονται και παραμένουν **αγκαλιασμένα**. Αν αγνοηθούν οι τριβές τότε το συσσωμάτωμα που δημιουργήθηκε θα:

- α.** κινηθεί προς τα δεξιά.
- β.** κινηθεί προς τα αριστερά.
- γ.** παραμείνει ακίνητο.





**B1.** Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Τα παιδιά πριν αρχίζουν να τραβούν το σχοινί είναι ακίνητα, άρα η συνολική ορμή τους αρχικά είναι μηδέν. Όταν αυτά αγκαλιαστούν, η συνολική ορμή του συστήματος είναι  $\vec{p}_{ολ(τελ)} = (m_A + m_B) \vec{V}_κ$  (1). Το σύστημα - παιδιά - πατίνια σχοινί είναι ένα μονωμένο σύστημα, άρα η συνολική του ορμή διατηρείται σταθερή και ίση με μηδέν. Για να συμβαίνει αυτό, όπως προκύπτει από τη σχέση (1), πρέπει  $\vec{V}_κ = 0$ . Άρα το συσσωμάτωμα θα παραμείνει ακίνητο.

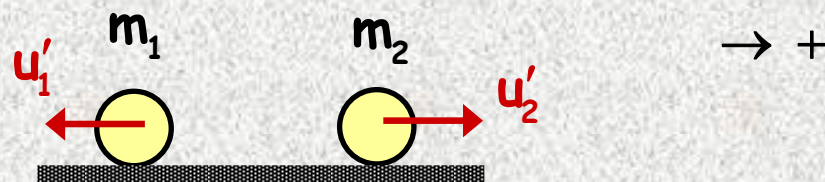
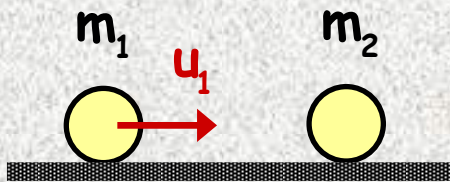


**B2.** Μια σφαίρα  $\Sigma_1$ , μάζας  $m_1$ , συγκρούεται κεντρικά **ελαστικά** με ακίνητη σφαίρα  $\Sigma_2$ , μάζας  $m_2$ . Μετά την κρούση οι σφαίρες κινούνται σε **αντίθετες** κατευθύνσεις και το **μέτρο** της ταχύτητας της  $\Sigma_1$  είναι **διπλάσιο** από αυτό της  $\Sigma_2$ . Τις μάζες των δύο σφαιρών τις συνδέει η σχέση:

**α.**  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{5}$

**β.**  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{5}$

**γ.**  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{4}{5}$



Αλγεβρικές τιμές ταχυτήτων

$$u'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 \quad u'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1$$

$$u'_1 = -2u'_2 \rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{5} \quad \text{α.}$$

Μέτρα ταχυτήτων

$$-u'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 \quad u'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1$$

$$u'_1 = 2u'_2 \rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{5} \quad \text{α.}$$

**B3.** Δύο σώματα  $\Sigma_1, \Sigma_2$  με μάζες  $m_1=m$  και  $m_2=m$ , κινούνται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο σε **κάθετες** μεταξύ τους διευθύνσεις και με ταχύτητες μέτρου  $u_1=u$  και  $u_2=3u$  αντίστοιχα. Κάποια χρονική στιγμή, τα σώματα συγκρούονται **πλαστικά**. Το ποσό θερμότητας που ελευθερώνεται κατά την κρούση είναι:

**α.**  $\frac{5}{2}mu^2$     **β.**  $\frac{3}{2}mu^2$     **γ.**  $\frac{1}{2}mu^2$

$$p_{\text{αρχ}} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \sqrt{(mu)^2 + (m3u)^2} = mu\sqrt{10}$$

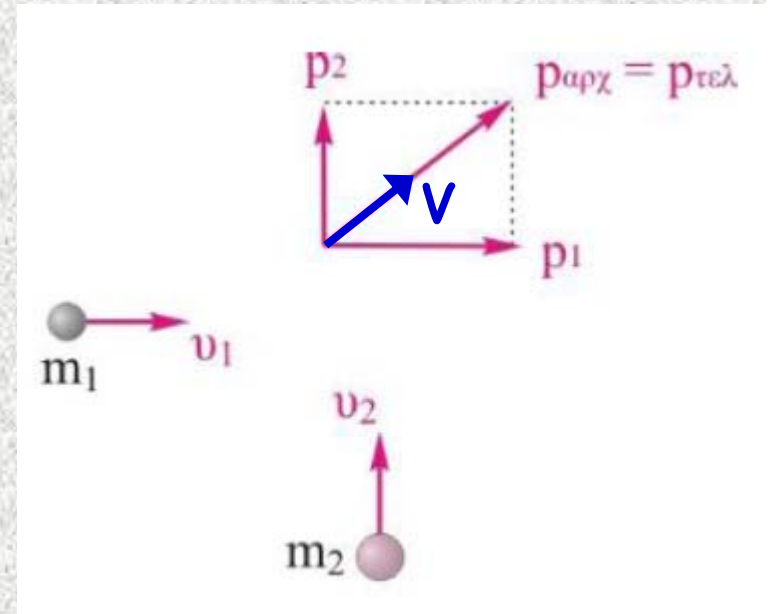
$$p_{\text{τελ}} = 2mV$$

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \rightarrow mu\sqrt{10} = 2mV \rightarrow V = u\sqrt{2,5}$$

$$Q = K_{\text{αρχ, Συστ}} - K_{\text{τελ, Συστ}} = \left[ \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}m(3u)^2 \right] - \left[ \frac{1}{2}2mV^2 \right] = \frac{5}{2}mu^2 \quad \text{α.}$$

Το ποσοστό % της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος που μετατρέπεται σε θερμότητα κατά την κρούση είναι:

$$\pi\% = \frac{Q}{K_{\text{αρχ, Συστ}}} 100\%$$



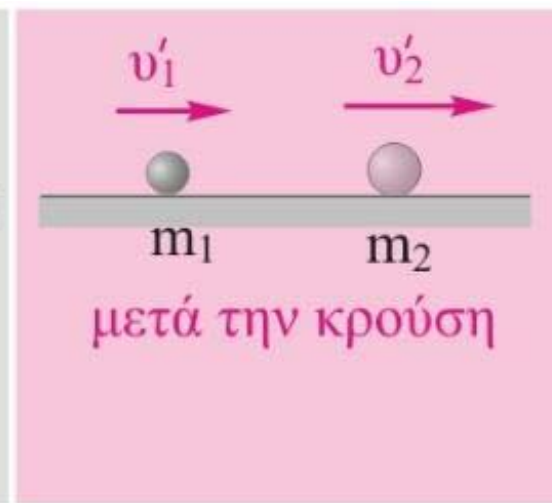
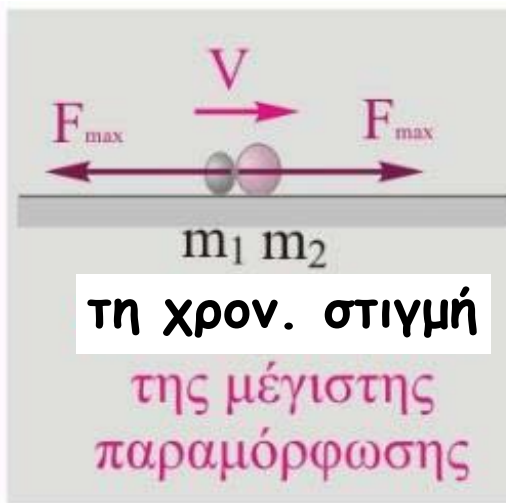
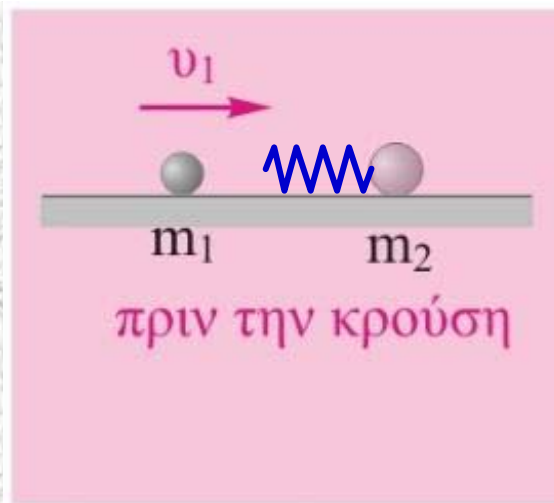
**B4.** (Σε μια κεντρική ελαστική κρούση δύο σωμάτων που το ένα είναι ακίνητο, οι αναπτυσσόμενες εσωτερικές δυνάμεις προκαλούν επιτάχυνση του ενός σώματος και επιβράδυνση του άλλου. Ταυτόχρονα, συμβαίνει παροδική μετατροπή της κινητικής ενέργειας σε δυναμική ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης, η οποία δυναμική ενέργεια μεγιστοποιείται όταν τα δύο σώματα στιγμιαία αποκτούν ίδιες ταχύτητες.)

Σε μια κεντρική ελαστική κρούση ένα σώμα,  $\Sigma_1$ , μάζας  $m_1$  προσπίπτει σε ακίνητο σώμα,  $\Sigma_2$ , μάζας  $m_2$ . Αν η μέγιστη δυναμική ενέργεια της ελαστικής παραμόρφωσης κατά τη διάρκεια της κρούσης είναι ίση με τα  $64/100$  της αρχικής κινητικής ενέργειας του  $\Sigma_1$ , τότε ο λόγος των δύο μαζών είναι:

- α.  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{8}$
- β.  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{9}{16}$
- γ.  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{16}{9}$







$$m_1 u_1 = (m_1 + m_2) V \rightarrow V = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} m_1 V^2 + \frac{1}{2} m_2 V^2 + U_{E\lambda, \max} \quad (2)$$

$$U_{E\lambda, \max} = \frac{64}{100} \frac{1}{2} m_1 u_1^2 \quad (3)$$

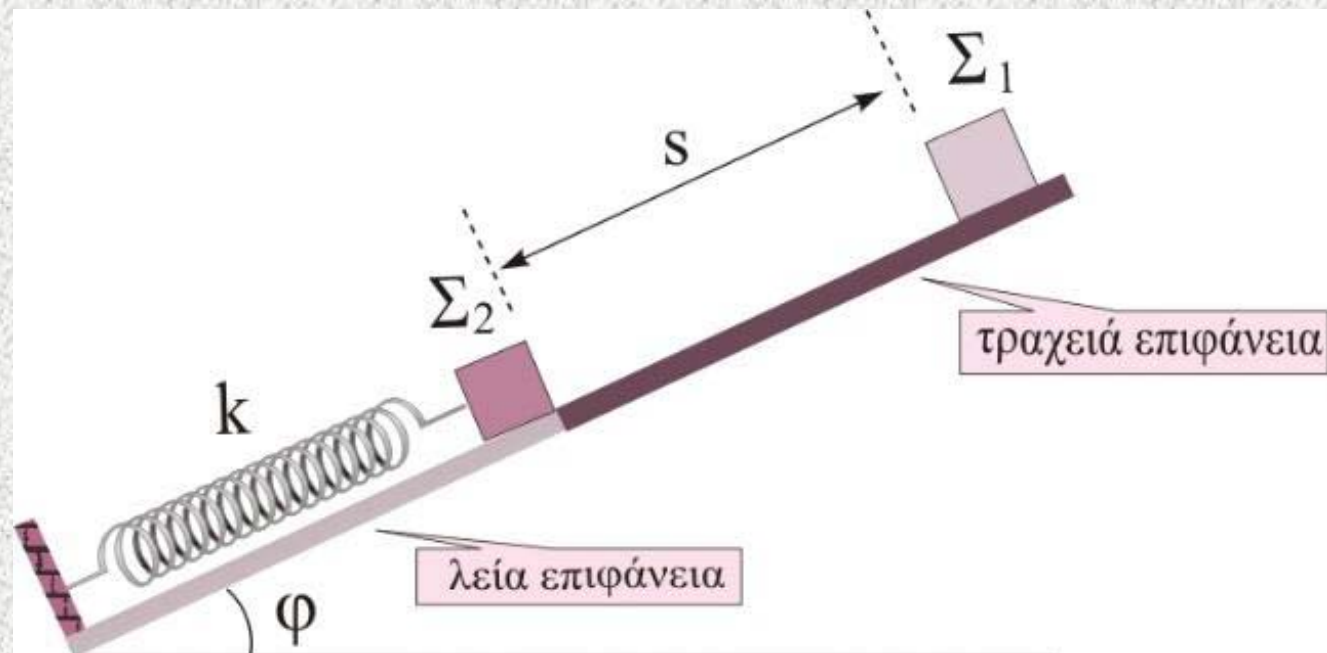
$$(2), (1), (3) \rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{9}{16} \quad \beta.$$



Γ. Το σώμα  $\Sigma_2$  μάζας  $m_2$  ισορροπεί στην πάνω άκρη ελατηρίου σταθεράς  $k=120\text{N/m}$  του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο στη βάση πλάγιου επιπέδου γωνίας κλίσης  $\varphi$ , με  $\eta\mu\varphi=0,6$  και  $\sigma\upsilon\eta\varphi=0,8$ . Το επίπεδο από τη βάση του μέχρι το σώμα  $\Sigma_2$  είναι λείο, ενώ το τμήμα από το  $\Sigma_2$  μέχρι την κορυφή είναι τραχύ. Στη θέση ισορροπίας του σχήματος, το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά  $\Delta L=15\text{cm}$ . Από την κορυφή του επιπέδου, που απέχει  $s=4\text{m}$  από το  $\Sigma_2$ , αφήνουμε να κινηθεί ένα σώμα  $\Sigma_1$  μάζας  $m_1=1\text{kg}$ , το οποίο κινούμενο στην τραχειά επιφάνεια συγκρούεται ελαστικά με το  $\Sigma_2$ . Ο συντελεστή τριβής ολίσθησης είναι  $\mu=0,5$  και θεωρούμε  $t=0$  τη χρονική στιγμή της κρούσης. Να βρείτε:

Γ1. Το μέτρο της ταχύτητας του  $\Sigma_1$  ελάχιστα πριν την κρούση.

Δίνεται  $g=10\text{m/s}^2$ .



ΘΜΚΕ  $A \rightarrow B$

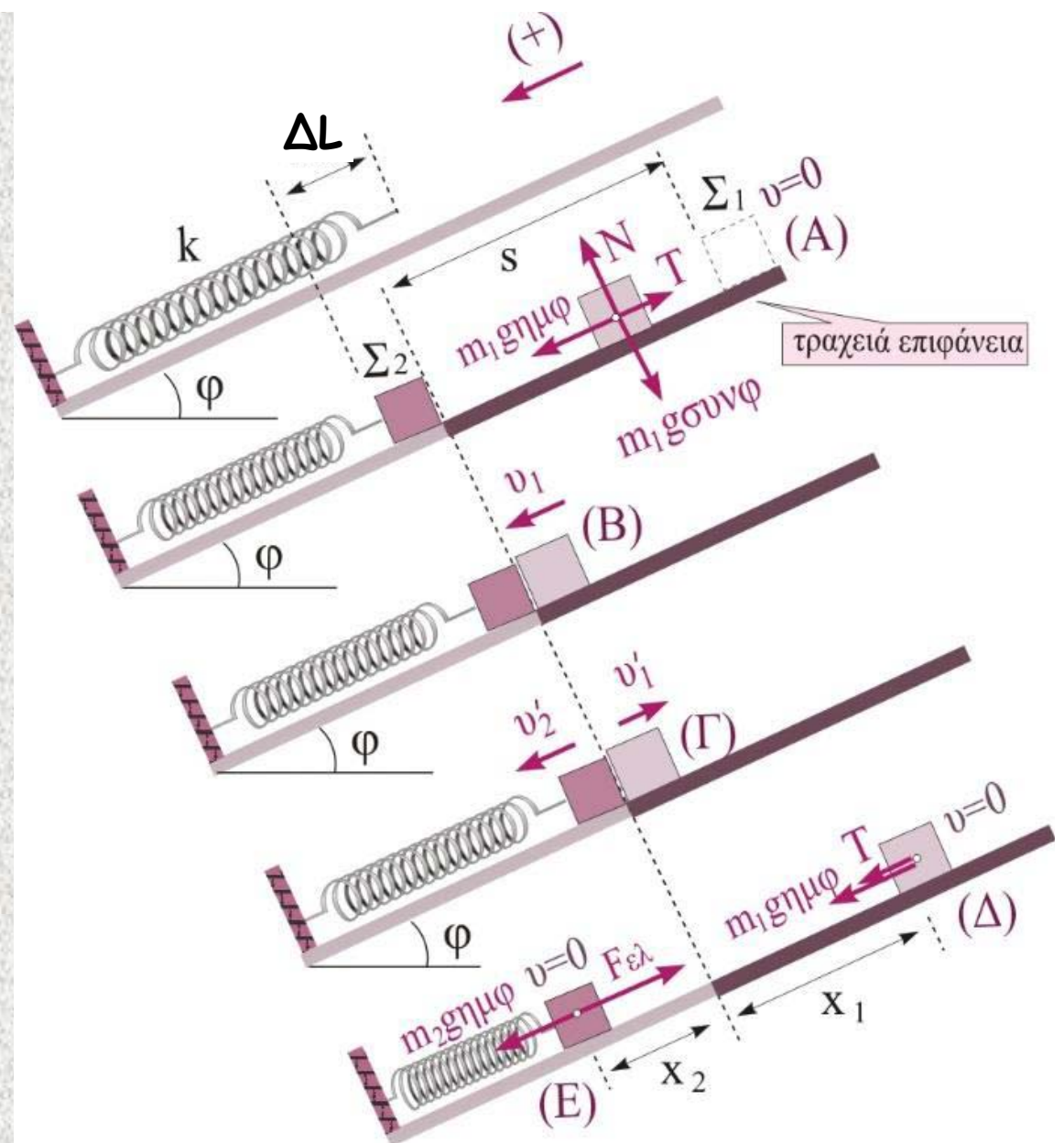
$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 - 0 = W_{W,A \rightarrow B} + W_{T,A \rightarrow B}$$

$$W_{W,A \rightarrow B} = m_1 g \eta \mu \varphi \cdot s$$

$$W_{T,A \rightarrow B} = -\mu m_1 g \sigma \nu \varphi \cdot s$$

$$\frac{1}{2} m u_1^2 = m_1 g \eta \mu \varphi \cdot s - \mu m_1 g \sigma \nu \varphi \cdot s$$

$$u_1 = 4 \text{ m/s}$$





**Γ2.** Τις ταχύτητες των σωμάτων  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  αμέσως μετά την κρούση.

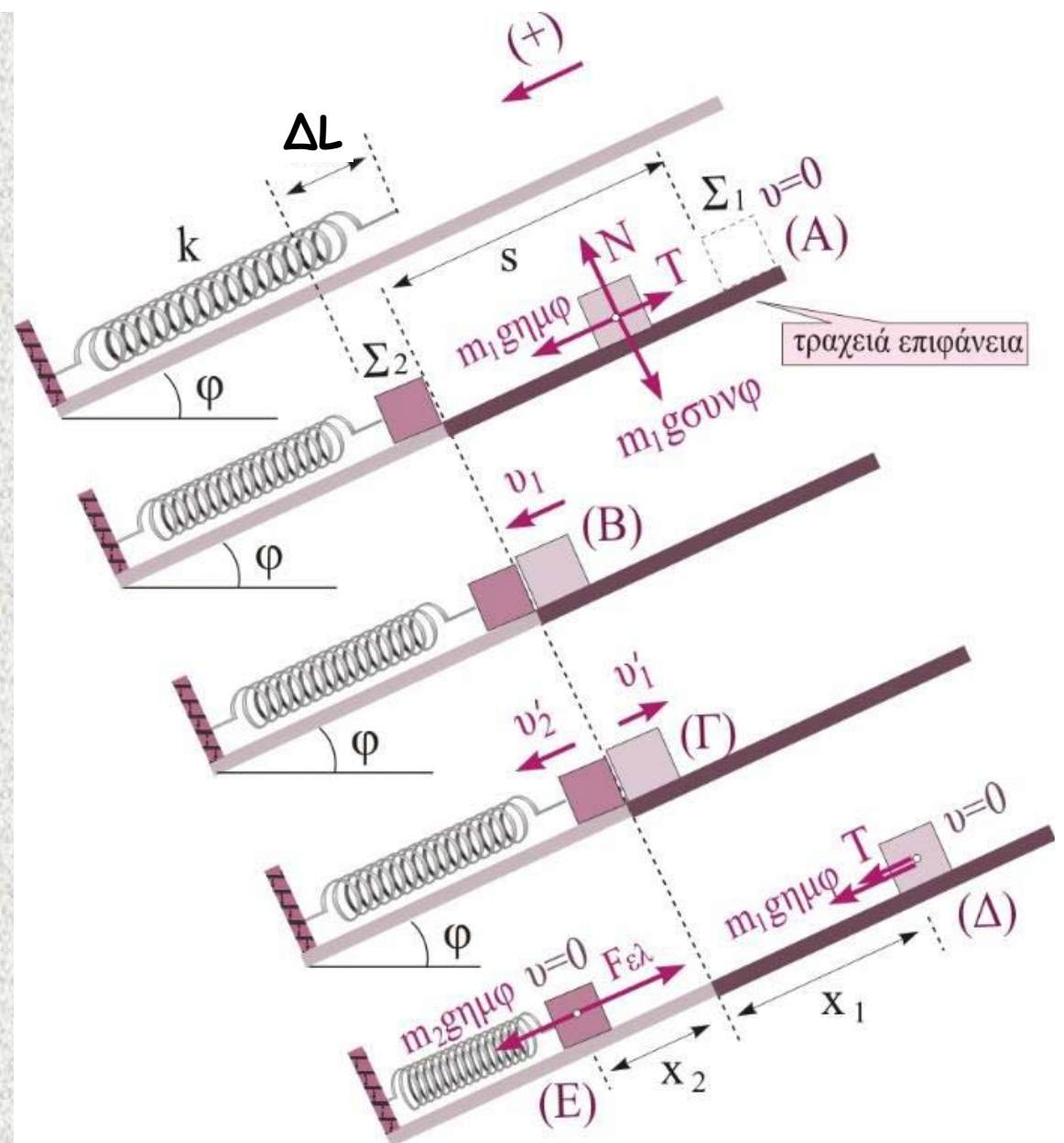
$$\Sigma F_2 = 0$$

$$m_2 g \eta \mu \varphi = k \Delta L$$

$$m_2 = 3 \text{ kg}$$

$$u'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = -2 \text{ m/s}$$

$$u'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} = 2 \text{ m/s}$$



**Γ3.** Τη μέγιστη απόσταση που θα διανύσει το σώμα  $\Sigma_2$  μετά την κρούση μέχρι να σταματήσει στιγμιαία για  $1^{\eta}$  φορά.

ΘΜΚΕ  $\Gamma \rightarrow \text{E}$

$$0 - \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 = W_{W, \Gamma \rightarrow \text{E}} + W_{F_{\text{ελ}}, \Gamma \rightarrow \text{E}}$$

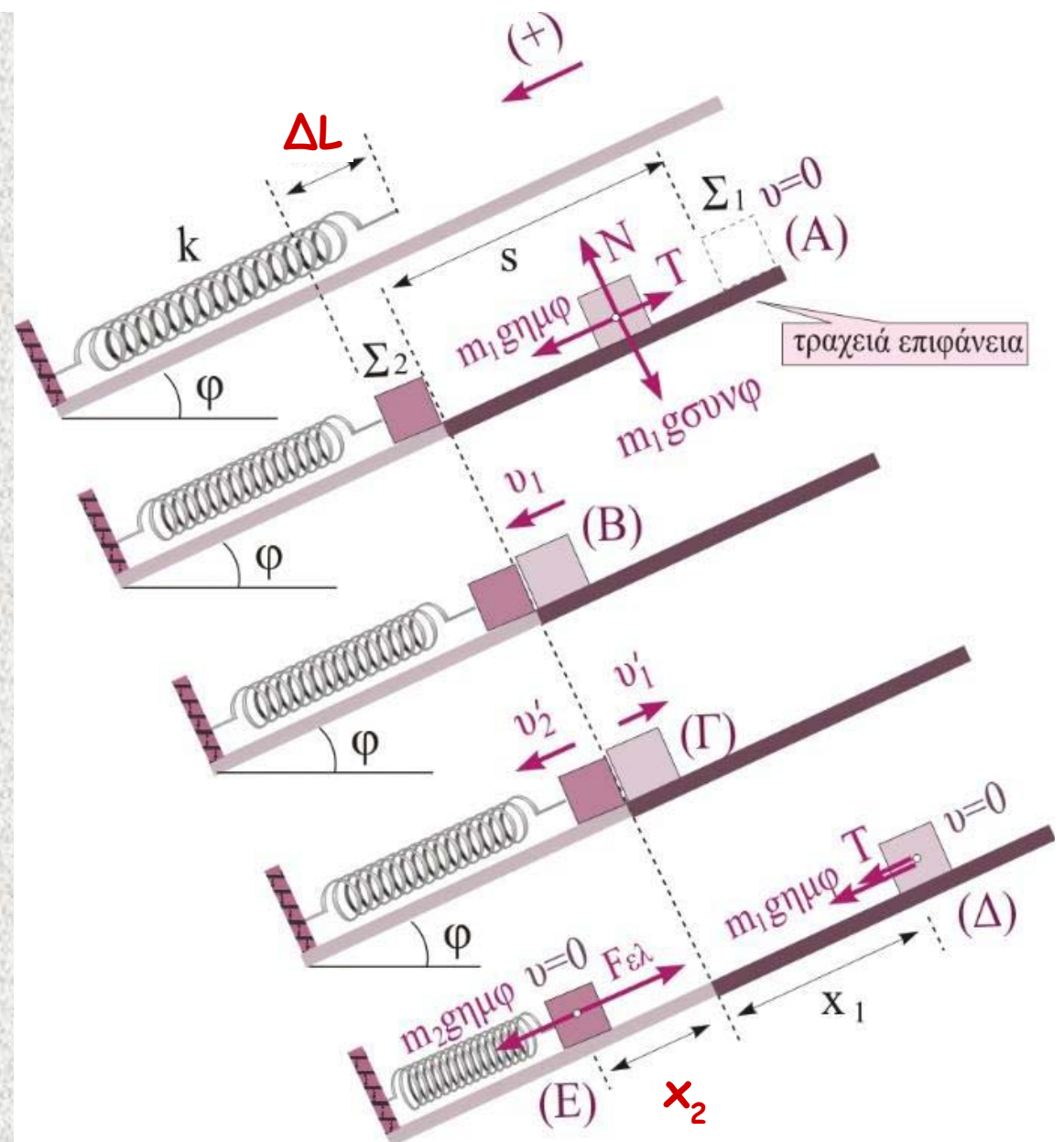
$$W_{W, \Gamma \rightarrow \text{E}} = m_2 g \eta \mu \varphi \cdot x_2$$

$$W_{F_{\text{ελ}}, \Gamma \rightarrow \text{E}} = \frac{1}{2} k \Delta L^2 - \frac{1}{2} k (\Delta L + x_2)^2$$

$$m_2 g \eta \mu \varphi = k \Delta L$$

$$m_2 u_2'^2 = k x_2^2$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{10}}{10} m$$





**Γ4.** Τη χρονική στιγμή που το σώμα  $\Sigma_1$  θα σταματήσει στιγμιαία για  $1^{\text{η}}$  φορά μετά την κρούση.

$$a_1 = \frac{\Sigma F_1}{m_1}$$

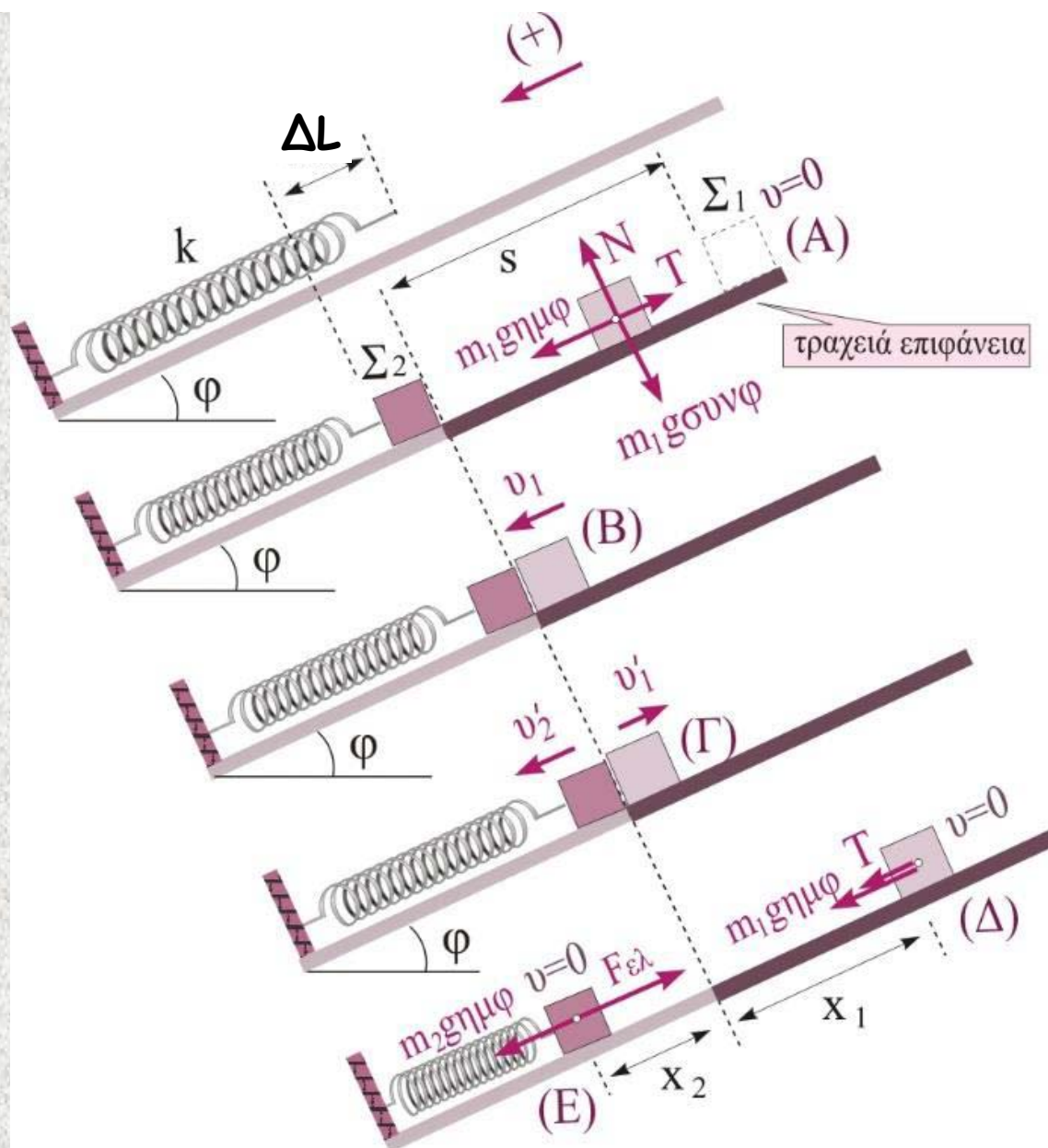
$$a_1 = \frac{W_{1,x} + T}{m_1}$$

$$a_1 = \frac{m_1 g \mu \varphi + \mu m_1 g \sigma \nu \varphi}{m_1}$$

$$a_1 = 10 \text{ m/s}^2$$

$$0 = |u'_1| - a_1 t$$

$$t = 0,2 \text{ s}$$



**Γ5.** Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος  $\Sigma_2$  τη χρονική στιγμή που η κινητική του ενέργεια μηδενίζεται για  $1^{\text{η}}$  φορά μετά την κρούση.

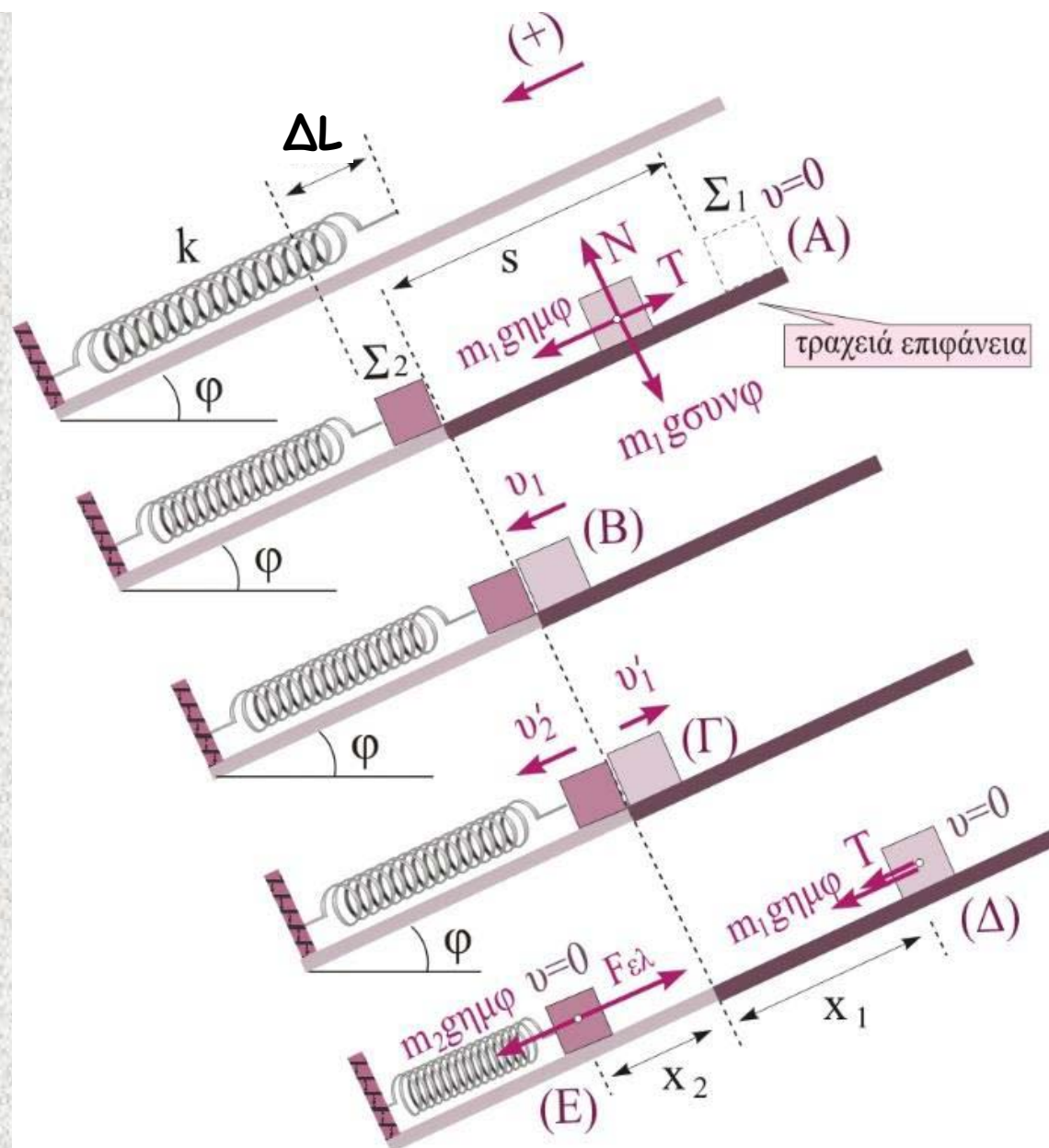
$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = |\Sigma F_2| = |F_{\text{ελ}} - W_{2x}|$$

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = |k(\Delta L + x_2) - m_2 g \eta \mu \varphi|$$

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = 12\sqrt{10}\text{N}$$

$$m_2 g \eta \mu \varphi = k \Delta L$$

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = |kx_2|$$



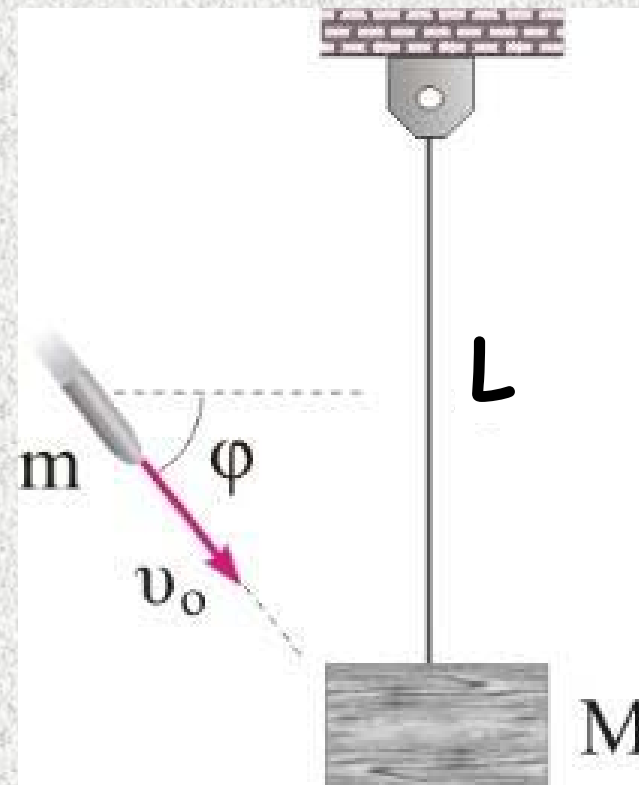
**Δ.** Στη μια άκρη ενός αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους  $L=0,4\text{m}$  δένουμε σώμα μάζας  $M=1,9\text{kg}$ . Η άλλη άκρη του νήματος είναι στερεωμένη σε οροφή και το σύστημα βρίσκεται σε **ισορροπία**. Βλήμα μάζας  $m=0,1\text{kg}$  κινούμενο με ταχύτητα μέτρου  $u_0=160\text{m/s}$  που σχηματίζει γωνία  $\varphi=60^\circ$  με την οριζόντια διεύθυνση σφηνώνεται στο σώμα μάζας  $M$ .

Να βρείτε:

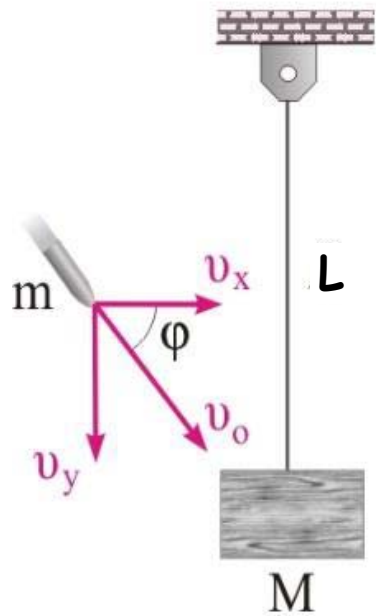
**Δ1.** Την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Δίνονται:  $g=10\text{m/s}^2$ ,  $\sin 60^\circ=1/2$  και

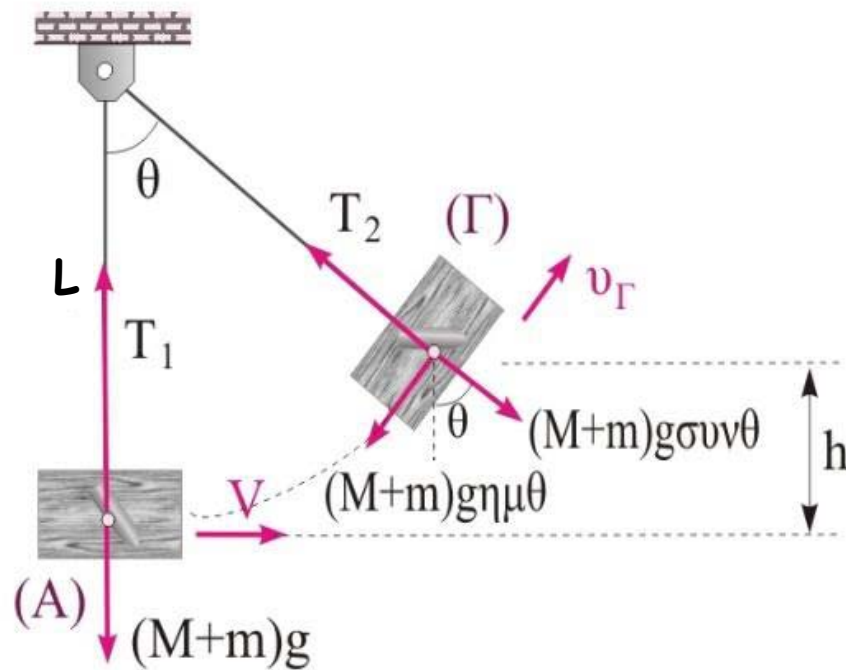
$$\sqrt{\frac{980}{3}} = 18$$



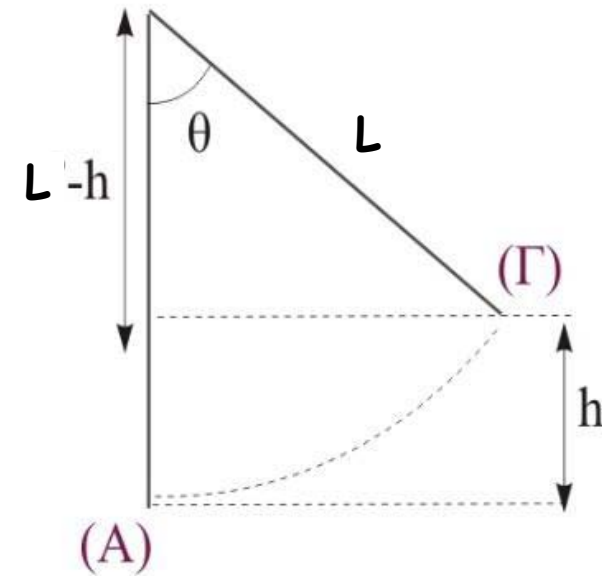




λίγο πριν  
την κρούση



αμέσως μετά  
την κρούση



$$L - h = L \cos \theta$$

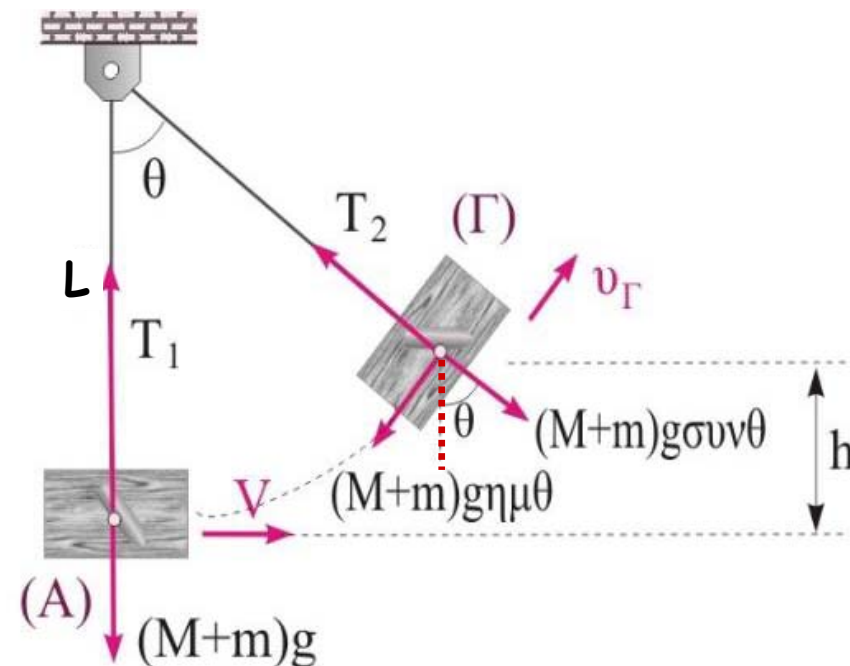
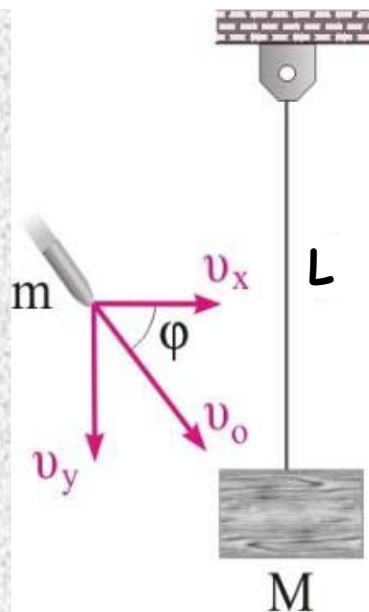
$$h = L(1 - \cos \theta)$$

Αρχή διατήρησης της ορμής στον **οριζόντιο** άξονα.

$$m v_0 \cos \phi = (M + m) V \rightarrow V = 4 \text{ m/s}$$

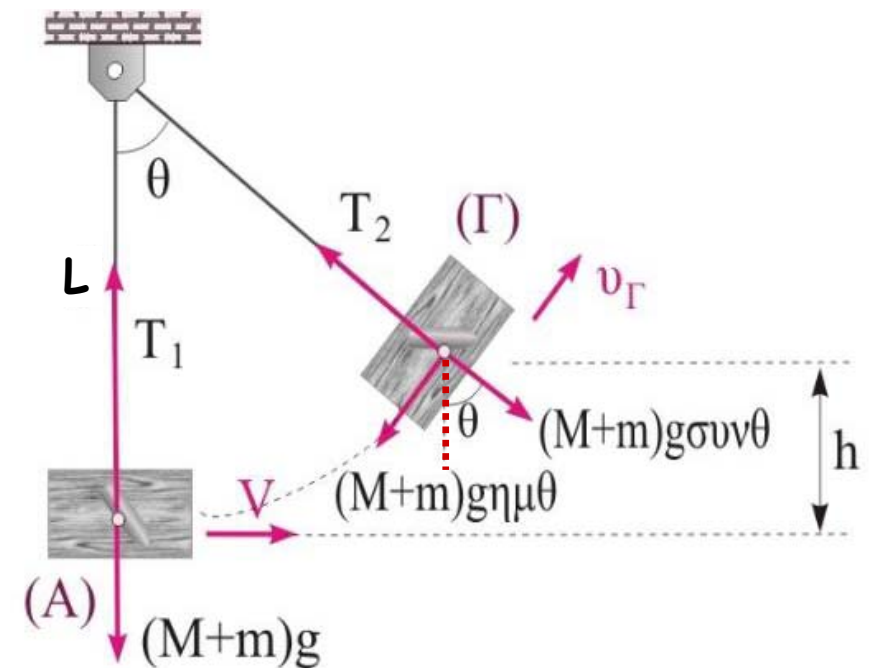
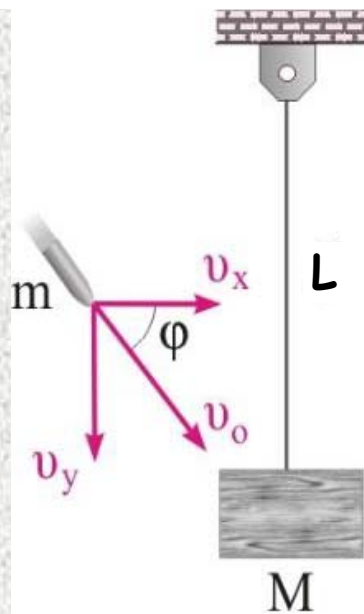


**Δ2.** Το επί τοις % ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του βλήματος, που μετατράπηκε σε θερμότητα κατά την κρούση.



$$\pi \% = \frac{Q}{K_{\Sigma \text{υστ}, \text{πριν}}} = \frac{K_{\Sigma \text{υστ}, \text{πριν}} - K_{\Sigma \text{υστ}, \text{μετά}}}{K_{\Sigma \text{υστ}, \text{πριν}}} = \frac{\frac{1}{2} m u_0^2 - \frac{1}{2} (m + M) V^2}{\frac{1}{2} m u_0^2} = 98,75\%$$

**Δ3.** Το συνημίτονο της γωνίας  $\theta$  που σχηματίζει το νήμα με την κατακόρυφο, τη στιγμή που το μέτρο της τάσης του νήματος είναι το **μισό** της τάσης που είχε αμέσως μετά την κρούση.

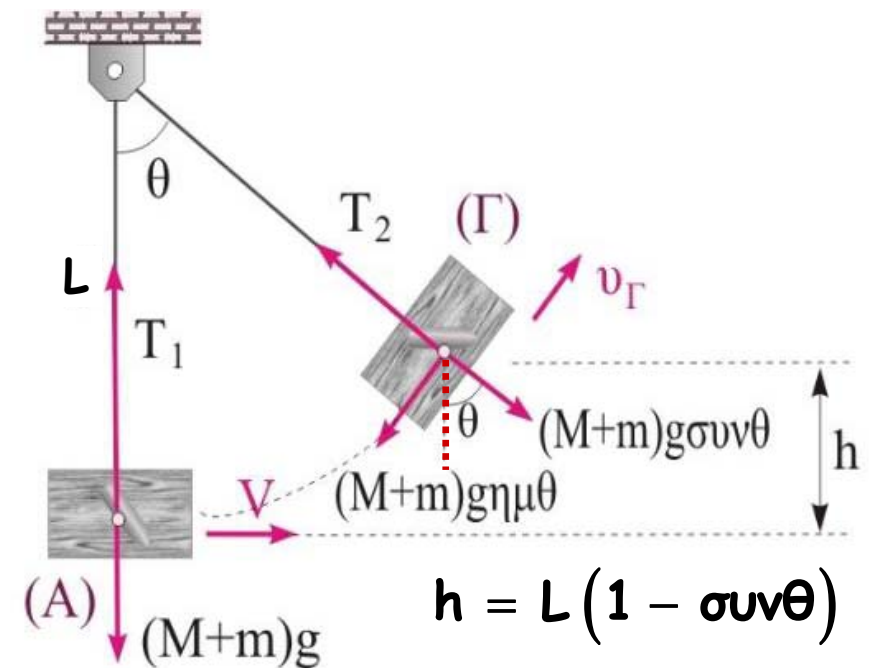
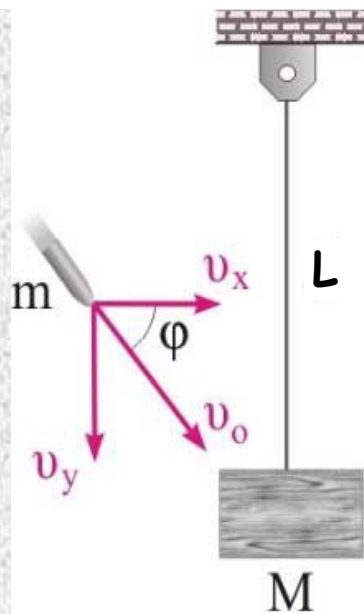


$$F_{k,1} = \frac{(M + m)V^2}{L} \quad \rightarrow \quad T_1 - (M + m)g = \frac{(M + m)V^2}{L} \quad \rightarrow \quad T_1 = 100\text{N}$$

$$F_{k,1} = T_1 - (M + m)g$$

$$T_2 = 50\text{N}$$

**Δ3.** Το συνημίτονο της γωνίας  $\theta$  που σχηματίζει το νήμα με την κατακόρυφο, τη στιγμή που το μέτρο της τάσης του νήματος είναι το **μισό** της τάσης που είχε αμέσως μετά την κρούση.



$$F_{k,2} = \frac{(M+m)u_f^2}{L} \rightarrow \frac{(M+m)u_f^2}{L} = T_2 - (M+m)g \cos \theta \quad (1)$$

$$F_{k,2} = T_2 - (M+m)g \cos \theta$$

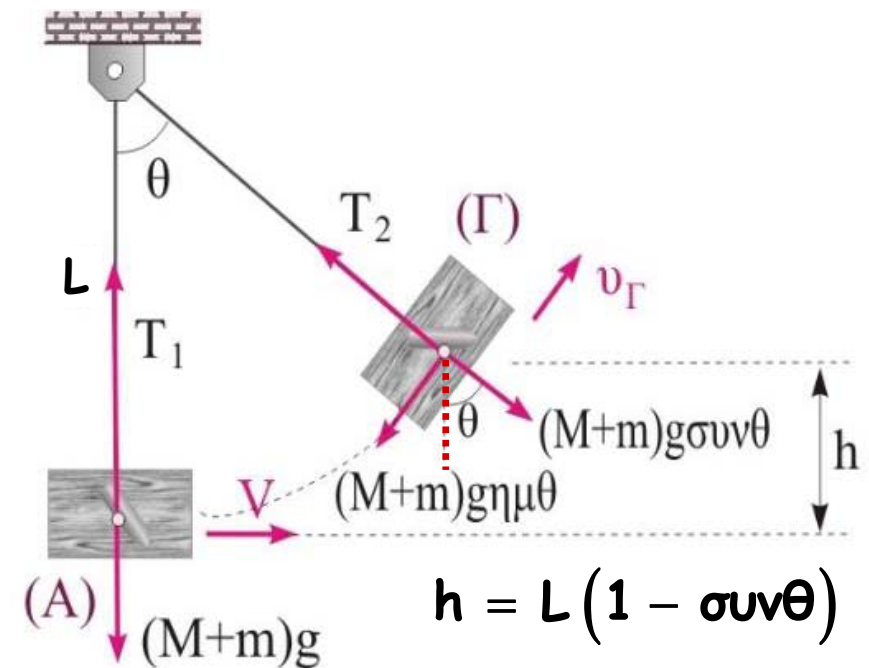
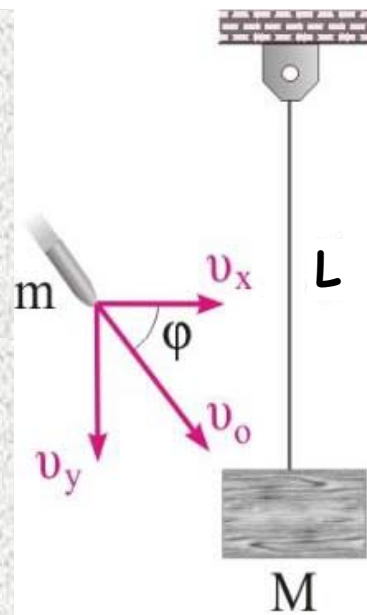
ΑΔΜΕ  $A \rightarrow \Gamma$

$$\frac{1}{2}(M+m)V^2 = \frac{1}{2}(M+m)u_f^2 + mgh$$

$$\frac{1}{2}(M+m)V^2 = \frac{1}{2}(M+m)u_f^2 + mgL(1 - \cos \theta) \quad (2)$$



**Δ3.** Το συνημίτονο της γωνίας  $\theta$  που σχηματίζει το νήμα με την κατακόρυφο, τη στιγμή που το μέτρο της τάσης του νήματος είναι το **μισό** της τάσης που είχε αμέσως μετά την κρούση.



$$\frac{(M + m)u_f^2}{L} = T_2 - (M + m)g\cos\theta \rightarrow 10 - 4\cos\theta = u_f^2 \quad (1')$$

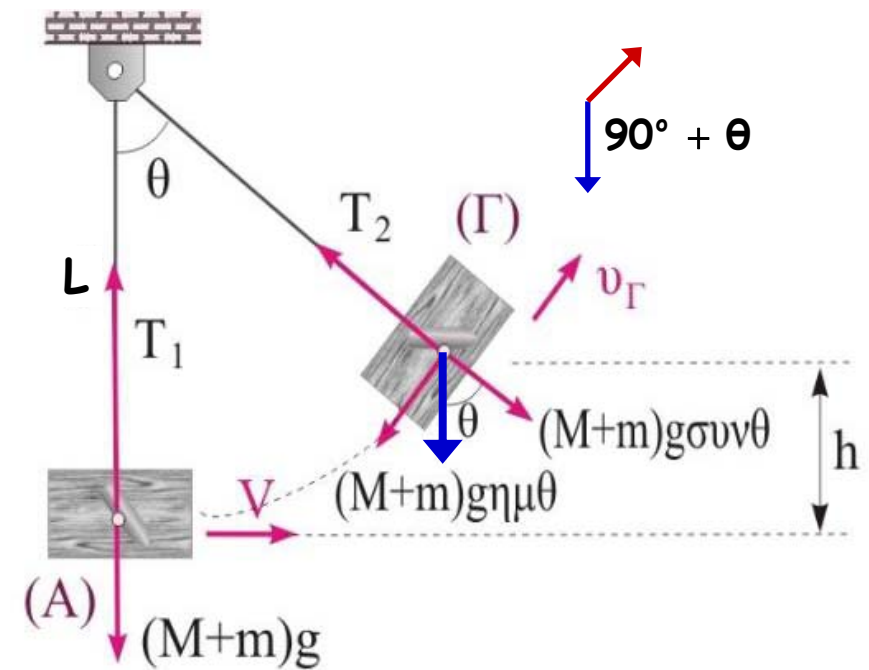
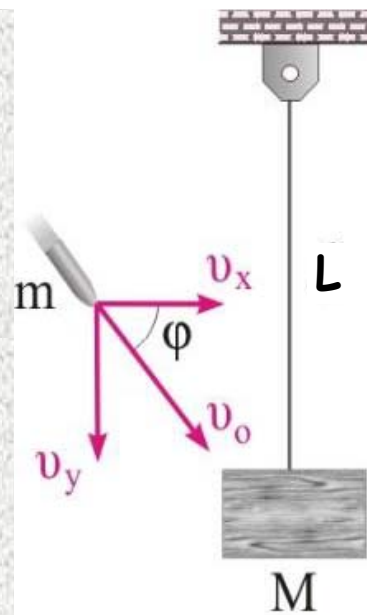
$$\frac{1}{2}(M + m)V^2 = \frac{1}{2}(M + m)u_f^2 + mgL(1 - \cos\theta) \rightarrow u_f^2 - 16 = -8(1 - \cos\theta) \quad (2')$$

(1'), (2')

$$\cos\theta = \frac{1}{6} \quad u_f = \sqrt{\frac{56}{6}} \text{ m/s}$$



**Δ4.** Το ρυθμό μεταβολής της **κινητικής** ενέργειας του συσσωματώματος τη στιγμή που το νήμα σχηματίζει με την κατακόρυφο τη γωνία  $\theta$



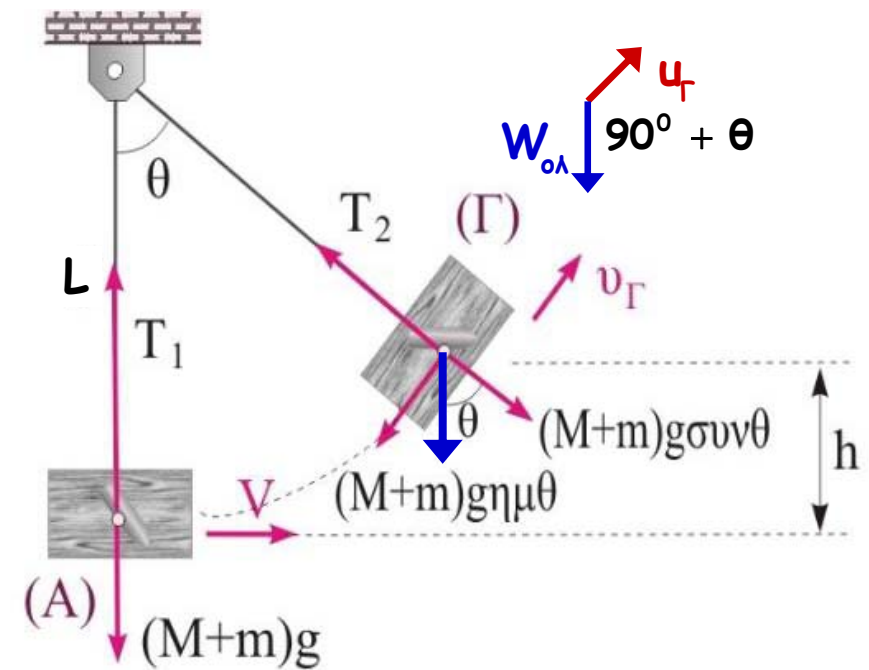
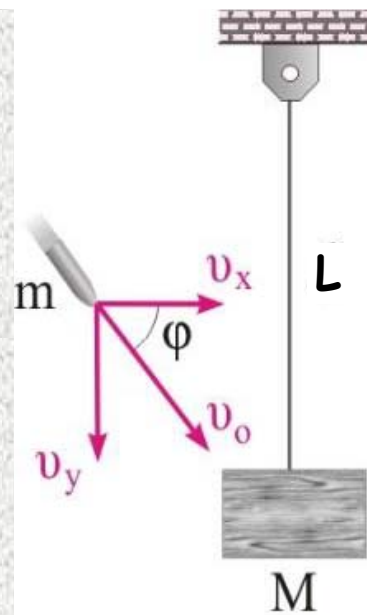
$$\frac{dK}{dt} = W_{o\lambda, x} \cdot u_T \cdot \sin 180^\circ + W_{o\lambda, y} \cdot u_T \cdot \sin 90^\circ + T_2 \cdot u_T \cdot \sin 90^\circ$$

$$\frac{dK}{dt} = (M + m)g \eta \mu \theta \cdot u_T \cdot \sin 180^\circ = -\frac{20}{6} \sqrt{\frac{980}{3}} = -60 \text{ J/s}$$

$$\frac{dK}{dt} = W_{o\lambda} \cdot u_T \cdot \sin(90^\circ + \theta) + T_2 \cdot u_T \cdot \sin 90^\circ$$

$$\frac{dK}{dt} = (M + m)g \cdot u_T \cdot (-\eta \mu \theta) + T_2 \cdot u_T \cdot \sin 90^\circ = -60 \text{ J/s}$$

**Δ5.** Το ρυθμό μεταβολής της **δυναμικής** ενέργειας του συσσωματώματος τη στιγμή που το νήμα σχηματίζει με την κατακόρυφο τη γωνία  $\theta$



$$\frac{dU}{dt} = - \left[ W_{ol,x} \cdot u_T \cdot \sin 180^\circ + W_{ol,y} \cdot u_T \cdot \sin 90^\circ \right]$$

$$\frac{dU}{dt} = -(M + m)g \eta \mu \theta \cdot u_T \cdot \sin 180^\circ = \frac{20}{6} \sqrt{\frac{980}{3}} = 60 \text{ J/s}$$

$$\frac{dU}{dt} = -W_{ol} \cdot u_T \cdot \sin(90^\circ + \theta)$$

$$\frac{dU}{dt} = -(M + m)g \cdot u_T \cdot (-\eta \mu \theta) = 60 \text{ J/s}$$