

**2<sup>ο</sup> Διαγώνισμα - Ταλαντώσεις  
με θέματα από το Ψηφιακό Σχολείο**

**Τα θέματα επιμελήθηκαν οι Ιστάπολος Βασίλειος και Ποντικός Ηλίας**

**A1.** Ένα σώμα εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση των εξής απλών αρμονικών ταλαντώσεων:

$$x_1 = 0,1\mu 10t \text{ (SI)}$$

$$x_2 = 0,2\mu(10t + \pi) \text{ (SI)}$$

Αν οι δύο ταλαντώσεις εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, τότε:

**α.** το πλάτος της σύνθετης ταλάντωσης είναι  $A=0,1\text{m}$ .

**β.** η μέγιστη ταχύτητα της σύνθετης ταλάντωσης είναι  $u_{\max}=10\text{m/s}$ .

**γ.** η περίοδος της σύνθετης ταλάντωσης είναι  $T=0,1\text{s}$ .

**δ.** η φάση της σύνθετης ταλάντωσης είναι  $\varphi=10t \text{ (SI)}$ .

**α**

**A2.** Ένα σύστημα μάζας ελατηρίου εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση. Η συχνότητα με την οποία ταλαντώνεται το σύστημα θα μεταβληθεί αν μεταβάλλουμε:

- α.** τη μάζα του σώματος.
- β.** τη σταθερά απόσβεσης  $b$ .
- γ.** τη σταθερά του ελατηρίου.
- δ.** τη συχνότητα της εξωτερικής περιοδικής δύναμης.

**δ**

**A3.** Ένα σώμα εκτελεί ΑΑΤ. Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητάς του είναι μέγιστος σε απόλυτη τιμή όταν:

- α.** η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης του σώματος είναι μηδέν.
- β.** η ορμή του σώματος είναι μηδέν.
- γ.** η δύναμη επαναφοράς που δέχεται το σώμα είναι μηδέν.
- δ.** η κινητική ενέργεια του σώματος είναι μέγιστη.

**β**

**A4.** Σε μια φθίνουσα ταλάντωση στην οποία το πλάτος μειώνεται εκθετικά με το χρόνο:

**α.** για ορισμένη τιμή της σταθεράς  $b$ , η περίοδος μειώνεται σε σχέση με το χρόνο.

**β.** η κίνηση γίνεται απεριοδική για πολύ μικρές τιμές της σταθεράς απόσβεσης  $b$ .

**γ.** όταν η σταθερά απόσβεσης  $b$  μεγαλώνει, το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται πιο γρήγορα.

**δ.** η σταθερά απόσβεσης  $b$  εξαρτάται μόνο από το σχήμα του σώματος που ταλαντώνεται.

**γ**



- A.** Στην ΑΑΤ, η περίοδος της ταλάντωσης εξαρτάται από το πλάτος της.
- B.** Στα εκκρεμή ρολόγια θέλουμε πολύ μικρή σταθερά απόσβεσης  $b$ .
- Γ.** Το φαινόμενο του συντονισμού παρατηρείται μόνο στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις.
- Δ.** Σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση το πλάτος παραμένει σταθερό σε σχέση με το χρόνο.
- Ε.** Σε όλες τις φθίνουσες ταλαντώσεις, το πλάτος μειώνεται εκθετικά σε σχέση με το χρόνο.

**A – Λ**

**B – Σ**

**Γ – Σ**

**Δ – Σ**

**Ε – Λ**

**B1.** Σώμα  $\Sigma_1$  μάζας  $m_1$  είναι δεμένο στην άκρη οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς  $k$  και εκτελεί ΑΑΤ πλάτους  $A$  σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Όταν το  $\Sigma_1$  διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του, συγκρούεται πλαστικά με ακίνητο σώμα  $\Sigma_2$  μάζας  $m_2$ . Αν η ενέργεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος μετά την κρούση είναι ίση με το  $\frac{1}{4}$  της ενέργειας της ταλάντωσης του  $\Sigma_1$  πριν την κρούση, τότε ο λόγος  $m_1/m_2$  των μαζών των δύο σωμάτων είναι ίσος με:

α. 3

β. 1/3

γ. 1

$$m_1 u_1 = (m_1 + m_2) V \rightarrow V = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

$$E_{\text{Ταλ, μετά}} = \frac{1}{4} E_{\text{Ταλ, πριν}} \rightarrow \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{2} m_1 u_1^2 \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3} \quad \beta.$$

**B2.** Ένα σώμα εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο ΑΑΤ:

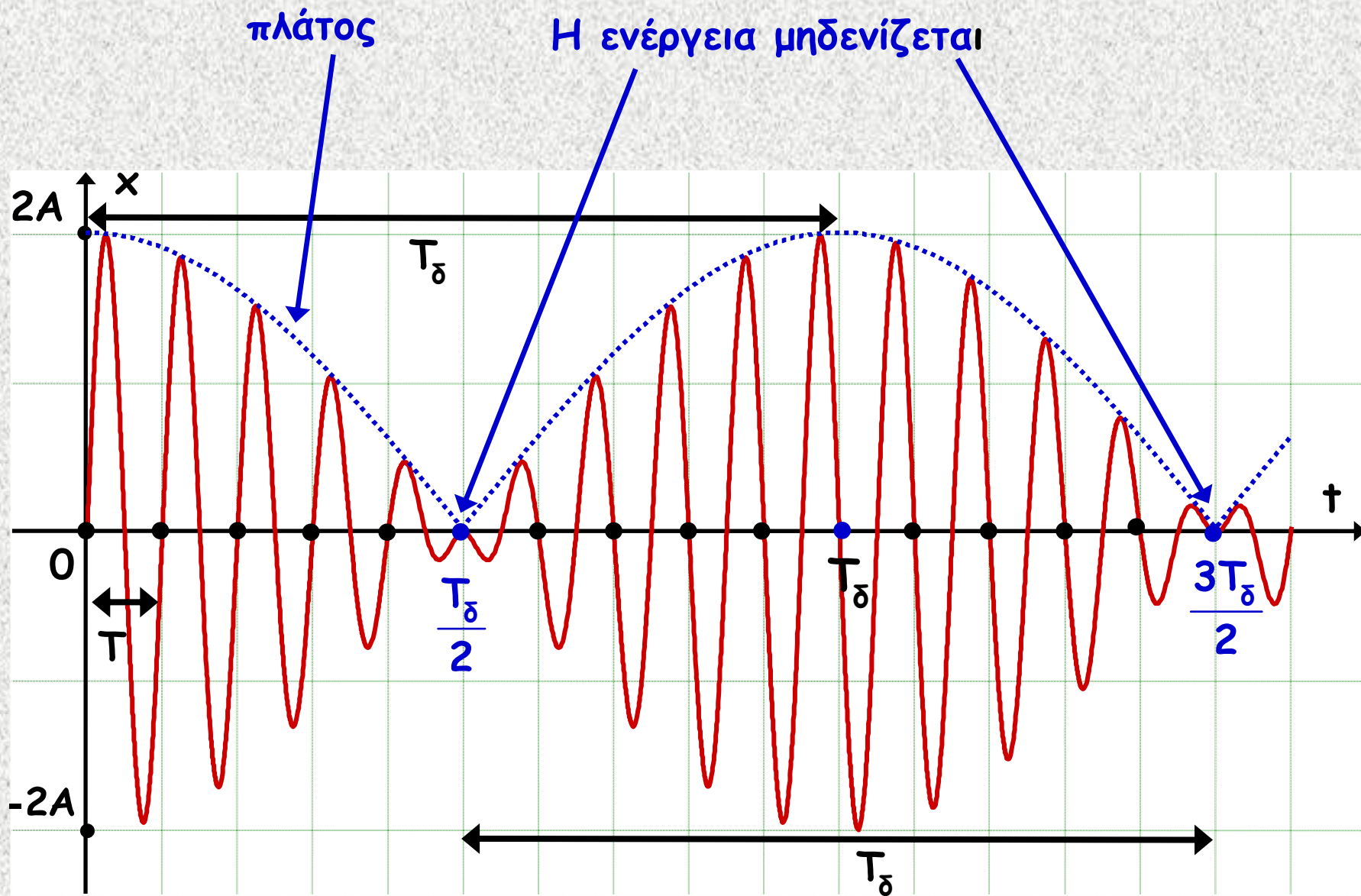
$$x_1 = 0,2\eta\mu 50\pi t \text{ (SI)}$$

$$x_2 = 0,2\eta\mu 54\pi t \text{ (SI)}$$

Οι δύο ταλαντώσεις εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Στο χρονικό διάστημα που το σώμα εκτελεί **N=260** ταλαντώσεις η ενέργεια ταλάντωσης μηδενίζεται:

**α.** 5 φορές      **β.** 20 φορές      **γ.** 52 φορές





**B2.** Ένα σώμα εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο ΑΑΤ:

$$x_1 = 0,2\eta\mu 50\pi t \text{ (SI)}$$

$$x_2 = 0,2\eta\mu 54\pi t \text{ (SI)}$$

Οι δύο ταλαντώσεις εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Στο χρονικό διάστημα που το σώμα εκτελεί **N=260** ταλαντώσεις η ενέργεια ταλάντωσης μηδενίζεται:

**α.** 5 φορές      **β.** 20 φορές      **γ.** 52 φορές

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 25\text{Hz}$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 27\text{Hz}$$

$$f = \frac{f_1 + f_2}{2} = 26\text{Hz}$$

$$f = \frac{N}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = 10\text{s}$$

$$T_{\Delta} = \frac{1}{|f_1 - f_2|} = 0,5\text{s}$$

Η ενέργεια της ταλάντωσης στο διακρότημα μηδενίζεται κάθε φορά που μηδενίζεται το **πλάτος** του, συνεπώς η ενέργεια ταλάντωσης μηδενίζεται **1** φορά κάθε **0,5** δευτερόλεπτα.

Άρα, στα 10 δευτερόλεπτα, η ενέργεια της ταλάντωσης μηδενίζεται 20 φορές.

**β.**

**B3.** Τα ελατήρια των δύο ταλαντωτών **A** και **B** του σχήματος έχουν **ίδιο** φυσικό μήκος και σταθερές  $k_A = 2k_B$ . Τα σώματα που κρέμονται από τα ελατήρια είναι **ίδια**. Φέρνουμε τα σώματα στη θέση που τα ελατήρια έχουν το **φυσικό** τους μήκος και τα αφήνουμε ελεύθερα να εκτελέσουν ταλάντωση. Λόγω των **τριβών**, μετά από κάποιο χρονικό διάστημα τα σώματα θα **σταματήσουν**. Αν η θερμότητα που εκλύθηκε στο περιβάλλον λόγω των αποσβέσεων του σώματος **A** είναι **2J** η θερμότητα που εκλύθηκε στο περιβάλλον λόγω των αποσβέσεων του σώματος **B** είναι:

**α.** 1J      **β.** 2J      **γ.** 4J

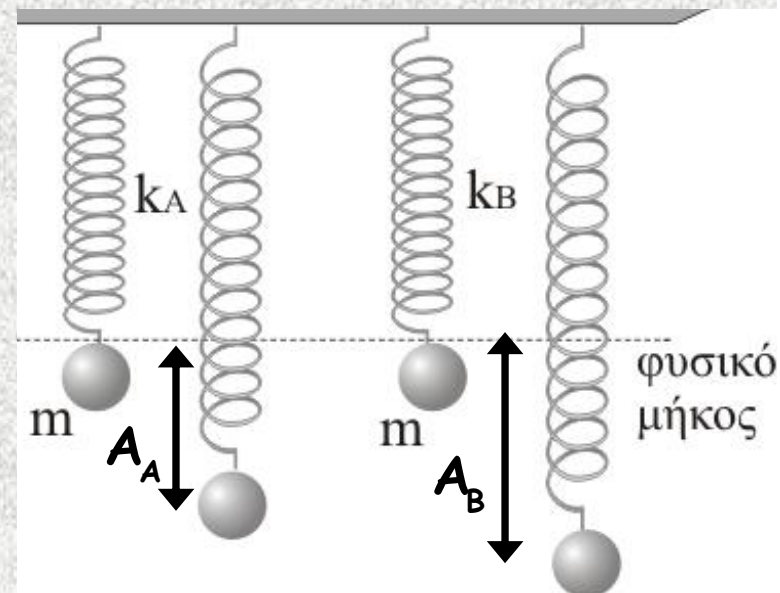
$$\begin{aligned} m_A g &= k_A A_A & m_B g &= k_B A_B \\ m_A &= m_B & k_A &= 2k_B \end{aligned} \quad \rightarrow \quad A_B = 2A_A$$

$$Q_A = \frac{1}{2} k_A A_A^2$$

$$\rightarrow Q_B = 2Q_A$$

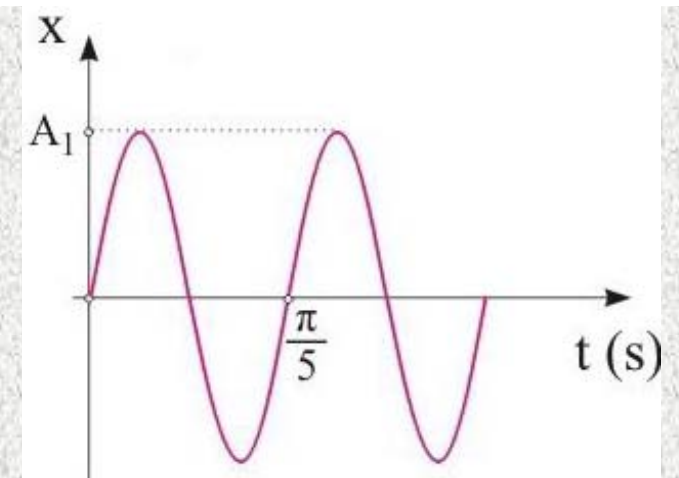
$$Q_B = \frac{1}{2} k_B A_B^2$$

$$Q_B = 4J \quad \text{γ.}$$

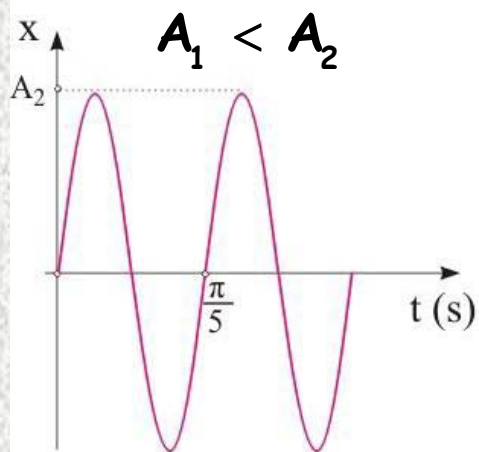
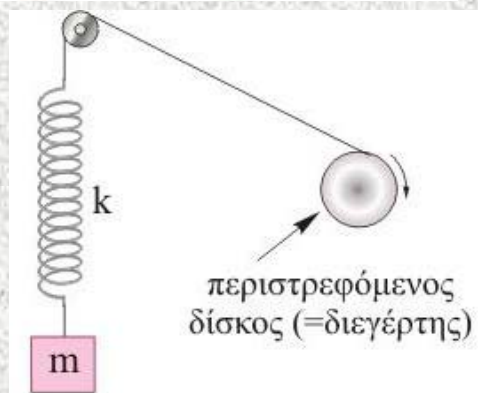




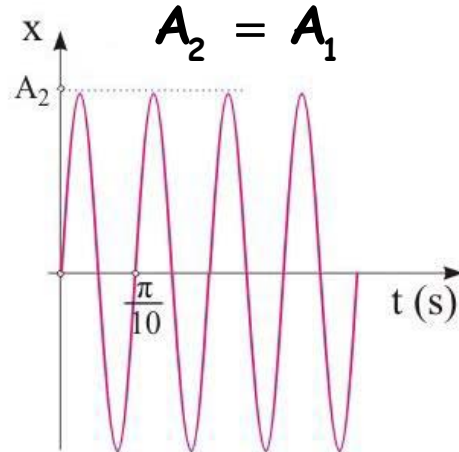
**B4.** Ένα σύστημα μάζας - ελατηρίου ( $m=1\text{kg}$ ,  $k=400\text{N/m}$ ) εκτελεί κατακόρυφη εξαναγκασμένη ταλάντωση με τη βοήθεια ενός περιστρεφόμενου δίσκου (διεγέρτη). Το διάγραμμα απομάκρυνσης - χρόνου δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



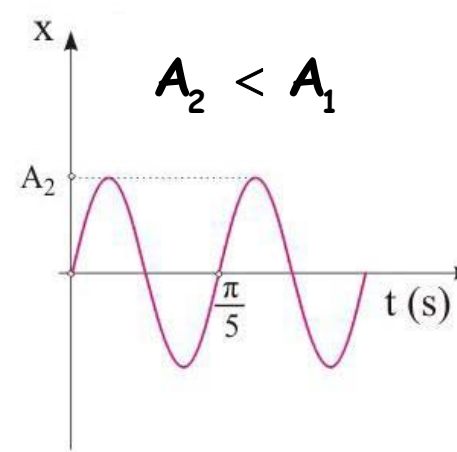
Αντικαθιστούμε το σώμα με άλλο **τετραπλάσιας** μάζας και θέτουμε το σύστημα σε νέα εξαναγκασμένη ταλάντωση χωρίς να μεταβάλλουμε τη συχνότητα του διεγέρτη. Θεωρούμε ότι στις δύο καμπύλες συντονισμού τα **μέγιστα** πλάτη έχουν την ίδια τιμή. Το διάγραμμα απομάκρυνσης χρόνου για τη νέα ταλάντωση μπορεί να είναι το:



(I)



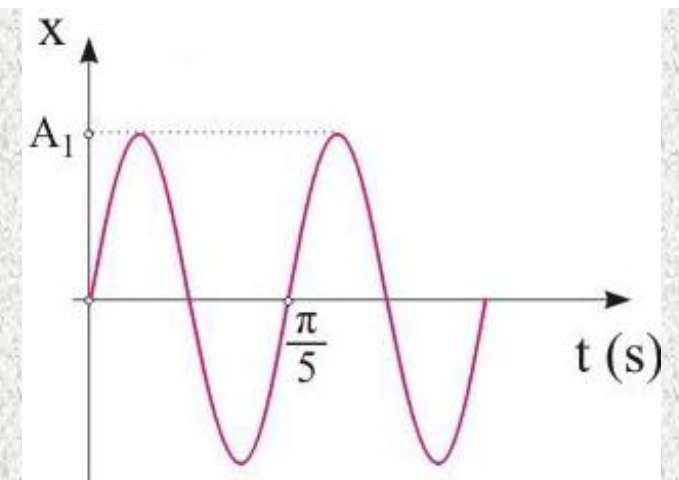
(II)



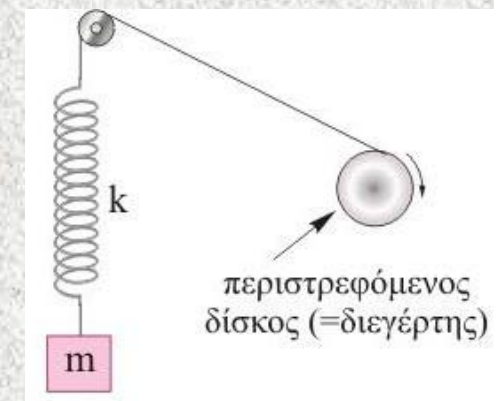
(III)



**B4.** Ένα σύστημα μάζας - ελατηρίου ( $m=1\text{kg}$ ,  $k=400\text{N/m}$ ) εκτελεί κατακόρυφη εξαναγκασμένη ταλάντωση με τη βοήθεια ενός περιστρεφόμενου δίσκου (διεγέρτη). Το διάγραμμα απομάκρυνσης - χρόνου δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



Αντικαθιστούμε το σώμα με άλλο **τετραπλάσιας** μάζας και θέτουμε το σύστημα σε νέα εξαναγκασμένη ταλάντωση χωρίς να μεταβάλλουμε τη συχνότητα του διεγέρτη. Θεωρούμε ότι στις δύο καμπύλες συντονισμού τα μέγιστα πλάτη έχουν την ίδια τιμή. Το διάγραμμα απομάκρυνσης χρόνου για τη νέα ταλάντωση μπορεί να είναι το:



$$T_{0,1} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi}{10} \text{ s} \quad f_{0,1} = \frac{10}{\pi} \text{ Hz}$$

$$T_{\Delta} = \frac{\pi}{5} \text{ Hz}$$

$$T_{0,2} = 2\pi\sqrt{\frac{4m}{k}} = \frac{\pi}{5} \text{ s} \quad f_{0,2} = \frac{5}{\pi} \text{ Hz}$$

$$f_{\Delta} = \frac{5}{\pi} \text{ Hz}$$

Με την αλλαγή της μάζας το σύστημα βρίσκεται σε συντονισμό και το πλάτος του μεγιστοποιείται με συνέπεια  $A_2 > A_1$ .

**I**

Γ. Σώμα μάζας  $m=2\text{kg}$  εκτελεί ΑΑΤ και η δύναμη επαναφοράς που του ασκείται, μεταβάλλεται σε σχέση με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση  $F_{\text{ΕΠ}}=-40\eta\mu\omega t$  (SI). Ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών περασμάτων του σώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι  $\Delta t=\pi/10\text{s}$ .

Γ1. Να βρείτε πόσο απέχουν μεταξύ τους οι ακραίες θέσεις της ταλάντωσης του σώματος.

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{10} \rightarrow T = \frac{\pi}{5} \text{ s} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \rightarrow D = 200\text{N/m}$$

$$F_{\text{ΕΠ}} = -DA \cdot \eta\mu\omega t \qquad \rightarrow \qquad DA = 40 \qquad \rightarrow \qquad A = 0,2\text{m}$$

$$F_{\text{ΕΠ}} = -40 \cdot \eta\mu\omega t$$

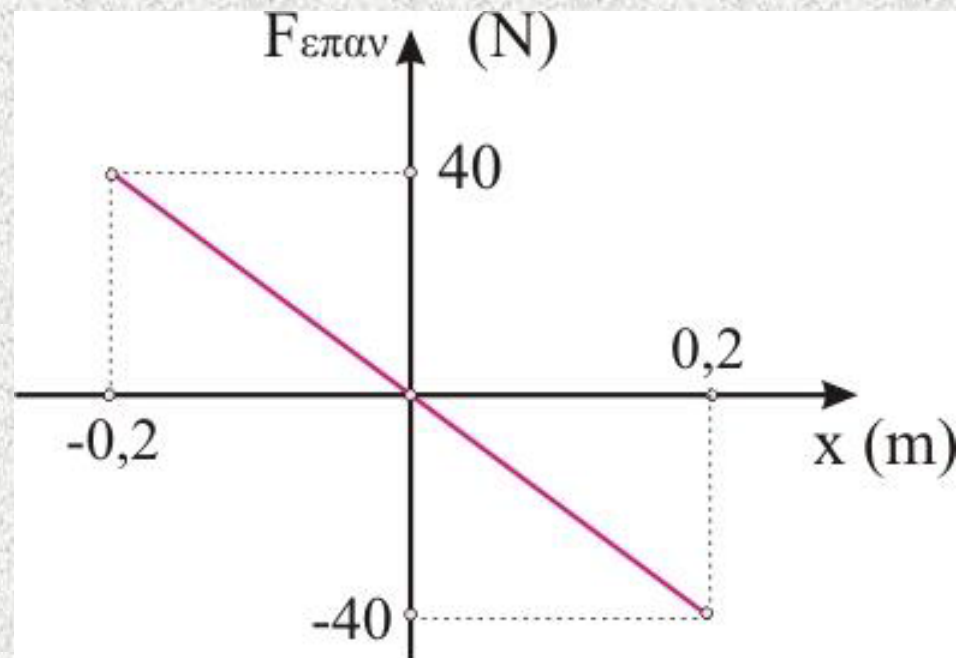
$$d = 2A = 0,4\text{m}$$

**Γ2.** Να γράψετε την εξίσωση και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της δύναμης **επαναφοράς** σε συνάρτηση με την **απομάκρυνση** του σώματος από τη θέση ισορροπίας του σε αριθμημένους άξονες.

$$F_{\text{επ}} = -Dx$$

$$F_{\text{επ}} = -200x \text{ (SI)}$$

$$-0,2\text{m} \leq x \leq +0,2\text{m}$$



**Γ3.** Να υπολογίσετε τη μετατόπιση καθώς και το διάστημα που διένυσε το σώμα στο χρονικό διάστημα από τη στιγμή  $t_1=0$ , έως τη χρονική στιγμή  $t_2=5\pi/60s$ .

$$x = A\eta\mu\omega t \rightarrow x = 0,2\eta\mu 10t$$

$$t = \frac{5\pi}{60} s \quad \rightarrow \quad x = 0,2\eta\mu \frac{5\pi}{6} \quad \rightarrow \quad x = +0,1m$$

$$x_{\text{αρχ}} = 0$$

$$\Delta x = +0,1m$$



**Γ3.** Να υπολογίσετε τη μετατόπιση καθώς και το διάστημα που διένυσε το σώμα στο χρονικό διάστημα από τη στιγμή  $t_1=0$ , έως τη χρονική στιγμή  $t_2=5\pi/60s$ .

$$T = \frac{\pi}{5} s \quad \frac{T}{4} = \frac{\pi}{20} s \quad \frac{T}{2} = \frac{\pi}{10} s$$

$$\frac{t}{T} = \frac{5}{12} \rightarrow t = \frac{5}{12} T$$

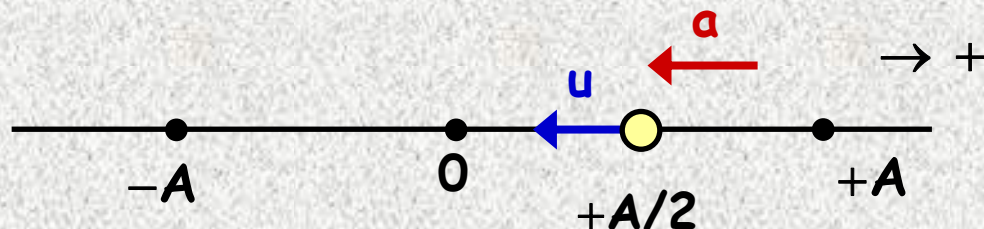
$$\boxed{\frac{T}{4} < t < \frac{T}{2}}$$



Τη χρονική στιγμή  $5\pi/60s$  βρίσκεται σε θετική απομάκρυνση και κινείται προς τη θέση ισορροπίας, δηλαδή στο ζητούμενο χρονικό διάστημα το σώμα έχει αλλάξει κατεύθυνση κίνησης.

$$s = 0,2 + 0,1 = 0,3m$$

**Γ4.** Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος τη χρονική στιγμή που το σώμα διέρχεται από τη θέση  $x=+A/2$ , όπου  $A$  είναι το πλάτος της ταλάντωσης και **επιταχύνεται**. Να σχολιάσετε το αποτέλεσμα.



$$\frac{dK}{dt} = F_{\text{ΕΠ}} u \rightarrow \frac{dK}{dt} = -Dxu \quad \text{Αλγεβρικές τιμές}$$

$$\text{ΑΔΕΤ : } \frac{1}{2} mu^2 + \frac{1}{2} Dx^2 = \frac{1}{2} DA^2 \rightarrow u = \pm \sqrt{3}m / s$$

$$u = -\sqrt{3}m / s$$

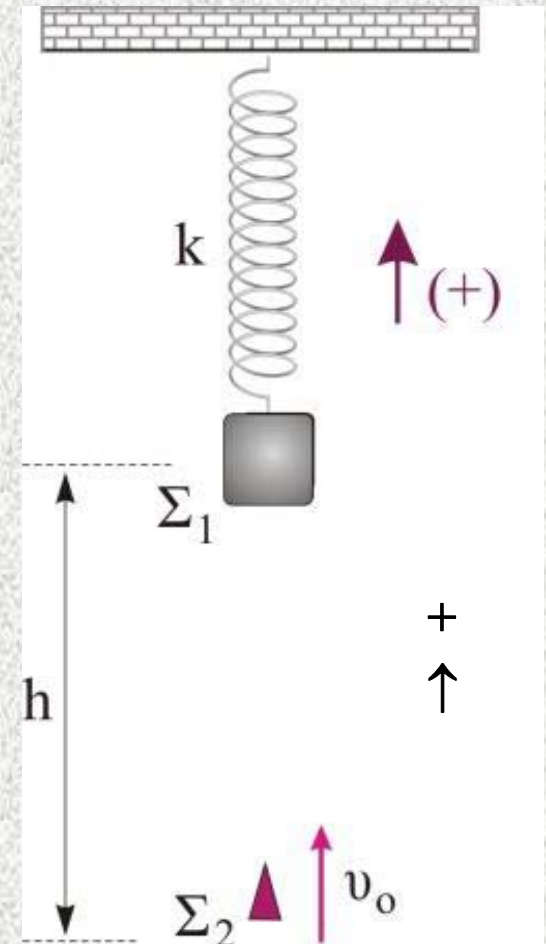
$$\frac{dK}{dt} = -200 \cdot (+0,1) \cdot (-\sqrt{3}) = +20\sqrt{3} \text{ J/s}$$

Το θετικό πρόσημο δηλώνει ότι η κινητική ενέργεια του ταλαντούμενου σώματος αυξάνεται, κάτι που είναι αναμενόμενο αφού αυτό κατευθύνεται προς τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης.

**Δ.** Στην ελεύθερη άκρη κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς  $k=100\text{N/m}$ , του οποίου η άλλη άκρη είναι στερεωμένη σε οροφή, δένουμε σώμα  $\Sigma_1$  μάζας  $m_1=2\text{kg}$  και το αφήνουμε να ισορροπήσει. Σε κατακόρυφη απόσταση  $h=4,4\text{m}$  κάτω από το σώμα  $\Sigma_1$  βρίσκεται σώμα  $\Sigma_2$  μάζας  $m_2=2\text{kg}$  το οποίο αρχικά είναι ακίνητο. Κάποια στιγμή εκτοξεύουμε το σώμα  $\Sigma_2$  κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα μέτρου  $u_0$  και όταν φτάσει στο  $\Sigma_1$  συγκρούεται πλαστικά με αυτό. Το συσσωμάτωμα που δημιουργείται μετά την κρούση, εκτελεί ΑΑΤ πλάτους  $0,4\text{m}$ .

**Δ1.** Να βρείτε πόσες φορές μηδενίζεται η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου σε κάθε περίοδο της ταλάντωσης. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

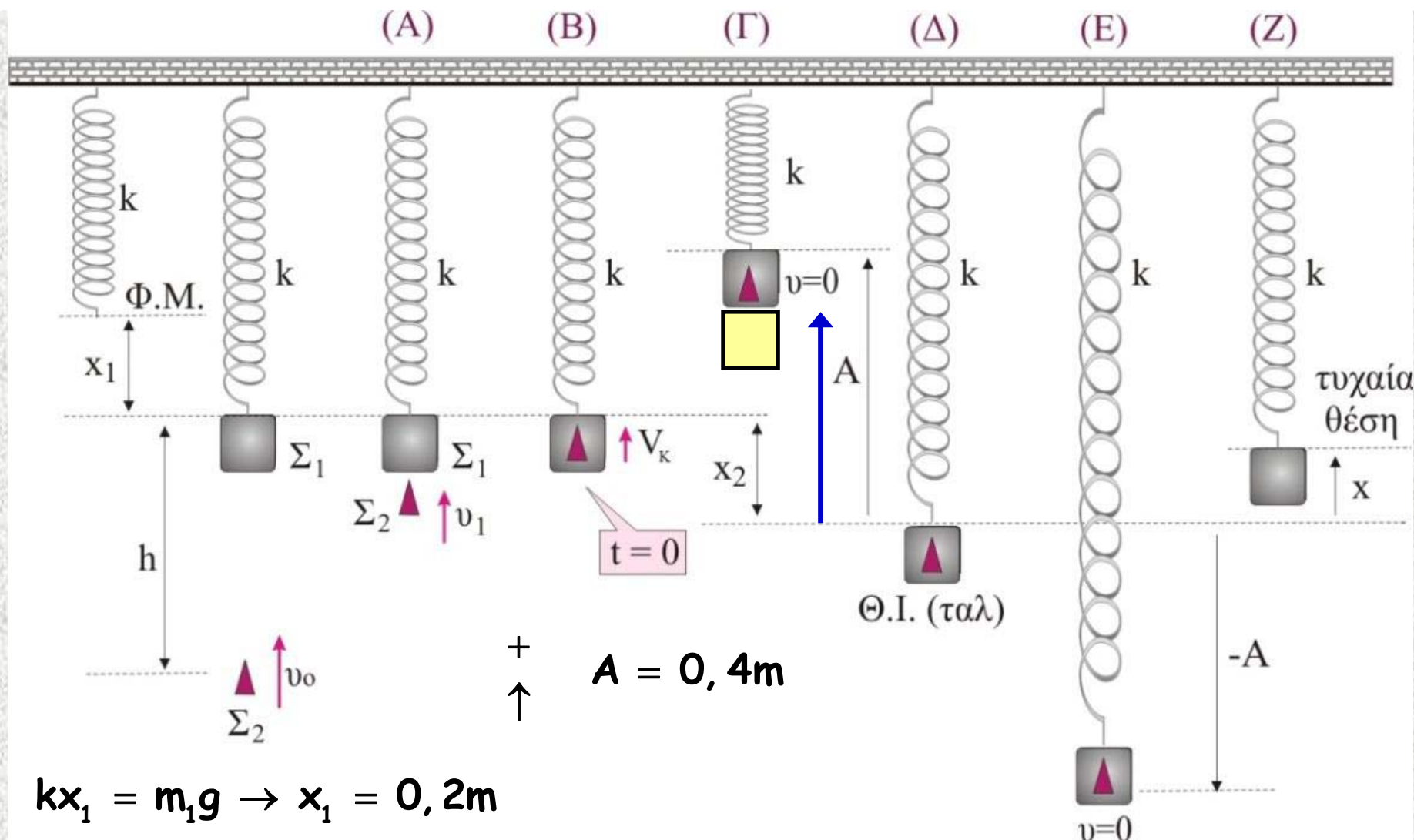
Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας  $g=10\text{m/s}^2$ .











$$k(x_1 + x_2) = (m_1 + m_2)g \rightarrow x_2 = 0,2m$$

Το συσσωμάτωμα στην πάνω ακραία θέση του φθάνει μέχρι τη θέση **φυσικού μήκους**. Άρα η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου μηδενίζεται **μια** φορά ανά περίοδο.



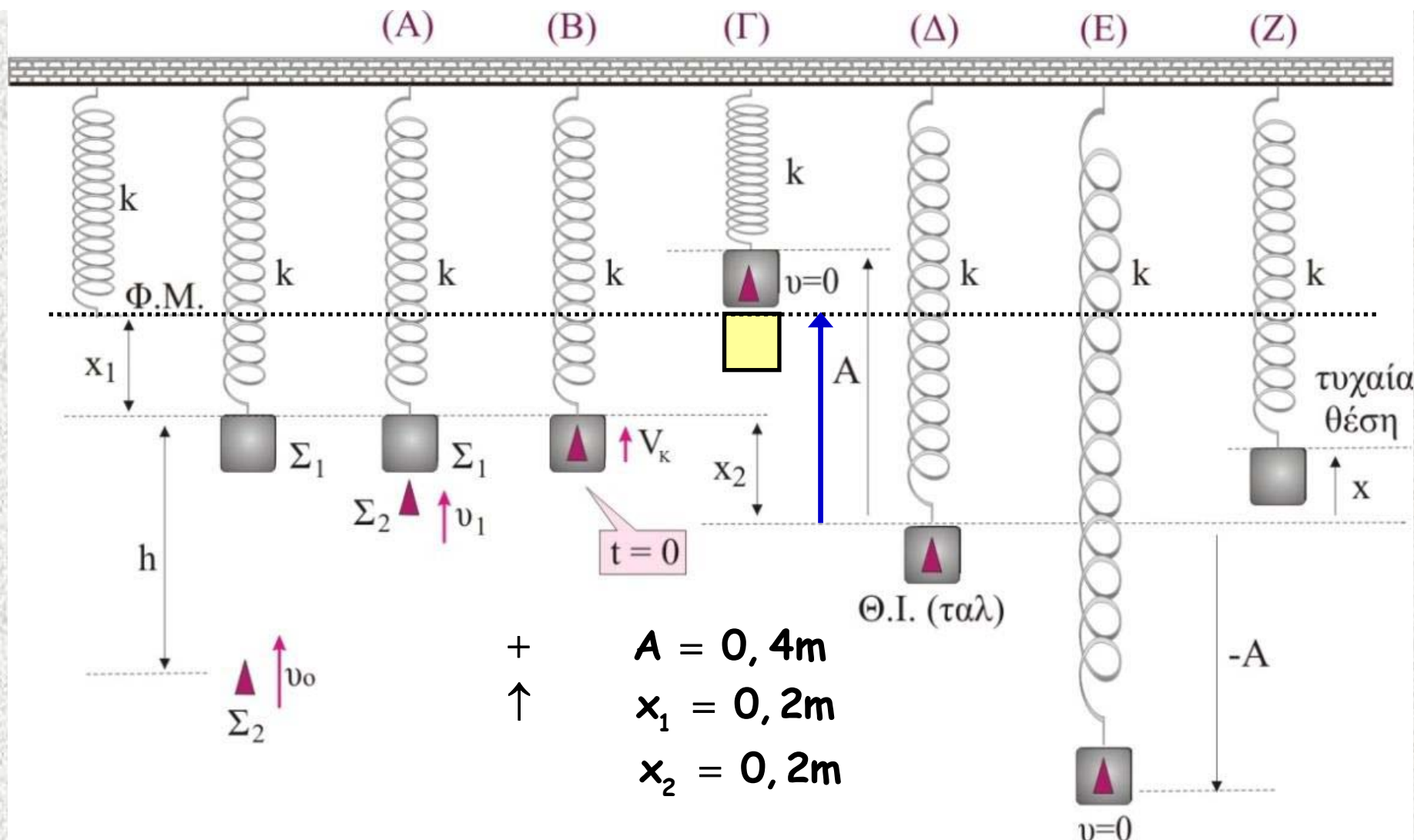
$$\Delta O : m_2 \mathbf{u}_1 = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_K$$

$$\Delta E_T : \quad \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_k^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

$$\text{ΑΔΕΤ : } \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \mathbf{v_k^2} + \frac{1}{2} k x_2^2 = \frac{1}{2} k A^2 \rightarrow v_k = \sqrt{3} m/s$$

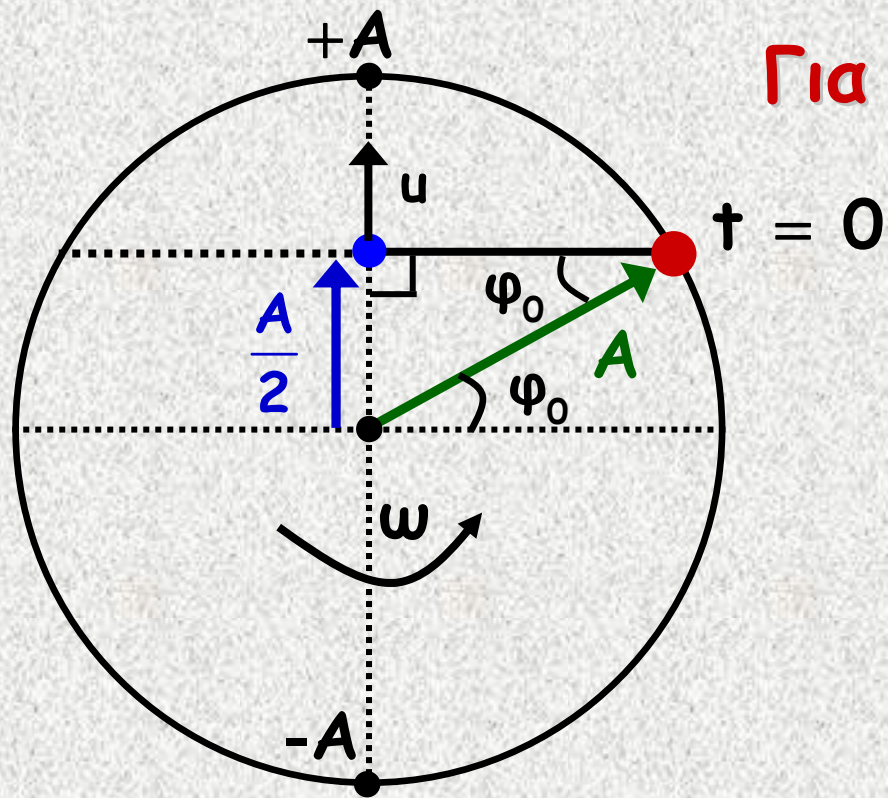
$$\text{ΑΔΟ : } m_2 \mathbf{u_1} = (m_1 + m_2) \mathbf{v_k} \rightarrow u_1 = 2\sqrt{3} m/s$$

$$\text{ΘΜΚΕ : } \frac{1}{2} m_2 \mathbf{u_1^2} - \frac{1}{2} m_2 \mathbf{u_0^2} = -m_2 g h \rightarrow u_0 = 10 m/s$$



**Δ3.** Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος σε συνάρτηση με το χρόνο θεωρώντας  $t=0$  τη στιγμή της κρούσης και τα **θετικά** προς τα πάνω.





Για  $t=0$  είναι  $x=+A/2$  και  $u>0$

$$\eta\mu\varphi_0 = \frac{\frac{A}{2}}{A} \rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{1}{2}$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$$

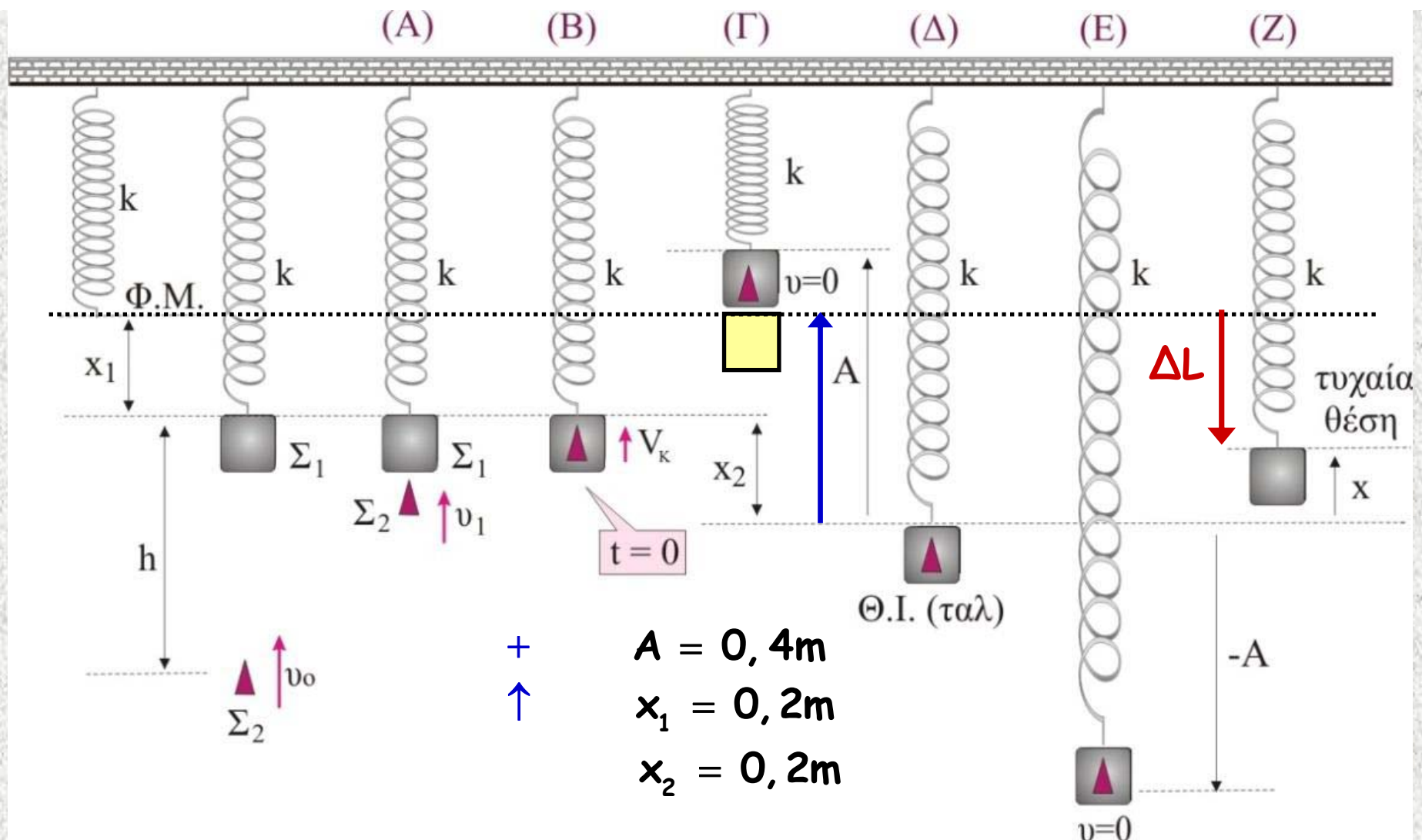
$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

$$A = 0,4\text{m}$$

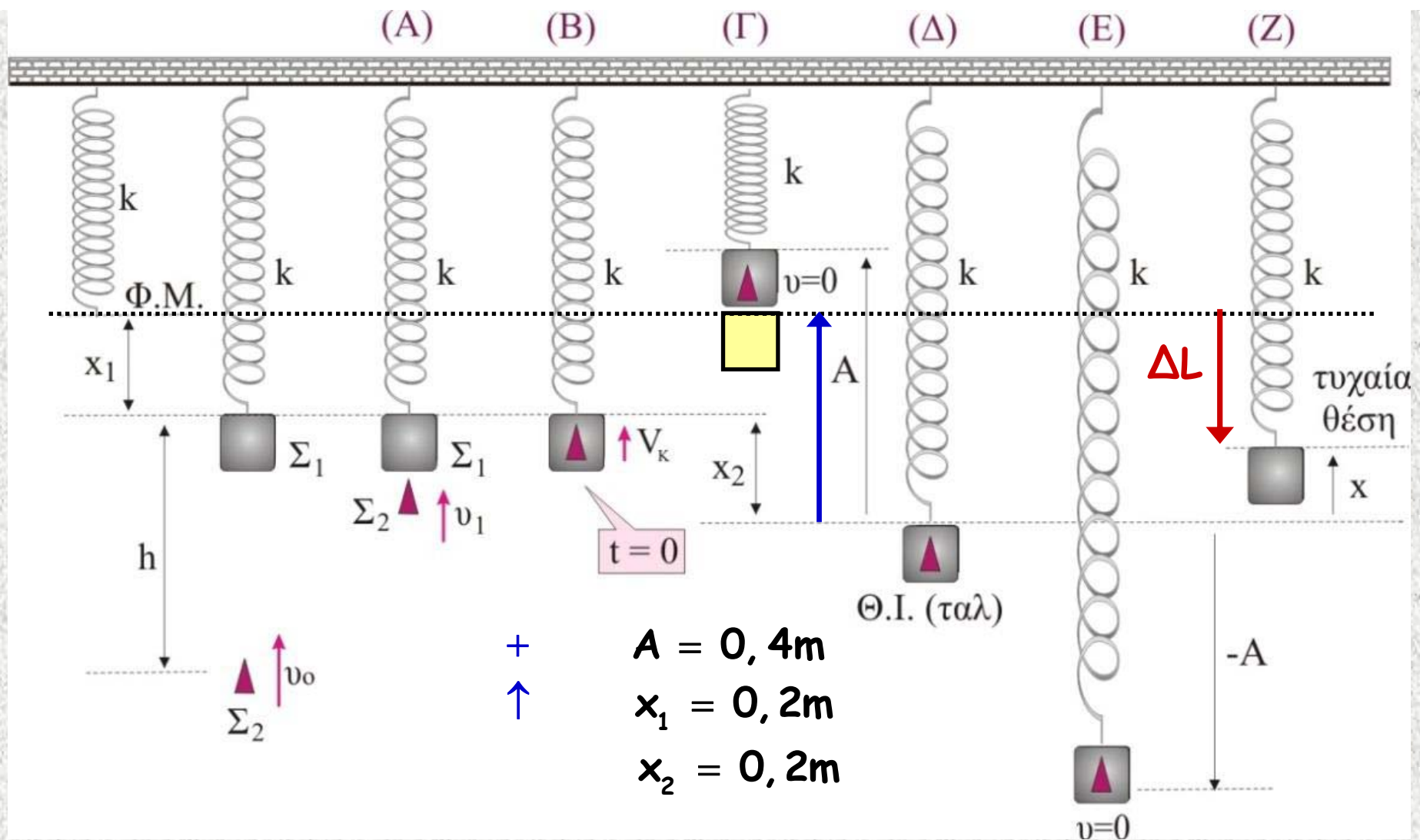
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = 5\text{rad/s}$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$x = 0,4\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (SI)}$$



**Δ4.** Να γράψετε την εξίσωση της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου σε συνάρτηση με την απομάκρυνση του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας και να σχεδιάσετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση σε αριθμημένους άξονες.



$$U_{E\Lambda} = \frac{1}{2} k \Delta L^2 \rightarrow U_{E\Lambda} = \frac{1}{2} k (A - x)^2 \rightarrow U_{E\Lambda} = 50x^2 - 40x + 8 \text{ (SI)}$$

$$-0,4\text{m} \leq x \leq +0,4\text{m}$$



$$U_{E\lambda} = 50x^2 - 40x + 8 \text{ (SI)}$$

$$-0,4\text{m} \leq x \leq +0,4\text{m}$$

$$\text{Για } x = -0,4\text{m} \rightarrow U_{E\lambda} = +32\text{J}$$

$$\text{Για } x = +0,4\text{m} \rightarrow U_{E\lambda} = 0\text{J}$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ m} \rightarrow U_{E\lambda} = +8\text{J}$$

