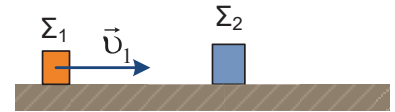


ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Σώμα Σ_1 με μάζα $m_1 = 2\text{kg}$ και ταχύτητα μέτρου $v_1 = 20\text{m/s}$, κινείται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές, προς τη θετική κατεύθυνση, όπως στο σχήμα. Το σώμα Σ_1 συγκρούεται με σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 3\text{kg}$ που αρχικά είναι ακίνητο. Η κρούση οδηγεί στη συγκόλληση των σωμάτων. Η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.

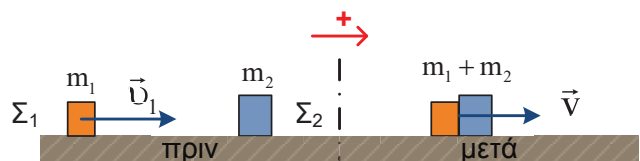


Να υπολογίσετε:

- την ταχύτητα του συσσωματώματος που δημιουργείται μετά την κρούση.
- την απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση.
- το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 που μεταφέρθηκε στο σώμα Σ_2 .
- τη μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_1 .

Λύση

α) Έστω $\vec{V}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος που δημιουργείται αμέσως μετά την κρούση. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των δύο σωμάτων:



$$\vec{p}_{\text{ολ}}^{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{ολ}}^{\text{μετά}} \Rightarrow \vec{p}_1^{\text{πριν}} + \vec{p}_2^{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{συσ}}^{\text{μετά}} \quad (1)$$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η εξίσωση (1) γράφεται αλγεβρικά:

$$m_1 v_1 + 0 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

$$\text{Με αντικατάσταση προκύπτει } V = \frac{2\text{kg} \cdot 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2\text{kg} + 3\text{kg}} \Rightarrow V = \frac{40 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5} \Rightarrow V = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Θεωρούμε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο.

Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση είναι:

$$E_{απ} = E_{μην}^{πριν} - E_{μην}^{μετά} \Rightarrow E_{απ} = (K_{ολ}^{πριν} + U_{ολ}^{πριν}) - (K_{ολ}^{μετά} + U_{ολ}^{μετά}) \xrightarrow{U_{ολ}^{πριν} = U_{ολ}^{μετά} = 0} E_{απ} = K_{ολ}^{πριν} - K_{ολ}^{μετά} \Rightarrow$$

$$E_{απ} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2$$

Με αντικατάσταση προκύπτει:

$$E_{απ} = \frac{1}{2} 2 \text{Kg} \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \frac{1}{2} 5 \text{kg} \left(8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \Rightarrow E_{απ} = 400 \text{J} - 160 \text{J} \Rightarrow E_{απ} = 240 \text{J}$$

γ) Η κινητική ενέργεια του σώματος Σ₂ μετά τη κρούση είναι: $K_2^{μετά} = \frac{1}{2} m_2 V^2$ και η κινητική ενέργεια του σώματος Σ₁ πριν την κρούση είναι: $K_1^{πριν} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$.

Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος Σ₁ που μεταφέρθηκε στο σώμα Σ₂ είναι:

$$\frac{K_2^{μετά}}{K_1^{πριν}} = \frac{\frac{1}{2} m_2 V^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} = \frac{m_2 V^2}{m_1 v_1^2}$$

Με αντικατάσταση προκύπτει: $\frac{K_2^{μετά}}{K_1^{πριν}} = \frac{3 \text{kg} \cdot \left(8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{2 \text{kg} \cdot \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2} = \frac{3 \cdot 64}{2 \cdot 400} = 0,24 \quad \text{ή} \quad 24\%$

δ) Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ₁ είναι: $\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_1^{μετά} - \vec{p}_1^{πριν}$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

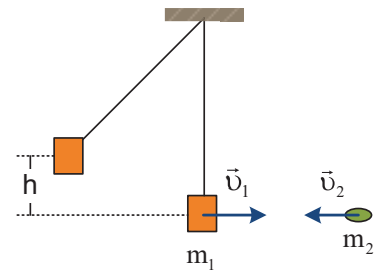
$$\Delta p_1 = p_1^{μετά} - p_1^{πριν} \Rightarrow \Delta p_1 = m_1 V - m_1 v_1 \Rightarrow \Delta p_1 = 2 \text{kg} \cdot 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 2 \text{kg} \cdot 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_1 = 16 \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} - 40 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \Rightarrow$$

$$\Delta p_1 = -24 \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Άρα η ορμή του σώματος Σ₁ ελαττώνεται κατά: $\Delta p_1 = 24 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$

Άσκηση 2.

Σώμα μάζας $m_1 = 0,9 \text{ kg}$ που είναι προσδεμένο στο άκρο τεντωμένου νήματος μήκους $L = 2\text{m}$, αφήνεται ελεύθερο από ύψος h , όπως φαίνεται στο σχήμα. Όταν το νήμα βρίσκεται στην κατακόρυφη θέση, το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου $v_1 = 2\text{m/s}$ και συγκρούεται πλαστικά με βλήμα μάζας $m_2 = 0,1\text{kg}$ και ταχύτητας μέτρου $v_2 = 48\text{m/s}$ με φορά προς το σώμα. Η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.



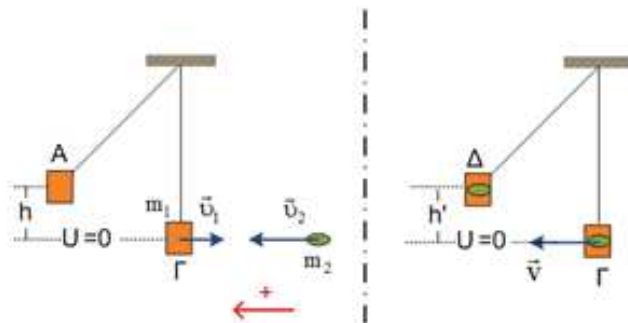
Να υπολογίσετε:

- το ύψος h από το οποίο αφέθηκε ελεύθερο το σώμα μάζας m_1 .
- το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος που δημιουργείται μετά την κρούση.
- το ύψος h' στο οποίο θα φτάσει το συσσωμάτωμα μετά την κρούση.
- τη μεταβολή της μηχανικής ενέργειας του συστήματος κατά τη κρούση. Σε τι μορφή ενέργειας μετατράπηκε αυτή;

Δίνεται: $g = 10\text{m/s}^2$.

Λύση

α) Στο σώμα πριν από την κρούση η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος, που είναι συντηρητική δύναμη. Άρα ισχύει το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας το οποίο εφαρμόζουμε για τις θέσεις Α και Γ του σώματος.



(Θεωρούμε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το σημείο της σύγκρουσης).

$$E_{\text{μηχ.αρχ.}} = E_{\text{μηχ.τελ.}} \Rightarrow K_{\alpha} + U_{\alpha} = K_{\tau} + U_{\tau} \Rightarrow 0 + m_1gh = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + 0 \Rightarrow h = \frac{v_1^2}{2g}$$

$$\text{Με αντικατάσταση προκύπτει: } h = \frac{\left(2\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow h = 0,2\text{m}$$

β) Έστω $\vec{v}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος που δημιουργείται αμέσως μετά τη κρούση. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των δύο σωμάτων:

$$\vec{p}_{ολ}^{πριν} = \vec{p}_{ολ}^{μετά} \Rightarrow \vec{p}_1^{πριν} + \vec{p}_2^{πριν} = \vec{p}_{συσ}^{μετά}$$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα αριστερά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$-m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = \frac{m_2 v_2 - m_1 v_1}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

Με αντικατάσταση προκύπτει:

$$V = \frac{0,1\text{kg} \cdot 48 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0,9\text{kg} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,9\text{kg} + 0,1\text{kg}} \Rightarrow V = \frac{4,8 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 1,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1} \Rightarrow V = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Στο συσσωμάτωμα μετά τη κρούση η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος, που είναι συντηρητική δύναμη. Άρα ισχύει το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας το οποίο εφαρμόζουμε για τις θέσεις Γ και Δ.

(Θεωρούμε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το σημείο της σύγκρουσης).

$$E_{μηχ.αρχ.} = E_{μηχ.τελ.} \Rightarrow K_{\alpha} + U_{\alpha} = K_{\tau} + U_{\tau} \Rightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + 0 = 0 + (m_1 + m_2)gh' \Rightarrow h' = \frac{V^2}{2g}$$

$$\text{Με αντικατάσταση προκύπτει: } h' = \frac{\left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow h' = 0,45\text{m}$$

δ) Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος κατά τη κρούση είναι:

$$E_{απ} = E_{μηχ}^{πριν} - E_{μηχ}^{μετά} \Rightarrow E_{απ} = (K_{ολ}^{πριν} + U_{ολ}^{πριν}) - (K_{ολ}^{μετά} + U_{ολ}^{μετά}) \xrightarrow{U_{ολ}^{πριν} = U_{ολ}^{μετά} = 0} E_{απ} = K_{ολ}^{πριν} - K_{ολ}^{μετά} \Rightarrow$$

$$E_{απ} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2$$

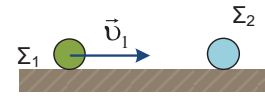
Με αντικατάσταση προκύπτει:

$$E_{απ} = \frac{1}{2} 0,9\text{Kg} \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \frac{1}{2} 0,1\text{kg} \left(48 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \frac{1}{2} 1\text{kg} \left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \Rightarrow E_{απ} = 1,8\text{J} + 115,2\text{J} - 4,5\text{J} \Rightarrow E_{απ} = 112,5\text{J}$$

Η ενέργεια αυτή μετατράπηκε κατά την κρούση σε θερμότητα.

Άσκηση 3.

Σώμα Σ_1 μάζας m_1 κινούμενο προς τη θετική φορά σε λείο οριζόντιο επίπεδο συγκρούεται με ταχύτητα μέτρου $v_1 = 8 \text{ m/s}$ κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα μάζας m_2 . Η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.



Αμέσως μετά την κρούση, το σώμα μάζας m_1 κινείται αντίρροπα με ταχύτητα μέτρου $v_1' = 4 \text{ m/s}$. Να υπολογίσετε:

α) το λόγο των μαζών $\frac{m_2}{m_1}$.

β) το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μάζας m_2 αμέσως μετά την κρούση.

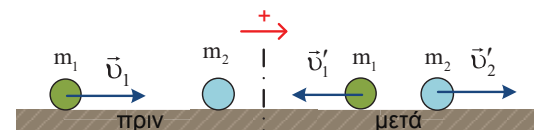
γ) το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος μάζας m_1 που μεταβιβάστηκε στο σώμα μάζας m_2 λόγω της κρούσης.

δ) την αλγεβρική τιμή της μεταβολής της ορμής των δύο σωμάτων, αν $m_2 = 2 \text{ kg}$. Τι παρατηρείτε;

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Λύση

α) Ορίζουμε θετική φορά προς τα δεξιά. Άρα $v_1' = 4 \text{ m/s}$.



Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, το σώμα Σ_1 έχει ταχύτητα μέτρου $v_1 = 8 \text{ m/s}$ και το σώμα Σ_2 είναι

αρχικά ακίνητο. Άρα η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας v_1' του σώματος Σ_1 μετά την κρούση δίνεται από τον τύπο:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (1)$$

και η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας v_2' του σώματος Σ_2 μετά την κρούση δίνεται από τον

$$\text{τύπο: } v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2)$$

$$\text{Ονομάζουμε το λόγο } \frac{m_2}{m_1} = \lambda \text{ οπότε } m_2 = \lambda \cdot m_1 \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (3) προκύπτει:

$$v'_1 = \frac{m_1 - \lambda m_1}{m_1 + \lambda m_1} v_1 \Rightarrow v'_1 = \frac{m_1(1-\lambda)}{m_1(1+\lambda)} v_1 \Rightarrow v'_1 = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} v_1 \Rightarrow v'_1 + \lambda v'_1 = v_1 - \lambda v_1 \Rightarrow$$

$$\lambda(v_1 + v'_1) = v_1 - v'_1 \Rightarrow \lambda = \frac{v_1 - v'_1}{v_1 + v'_1}$$

Με αντικατάσταση προκύπτει: $\lambda = \frac{8 \frac{m}{s} - (-4 \frac{m}{s})}{8 \frac{m}{s} + (-4 \frac{m}{s})} \Rightarrow \lambda = \frac{12}{4} \Rightarrow \lambda = 3$

Δηλαδή $\frac{m_2}{m_1} = 3$

β) Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μάζας m_2 αμέσως μετά την κρούση θα υπολογιστεί από τη σχέση (2): $v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$

Με αντικατάσταση $m_2 = 3m_1$ προκύπτει: $v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + 3m_1} v_1 \Rightarrow v'_2 = \frac{2m_1}{4m_1} v_1 \Rightarrow v'_2 = \frac{v_1}{2}$ (4)

και αντικαθιστώντας $v_1 = 8 \text{ m/s}$ προκύπτει: $v'_2 = \frac{8 \frac{m}{s}}{2} \Rightarrow v'_2 = 4 \frac{m}{s}$

γ) Επειδή το σώμα μάζας m_2 είναι πριν την κρούση ακίνητο, το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος μάζας m_1 που μεταβιβάστηκε στο σώμα μάζας m_2 λόγω της κρούσης είναι:

$$\frac{K_2^{\text{μετά}}}{K_1^{\text{πριν}}} = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}$$

Με αντικατάσταση $m_2 = 3m_1$ και $v'_2 = 4 \text{ m/s}$ προκύπτει :

$$\frac{K_2^{\text{μετά}}}{K_1^{\text{πριν}}} = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} = \frac{\frac{1}{2} 3m_1 \left(4 \frac{m}{s}\right)^2}{\frac{1}{2} m_1 \left(8 \frac{m}{s}\right)^2} = \frac{3 \cdot 16}{64} = 0,75 \quad \text{ή} \quad 75\%$$

δ) Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_2 είναι: $\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_2^{\text{μετά}} - \vec{p}_2^{\text{πριν}}$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$\Delta p_2 = m_2 v'_2 - m_2 v_2 \xrightarrow{v_2=0} \Delta p_2 = m_2 v'_2 - 0 \Rightarrow \Delta p_2 = m_2 v'_2$$

$$\text{Με αντικατάσταση προκύπτει: } \Delta p_2 = 2\text{kg} \cdot 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_2 = 8 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_1 είναι: $\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_1^{\text{μετά}} - \vec{p}_1^{\text{πριν}}$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$\Delta p_1 = m_1 v'_1 - m_1 v_1 \Rightarrow \Delta p_1 = m_1 (v'_1 - v_1)$$

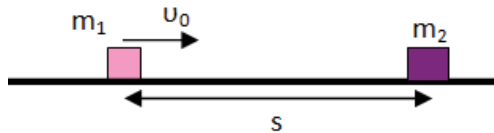
$$\text{Είναι } \frac{m_2}{m_1} = 3 \Rightarrow m_1 = \frac{m_2}{3} \Rightarrow m_1 = \frac{2}{3} \text{ kg}$$

$$\text{οπότε με αντικατάσταση προκύπτει: } \Delta p_1 = \frac{2}{3} \text{ kg} \cdot (-4 - 8) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_1 = -8 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο μεταβολές είναι αντίθετες.

Άσκηση 4.

Το σώμα μάζας $m_1 = 2\text{kg}$ του παρακάτω σχήματος βάλλεται με αρχική ταχύτητα $u_0 = 10\text{m/s}$ πάνω σε οριζόντιο δάπεδο που παρουσιάζει συντελεστή τριβής $\mu = 0,2$. Αφού διανύσει απόσταση $s = 9\text{m}$ συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το ακίνητο σώμα μάζας $m_2 = 6\text{kg}$ που είναι αρχικά ακίνητο.



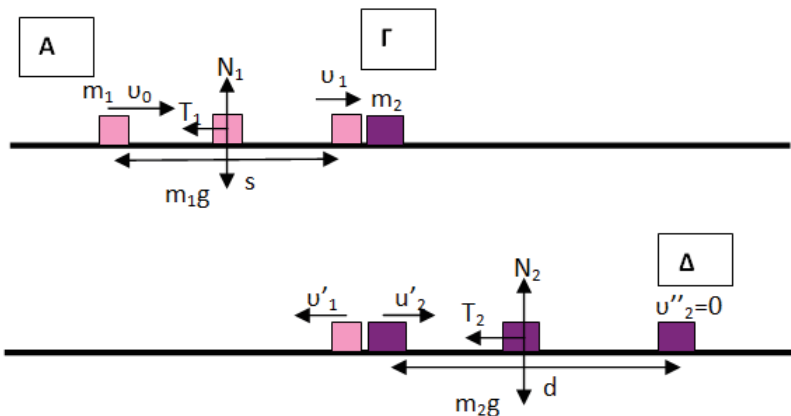
Να βρείτε:

- την ταχύτητα του σώματος μάζας m_1 λίγο πριν την κρούση.
- τις ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση.
- το ποσοστό της ενέργειας του σώματος m_1 που μεταβιβάστηκε στο σώμα μάζας m_2 .
- το διάστημα d που θα διανύσει το σώμα μάζας m_2 μέχρι να σταματήσει.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$.

Λύση

α) Φαινόμενο 1^ο: Κίνηση του m_1 από το Α στο Γ.



Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας.

$$K_{\Gamma} - K_A = W_{B_1} + W_N + W_{T_1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = 0 + 0 + T_1 \cdot s \cdot \cos 180^\circ \xrightarrow{T_1 = \mu m_1 g}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -\mu m_1 g s$$

$$\frac{1}{2} v_1^2 - \frac{1}{2} v_0^2 = -\mu g s \Rightarrow v_1^2 = v_0^2 - 2\mu g s \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g s} \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{100 - 2 \cdot 0,2 \cdot 10 \cdot 9} \text{ m/s} = \sqrt{100 - 36} \text{ m/s} = \sqrt{64} \text{ m/s} \Rightarrow$$

$$v_1 = 8 \text{ m/s}$$

β) Φαινόμενο 2^ο: Κρούση του m_1 με το m_2 . Θεωρούμε θετική φορά προς τα δεξιά.

Επειδή η κρούση των δύο σωμάτων είναι κεντρική και ελαστική ισχύουν οι τύποι:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \text{ και } v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Με αντικατάσταση έχουμε:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2 - 6}{2 + 6} 8 \text{ m/s} \Rightarrow v_1' = -4 \text{ m/s}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2 \cdot 2}{2 + 6} 8 \text{ m/s} \Rightarrow v_2' = 4 \text{ m/s}$$

γ) Λίγο πριν την κρούση το σώμα μάζας m_1 είχε κινητική ενέργεια:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8^2 \text{ J} \Rightarrow K_1 = 64 \text{ J}$$

Αμέσως μετά την κρούση το σώμα μάζας m_2 έχει κινητική ενέργεια:

$$K_2' = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4^2 \text{ J} \Rightarrow K_2' = 48 \text{ J}$$

Το ποσοστό της ενέργειας του σώματος m_1 που μεταβιβάστηκε στο σώμα μάζας m_2 είναι:

$$e\% = \frac{K_2'}{K_1} 100\% = \frac{48}{64} 100\% \Rightarrow e\% = 75\%$$

δ) Φαινόμενο 3^ο: Κίνηση του m_2 από το Γ στο Δ.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας.

$$K_{\Delta} - K_{\Gamma} = W_{B_2} + W_N + W_{T_2} \Rightarrow$$

$$0 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = 0 + 0 + T_2 d \sin 180^\circ \xrightarrow{T_2 = \mu m_2 g}$$

$$-\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -\mu m_2 g d \Rightarrow$$

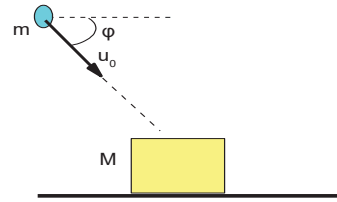
$$-\frac{1}{2} v_2'^2 = -\mu g d \Rightarrow$$

$$d = \frac{v_2'^2}{2\mu g} = \frac{16}{2 \cdot 0,2 \cdot 10} \text{ m} \Rightarrow$$

$$d = 4\text{m}$$

Άσκηση 5.

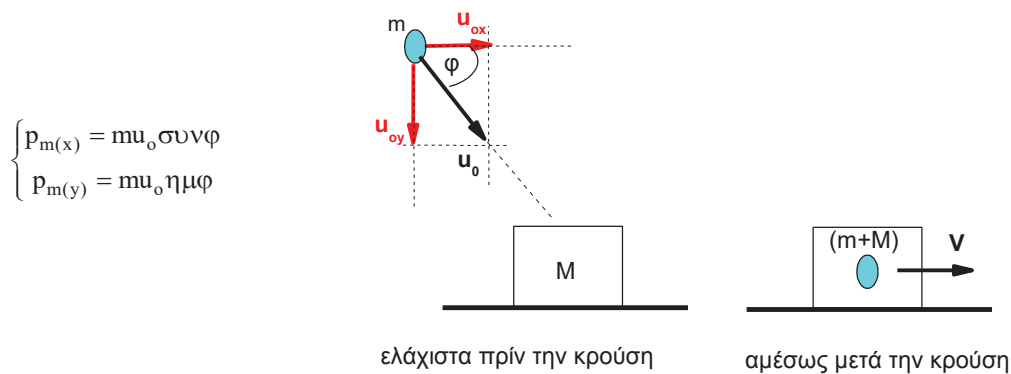
Ένας ξύλινος κύβος μάζας $M=0,9\text{kg}$ ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ένα μικρό βλήμα μάζας $m=0,1\text{kg}$ το οποίο, λίγο πριν να συγκρουστεί, κινείται με ταχύτητα μέτρου $u_0=50\text{m/s}$, σχηματίζοντας με τον ορίζοντα γωνία φ , σφηνώνεται στον κύβο. Να υπολογίσετε:



- την ταχύτητα V του συσσωματώματος.
 - τη θερμότητα που αναπτύχθηκε κατά την κρούση.
 - το ποσοστό της μηχανικής ενέργειας του βλήματος το οποίο μεταφέρθηκε στον κύβο.
 - τη μεταβολή της ορμής του συστήματος των σωμάτων κατά την κρούση.
- Δίνονται: $\eta\mu\varphi=0,6$, $\sigma\upsilon\nu\varphi=0,8$.

Λύση

α) Η κρούση είναι πλάγια και πλαστική ενώ το συσσωμάτωμα μετά την κρούση θα κινηθεί οριζόντια. Στην οριζόντια διεύθυνση δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις άρα η ορμή του συστήματος των σωμάτων θα διατηρείται σε αυτή τη διεύθυνση. Στην κατακόρυφη διεύθυνση ο κύβος δέχεται δύναμη από το δάπεδο άρα σε αυτή τη διεύθυνση η ορμή του συστήματος των σωμάτων δεν διατηρείται. Για να εξετάσουμε την ορμή του συστήματος ανά άξονα αναλύουμε την ορμή του m ελάχιστα πριν την κρούση σε κάθετες συνιστώσες:



Στην οριζόντια διεύθυνση η διατήρηση της ορμής του συστήματος των σωμάτων γράφεται:

$$\vec{p}_{m(x)} + \vec{p}_{M(x)} = \vec{p}_{(m+M)(x)} \Rightarrow mu_0 \sigma\upsilon\nu\varphi = (m+M)V \Rightarrow V = \frac{mu_0 \sigma\upsilon\nu\varphi}{m+M} \Rightarrow V = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Το ποσό θερμότητας που αναπτύσσεται ισούται με τη μείωση της μηχανικής ενέργειας του συστήματος των σωμάτων κατά την κρούση τους. Δηλαδή:

$$Q = E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} - E_{\mu\eta\chi(\tau\epsilon\lambda)} \Rightarrow Q = K_{(\alpha\rho\chi)} - K_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{1}{2}mu_0^2 - \frac{1}{2}(m+M)V^2 \Rightarrow Q = 117J$$

γ) Ο κύβος αποκτά κατά την κρούση ενέργεια: $\frac{1}{2}MV^2$ άρα το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\Pi\% = \frac{\frac{1}{2}MV^2}{\frac{1}{2}mu_0^2} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0,9 \cdot 4^2 \text{ J}}{\frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot 50^2 \text{ J}} \cdot 100\% = 5,76\%$$

δ) Η ορμή του συστήματος διατηρείται στον οριζόντιο άξονα όπως εξηγήσαμε προηγουμένως. Αντίθετα στον κατακόρυφο άξονα δε διατηρείται. Συνεπώς:

$$\Delta \vec{p} = \Delta \vec{p}_y = \vec{p}_{y(m+M)} - (\vec{p}_{y(m)\alpha\rho\chi} + \vec{p}_{y(M)\alpha\rho\chi}) \Rightarrow \Delta \vec{p} = -\vec{p}_{y(m)\alpha\rho\chi} \Rightarrow \Delta p = -mu_0 \eta \mu \varphi \Rightarrow$$

$$\Delta p = -3\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Άσκηση 6.

Ένας ξύλινος κύβος μάζας $M = 4,5\text{kg}$ είναι δεμένος στο άκρο ενός αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους $L = 0,2\text{m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε οροφή. Ο κύβος ηρεμεί με το νήμα κατακόρυφο. Ένα βλήμα μάζας $m = 0,5\text{kg}$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα $u_0 = 20\text{m/s}$ και συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με τον κύβο. Να υπολογίσετε:

- το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.
- το ποσό θερμότητας που αναπτύσσεται κατά την κρούση των σωμάτων.
- τη μέγιστη ανύψωση που επιτυγχάνει το συσσωμάτωμα μετά την κρούση.
- την τάση του νήματος αμέσως μετά την κρούση των σωμάτων.

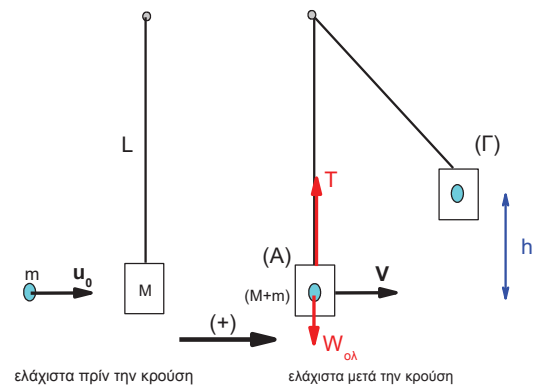
Δίνεται $g = 10\text{ m/s}^2$.

Λύση

α) Κατά την κρούση η ορμή του συστήματος των σωμάτων διατηρείται σταθερή, άρα:

$$\vec{p}_m + \vec{p}_M = \vec{p}'_{(m+M)} \Rightarrow$$

$$mu_0 + 0 = (m + M)V \Rightarrow V = 2 \frac{m}{s}$$



β) Το ποσό θερμότητας Q που αναπτύσσεται κατά την κρούση είναι ίσο με τη μείωση της μηχανικής ενέργειας του συστήματος των σωμάτων. Άρα: $Q = E_{μηχ(αρχ)} - E_{μηχ(τελ)}$

Η κρούση διαρκεί ελάχιστα, άρα η δυναμική ενέργεια του συστήματος δε μεταβάλλεται. Συνεπώς:

$$Q = K_{αρχ} - K_{τελ} = \frac{1}{2}mu_0^2 - \frac{1}{2}(m + M)V^2 \Rightarrow Q = 90\text{J}$$

γ) Στο σχήμα η θέση (Γ) είναι το υψηλότερο σημείο που φτάνει το συσσωμάτωμα μετά την κρούση, άρα η ταχύτητα του σε αυτή τη θέση μηδενίζεται στιγμιαία. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας από τη θέση (Α) έως τη θέση (Γ):

$$K_{(m+M)(Γ)} - K_{(m+M)(Α)} = W_w + W_T \quad (1)$$

Η τάση του νήματος είναι κάθετη στην τροχιά του συσσωματώματος άρα $W_T = 0$. Η (1) γράφεται:

$$0 - \frac{1}{2}(m+M)V^2 = -(m+M)gh \Rightarrow h = \frac{V^2}{2g} \Rightarrow h = 0,2\text{m} \quad (2)$$

Άρα το νήμα γίνεται οριζόντιο, αφού $h=L$.

δ) Το συσσωμάτωμα μετά την κρούση διαγράφει τμήμα κυκλικής τροχιάς, άρα η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται το συσσωμάτωμα στην ακτινική διεύθυνση έχει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Συνεπώς αμέσως μετά την κρούση θα ισχύει:

$$\Sigma F = F_{\kappa} \Rightarrow T - W_{ολ} = (m+M)\frac{V^2}{L} \Rightarrow T = (m+M)g + (m+M)\frac{V^2}{L} \Rightarrow T = 150\text{N}$$

Άσκηση 7.

Μικρή σφαίρα Σ_1 , μάζας $m_1 = 2\text{kg}$ που κινείται πάνω σε λείο επίπεδο με ταχύτητα $u_1 = 10\text{m/s}$ συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Σ_2 μάζας $m_2 = 8\text{kg}$. Να υπολογίσετε:

α) τις ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση.

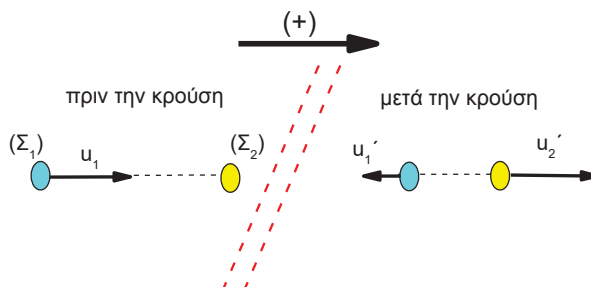
β) τη μεταβολή της ορμής κάθε σφαίρας καθώς και τη μεταβολή της ορμής του συστήματος των σφαιρών.

γ) τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 .

δ) το ποσοστό επί τοις εκατό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας Σ_1 που μεταφέρθηκε κατά την κρούση στη σφαίρα Σ_2 .

Λύση

α) Στην περίπτωση αυτή αντιμετωπίζουμε την κεντρική ελαστική κρούση δύο σφαιρών, εκ των οποίων η μία είναι αρχικά ακίνητη. Στην περίπτωση αυτή οι εξισώσεις που εφαρμόζουμε είναι:

$$\begin{cases} u_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 \\ u_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 \end{cases} \Rightarrow$$


$$\begin{cases} u_1' = \frac{2-8}{8+2} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ u_2' = \frac{2 \cdot 2}{8+2} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1' = -6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ u_2' = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

Το πρόσημο (-) της u_1' δηλώνει ότι η σφαίρα Σ_1 μετά την κρούση κινείται προς τα αριστερά.

β) Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Σ_1 υπολογίζεται ως εξής:

$$\Delta \vec{P}_1 = \vec{P}_1' - \vec{P}_1 \Rightarrow \Delta \vec{P}_1 = m_1 \vec{u}_1' - m_1 \vec{u}_1 \Rightarrow \Delta P_1 = 2\text{kg} \cdot \left(-6 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \Rightarrow \Delta P_1 = -32\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Αντίστοιχα για τη μεταβολή της σφαίρας Σ_2 έχουμε:

$$\Delta \vec{P}_2 = \vec{P}_2' - \vec{P}_2 \Rightarrow \Delta \vec{P}_2 = m_2 \vec{u}_2' - 0 \Rightarrow \Delta P_2 = 8\text{kg} \cdot 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 32\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για τη μεταβολή της ορμής του συστήματος των σφαιρών έχουμε:

$$\Delta \vec{P}_{ολ} = \Delta \vec{P}_1 + \Delta \vec{P}_2 \Rightarrow \Delta \vec{P}_{ολ} = -32\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} + 32\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta \vec{P}_{ολ} = 0$$

Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο αφού η ορμή του συστήματος των σωμάτων διατηρείται, άρα θα πρέπει:

$$\Delta \vec{P}_{ολ} = 0$$

γ) Η κινητική ενέργεια της σφαίρας Σ₁ μεταβλήθηκε κατά:

$$\Delta K_1 = K'_1 - K_1 = \frac{1}{2} m_1 u_1'^2 - \frac{1}{2} m_1 u_1^2 \Rightarrow$$

$$\Delta K_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\text{kg} \cdot \left[\left(-6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right] \Rightarrow \Delta K_1 = -64\text{J}$$

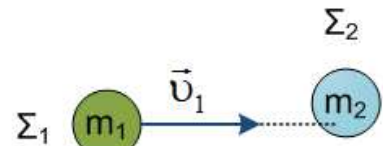
δ) Η κρούση είναι ελαστική άρα η μείωση της ενέργειας του Σ₁ κατά την κρούση ισούται με την ενέργεια που μεταφέρεται στο Σ₂. Το ζητούμενο ποσοστό ισούται με:

$$\Pi\% = \frac{K_1 - K'_1}{K_1} \cdot 100\% = \frac{-\Delta K_1}{\frac{1}{2} m_1 u_1^2} \cdot 100\% = \frac{64\text{J}}{100\text{J}} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi\% = 64\%$$

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Σφαίρα Σ_1 μάζας $m_1 = m$ κινείται με ταχύτητα μέτρου $v_1 = 6 \text{ m/s}$ και συγκρούεται με άλλη σφαίρα Σ_2 μάζας $m_2 = 2m$, που είναι αρχικά ακίνητη. Η κρούση είναι έκκεντρη και ελαστική και η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα. Μετά την κρούση, η σφαίρα Σ_1 κινείται με ταχύτητα $\vec{v}'_1$ που έχει διεύθυνση κάθετη στη διεύθυνση της $\vec{v}_1$. Να υπολογιστεί:



- το μέτρο και η διεύθυνση της ταχύτητας $\vec{v}'_2$ της σφαίρας Σ_2 , μετά την κρούση.
- το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας Σ_1 , μετά την κρούση.
- το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας μάζας m_1 που μεταβιβάστηκε στη σφαίρα μάζας m_2 λόγω της κρούσης.
- το μέτρο της μεταβολής της ορμής της σφαίρας Σ_1 κατά τη κρούση, αν $m_2 = 2 \text{ kg}$.

Δίνεται η μαθηματική ιδιότητα $\eta \mu^2 \theta + \sigma \nu^2 \theta = 1$.

Λύση

α) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η πορεία των δύο σφαιρών μετά την έκκεντρη κρούση. Αναλύουμε την ταχύτητα $\vec{v}'_2$ σε δύο συνιστώσες οι οποίες έχουν μέτρα:

$$v'_{2x} = v'_2 \sigma \nu \theta \text{ και } v'_{2y} = v'_2 \eta \mu \theta$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για κάθε άξονα χωριστά:

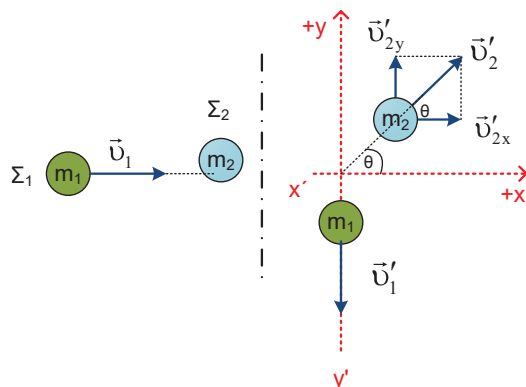
$$x'x: \vec{p}_{\text{ολ},x}^{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{ολ},x}^{\text{μετά}} \Rightarrow \vec{p}_{1,x}^{\text{πριν}} + \vec{p}_{2,x}^{\text{πριν}} = \vec{p}_{1,x}^{\text{μετά}} + \vec{p}_{2,x}^{\text{μετά}}$$

Επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$m_1 v_1 + 0 = 0 + m_2 v'_{2x} \Rightarrow m_1 v_1 = m_2 v'_{2x} \xrightarrow{m_2 = 2m_1} \\ m_1 v_1 = 2m_1 v'_{2x} \Rightarrow v_1 = 2v'_{2x} \sigma \nu \theta \quad (1)$$

$$y'y: \vec{p}_{\text{ολ},y}^{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{ολ},y}^{\text{μετά}} \Rightarrow \vec{p}_{1,y}^{\text{πριν}} + \vec{p}_{2,y}^{\text{πριν}} = \vec{p}_{1,y}^{\text{μετά}} + \vec{p}_{2,y}^{\text{μετά}}$$

Επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα πάνω, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:



$$0 = m_2 v'_{2y} - m_1 v'_1 \Rightarrow m_1 v'_1 = m_2 v'_{2y} \xrightarrow{m_2=2m_1}$$

$$m_1 v'_1 = 2m_1 v'_{2y} \Rightarrow v'_1 = 2v'_{2y} \Rightarrow v'_1 = 2v'_2 \eta \mu \theta \quad (2)$$

Υψώνουμε τις σχέσεις (1) και (2) στο τετράγωνο και τις προσθέτουμε κατά μέλη:

$$v_1^2 + v_1'^2 = 4v_2'^2 \sin^2 \theta + 4v_2'^2 \eta \mu^2 \theta \Rightarrow v_1^2 + v_1'^2 = 4v_2'^2 (\sin^2 \theta + \eta \mu^2 \theta) \Rightarrow v_1^2 + v_1'^2 = 4v_2'^2 \quad (3)$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική η κινητική ενέργεια του συστήματος διατηρείται.

$$K_{ολ}^{πριν} = K_{ολ}^{μετά} \Rightarrow K_1^{πριν} + K_2^{πριν} = K_1^{μετά} + K_2^{μετά} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_1^2 + 0 = \frac{1}{2} m v_1'^2 + \frac{1}{2} 2m v_2'^2 \Rightarrow$$

$$v_1^2 = v_1'^2 + 2v_2'^2 \quad (4)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (4) και (3):

$$2v_1^2 + v_1'^2 = v_1'^2 + 6v_2'^2 \Rightarrow v_1^2 = 3v_2'^2 \Rightarrow v_2' = \frac{v_1}{\sqrt{3}} \Rightarrow v_2' = \frac{6 \frac{m}{s}}{\sqrt{3}} \Rightarrow v_2' = \frac{6\sqrt{3}}{3} \frac{m}{s} \Rightarrow v_2' = 2\sqrt{3} \frac{m}{s}$$

$$(1) \Rightarrow \sin \theta = \frac{v_1}{2v_2'} \Rightarrow \sin \theta = \frac{6 \frac{m}{s}}{4\sqrt{3} \frac{m}{s}} \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

β) Αφαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (3) και (4):

$$v_1'^2 = 2v_2'^2 - v_1^2 \Rightarrow 2v_1'^2 = 2v_2'^2 \Rightarrow v_1'^2 = v_2'^2 \Rightarrow v_1' = v_2' \Rightarrow v_1' = v_2' = 2\sqrt{3} \frac{m}{s}$$

γ) Επειδή η σφαίρα μάζας m_2 είναι ακίνητη πριν τη κρούση, το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας μάζας m_1 που μεταβιβάστηκε στη σφαίρα μάζας m_2 λόγω της κρούσης είναι:

$$\frac{K_2^{μετά}}{K_1^{πριν}} = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} = \frac{2m_1 v_2'^2}{m_1 v_1^2} = \frac{2v_2'^2}{v_1^2} = \frac{2 \cdot \left(2\sqrt{3} \frac{m}{s}\right)^2}{\left(6 \frac{m}{s}\right)^2} = \frac{2}{3} \quad \text{ή} \quad 66,7\%$$

δ) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής: $\vec{p}_{ολ}^{πριν} = \vec{p}_{ολ}^{μετά} \Rightarrow$

$$\vec{p}_1^{πριν} + \vec{p}_2^{πριν} = \vec{p}_1^{μετά} + \vec{p}_2^{μετά} \Rightarrow \vec{p}_1^{πριν} = \vec{p}_1^{μετά} + \vec{p}_2^{μετά} \Rightarrow$$

$$\vec{p}_1^{\text{μετά}} - \vec{p}_1^{\text{πριν}} = -\vec{p}_2^{\text{μετά}} \Rightarrow \Delta \vec{p}_1 = -\vec{p}_2^{\text{μετά}} \Rightarrow \Delta \vec{p}_1 = -m_2 \vec{v}_2'$$

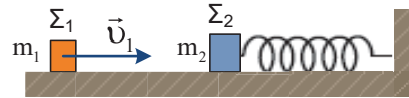
Δηλαδή η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Σ_1 έχει αντίθετη κατεύθυνση από την ταχύτητα $\vec{v}_2'$ και μέτρο $\Delta p_1 = m_2 v_2'$

Με αντικατάσταση $m_2=2\text{kg}$ και $v_2' = 2\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ προκύπτει:

$$\Delta p_1 = 2\text{kg} \cdot 2\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_1 = 4\sqrt{3} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

Πρόβλημα 2.

Σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 4\text{kg}$ βρίσκεται ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο και είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Ένα δεύτερο σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1\text{kg}$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $v_1 = 10\text{m/s}$ και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με το Σ_2 .



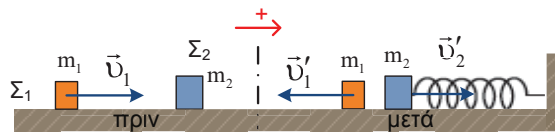
Να υπολογίσετε:

- τις ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κρούση.
- το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_2 .
- το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 που μεταφέρθηκε στο σώμα Σ_2 .
- τη μέγιστη συσπίρωση Δl του ελατηρίου.

Δίνεται η σταθερά του ελατηρίου $k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

Λύση

α) Ορίζουμε θετική φορά προς τα δεξιά. Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, το σώμα Σ_1 έχει ταχύτητα μέτρου $v_1 = 10\text{m/s}$ και το σώμα Σ_2 είναι αρχικά ακίνητο. Άρα η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας v'_1 του σώματος Σ_1 μετά την κρούση δίνεται από τον τύπο:



$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (1)$$

και η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας v'_2 του σώματος Σ_2 μετά την κρούση δίνεται από τον

$$\text{τύπο: } v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2)$$

Με αντικατάσταση προκύπτει: $v'_1 = \frac{1-4}{1+4} 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v'_1 = -\frac{3}{5} 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v'_1 = -6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (έχει φορά προς τα αριστερά όπως στο σχήμα)

$$\text{και } v'_2 = \frac{2 \cdot 1}{5} 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v'_2 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_2 : $\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_2^{\text{μετά}} - \vec{p}_2^{\text{πριν}}$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$\Delta p_2 = m_2 v'_2 - m_2 v_2 \xrightarrow{v_2=0} \Delta p_2 = m_2 v'_2 - 0 \Rightarrow \Delta p_2 = m_2 v'_2$$

$$\text{Με αντικατάσταση προκύπτει: } \Delta p_2 = 4\text{kg} \cdot 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_2 = 16 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

Επειδή η αλγεβρική τιμή της μεταβολής της ορμής είναι θετική, ταυτίζεται με το μέτρο.

$$\gamma) \text{ Η κινητική ενέργεια του } \Sigma_2 \text{ μετά την κρούση είναι: } K_2^{\text{μετά}} = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

Επειδή το σώμα Σ_2 αρχικά ήταν ακίνητο, το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 που μεταφέρθηκε στο σώμα Σ_2 , είναι:

$$\frac{K_2^{\text{μετά}}}{K_1^{\text{πριν}}} = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} = \frac{\frac{1}{2} 4\text{kg} \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{\frac{1}{2} 1\text{kg} \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = \frac{4 \cdot 16}{100} = 0,64 \quad \text{ή} \quad 64\%$$

δ) Κατά τη συμπίεση του ελατηρίου όλη η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_2 μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια στο ελατήριο: Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της Μηχανικής ενέργειας για το σύστημα Σ_2 -k :

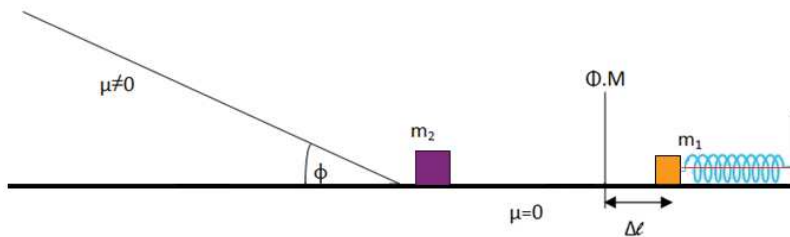
$$K = U_{\text{ελ}} \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} k \Delta l^2 \Rightarrow \Delta l = v_2' \sqrt{\frac{m_2}{k}}$$

και με αντικατάσταση $m_2 = 4\text{kg}$, $v_2' = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ και $k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ προκύπτει:

$$\Delta l = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{\frac{4\text{kg}}{100 \frac{\text{N}}{\text{m}}}} \Rightarrow \Delta l = 4 \frac{2}{10} \text{m} \Rightarrow \Delta l = 0,8\text{m}$$

Πρόβλημα 3.

Το σώμα μάζας $m_1 = 1\text{kg}$ του παρακάτω σχήματος, ακουμπάει χωρίς να έχει προσδεθεί στο ελεύθερο άκρο οριζώντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 10^4 \text{ N/m}$. Το ελατήριο είναι συμπιεσμένο σε σχέση με το φυσικό του μήκος κατά $\Delta\ell = 0,1\text{m}$ με τη βοήθεια νήματος. Κάποια στιγμή το νήμα κόβεται και το σώμα μάζας m_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το αρχικά ακίνητο σώμα μάζας $m_2 = 4\text{kg}$. Το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο. Το m_2 μετά την κρούση κινείται σε μη λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi = 30^\circ$ που παρουσιάζει τριβές με συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = \frac{\sqrt{3}}{5}$.



A. Να υπολογίσετε:

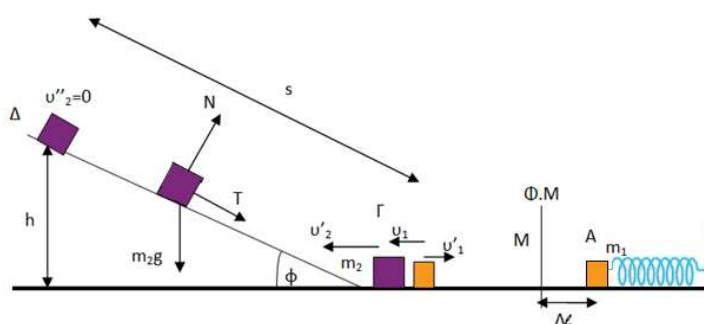
- το μέτρο της ταχύτητας του σώματος m_1 λίγο πριν την κρούση του με το σώμα m_2 .
- τις ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την ελαστική τους κρούση.
- το διάστημα που θα διανύσει το m_2 μέχρι να σταματήσει.

B. Θα επιστρέψει το m_2 στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, αν υποτεθεί ότι το μήκος του κεκλιμένου επιπέδου είναι αρκετά μεγάλο για την κίνηση του σώματος;

Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$.

Λύση

A.



α) Φαινόμενο 1^ο: Κίνηση του m_1 υπό την επίδραση της δύναμης του ελατηρίου. Κατά την αποσυμπίεση του ελατηρίου όλη η δυναμική ενέργεια του μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια του σώματος μάζας m_1 . Η επαφή της m_1 με το ελατήριο χάνεται στο φυσικό μήκος του. Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της Μηχανικής ενέργειας για το σύστημα m_1 - k μεταξύ της αρχικής συσπειρωμένης θέσης του ελατηρίου και του φυσικού του μήκους.

$$E_{ολ}(A) = E_{ολ}(M) \Rightarrow$$

$$K(A) + U(A) = K(M) + U(M) \Rightarrow$$

$$0 + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + 0 \longrightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \Delta l \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{10^4}{1}} 0,1 \text{ m/s} \Rightarrow$$

$$v_1 = 10 \text{ m/s}$$

β) Φαινόμενο 2^ο: Κρούση του m_1 με το m_2 . Θετική φορά λαμβάνεται αυτή προς τα αριστερά.

Επειδή η κρούση των δύο σωμάτων είναι κεντρική και ελαστική ισχύουν οι τύποι:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \text{ και } v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Με αντικατάσταση έχουμε:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{1 - 4}{1 + 4} 10 \text{ m/s} \Rightarrow v_1' = -6 \text{ m/s}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2 \cdot 1}{1 + 4} 10 \text{ m/s} \Rightarrow v_2' = 4 \text{ m/s}$$

γ) Φαινόμενο 3^ο: Κίνηση του m_2 στο κεκλιμένο επίπεδο.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το m_2 από τη θέση Γ έως τη θέση Δ.

$$K_{\Delta} - K_{\Gamma} = W_{m_2g} + W_N + W_{Tp} \Rightarrow$$

$$0 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -m_2 g h + 0 + T \cdot s \cdot \cos 180^\circ \xrightarrow{h=s\eta\mu\varphi}$$

$$0 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -m_2 g \cdot s \cdot \eta\mu\varphi + 0 - \mu m_2 g \cdot s \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} v_2'^2 = g s (\eta\mu\varphi + \mu \sigma\upsilon\nu\varphi) \Rightarrow$$

$$s = \frac{v_2'^2}{2g(\eta\mu\varphi + \mu \sigma\upsilon\nu\varphi)} \Rightarrow$$

$$s = \frac{16}{2 \cdot 10 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{5} \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} m \Rightarrow$$

$$s = \frac{16}{2 \cdot 10 \left(\frac{8}{10} \right)} m \Rightarrow$$

$$s = 1m$$

Β. Όταν το σώμα σταματήσει, η τριβή ολίσθησης μετατρέπεται ακαριαία σε στατική τριβή και αντιστέκεται στην συνιστώσα $m_2 g_x$ που έχει την τάση να ξαναθέσει σε κίνηση το σώμα m_2 .

Αν η $m_2 g_x$ είναι μεγαλύτερη της μέγιστης τιμής της στατικής τριβής το σώμα θα επανέλθει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

Αν η $m_2 g_x$ είναι μικρότερη ή ίση της μέγιστης τιμής της στατικής τριβής το σώμα δεν θα επανέλθει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου και θα σταματήσει οριστικά.

Σε αυτή την περίπτωση στο σώμα θα ασκείται η στατική τριβή που θα είναι ίση με το $m_2 g_x$ και όχι η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής.

$$\text{Έλεγχος: } m_2 g_x = m_2 g \eta\mu\varphi = 4 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} N = 20N$$

$$T_{\sigma\tau}(\max) = \mu m_2 g \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\sqrt{3}}{5} 4 \cdot 10 \frac{\sqrt{3}}{2} = 12N$$

Αφού η $m_2 g_x$ είναι μεγαλύτερη της μέγιστης τιμής της στατικής τριβής το σώμα θα επανέλθει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

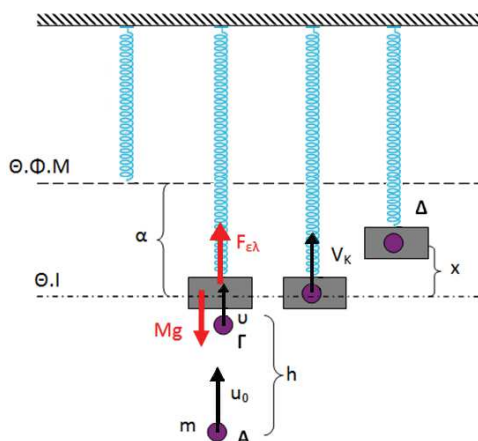
Πρόβλημα 4.

Ένα σώμα μάζας $M = 35\text{kg}$ ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 20\text{N/m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε οροφή. Κάποια στιγμή ένα βλήμα μάζας $m = 5\text{kg}$ βάλλεται από απόσταση $h = 3,2\text{m}$ κάτω από το σώμα M με αρχική ταχύτητα μέτρου $v_0 = 16\text{m/s}$ και με φορά προς τα πάνω και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα μάζας M . Να υπολογίσετε:

- Το μέτρο της ταχύτητας του βλήματος λίγο πριν την κρούση.
- Το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.
- Τη θερμότητα που αναπτύχθηκε κατά την διάρκεια της κρούσης.
- Τη μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου από την αρχική του θέση.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$.

Λύση



$$\Sigma F_{\Theta.I} = 0 \Rightarrow Mg - F_{ελ} = 0 \Rightarrow Mg = k\alpha \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{Mg}{k} \quad (*)$$

α) Φαινόμενο 1^ο: Κίνηση του m από το A προς το Γ .

Θ.Μ.Κ.Ε. για το m :

$$K_{\Gamma} - K_A = W_{mg} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgh \Rightarrow$$

$$v^2 = v_0^2 - 2gh = \sqrt{256 - 2 \cdot 10 \cdot 3,2}\text{m/s} \Rightarrow v = \sqrt{64 \cdot 4 - 64}\text{m/s} \Rightarrow v = \sqrt{64 \cdot 3}\text{m/s} \Rightarrow$$

$$v = 8\sqrt{3}\text{m/s} \quad (1)$$

Β) Φαινόμενο 2⁰: Πλαστική κρούση m-M.

Α.Δ.Ο (λίγο πριν -λίγο μετά την κρούση)

$$\vec{p}_{ολ}(\text{πριν}) = \vec{p}_{ολ}(\text{μετά}) \Rightarrow$$

$$\vec{p}_m + \vec{p}_M = \vec{p}'_m + \vec{p}'_M$$

Επιλέγοντας θετική φορά προς τα πάνω, γράφουμε την παραπάνω σχέση αλγεβρικά:

$$mv = (m + M)V_K \Rightarrow V_K = \frac{mu}{m + M} \Rightarrow V_K = \frac{40\sqrt{3}}{40} \text{ m/s} \Rightarrow V_K = \sqrt{3} \text{ m/s} \quad (2)$$

$$\gamma) Q = |\Delta K_{ολ}| = K_{ολ}(\alpha\rho\chi) - K_{ολ}(\tau\epsilon\lambda) \quad (3)$$

Η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$K_{ολ}(\alpha\rho\chi) = \frac{1}{2}mv^2 + 0 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (8\sqrt{3})^2 \text{ J} = 480 \text{ J} \quad (4)$$

Η τελική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$K_{ολ}(\tau\epsilon\lambda) = \frac{1}{2}(m + M)V_K^2 = \frac{1}{2}(5 + 35)(\sqrt{3})^2 \text{ J} = 20 \cdot 3 \text{ J} \Rightarrow K_{ολ}(\tau\epsilon\lambda) = 60 \text{ J} \quad (5)$$

$$(3) \xrightarrow{(4),(5)} Q = (480 - 60) \text{ J} \Rightarrow Q = 420 \text{ J}$$

δ) Φαινόμενο 3⁰: Συσπείρωση του ελατηρίου.

Θ.Μ.Κ.Ε για το συσσωμάτωμα από το Γ → Δ (ή διατήρηση της μηχανικής ενέργειας του συστήματος μεταξύ των θέσεων Γ και Δ)

$$K_{\Delta} - K_{\Gamma} = W_{(m+M)g} + W_{F_{ελ}} \Rightarrow$$

$$0 - \frac{1}{2}(m + M)V_K^2 = -(m + M)gx + \frac{1}{2}k\alpha^2 - \frac{1}{2}k(\alpha - x)^2 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}(m + M)V_K^2 = -(m + M)gx + \frac{1}{2}k\alpha^2 - \frac{1}{2}k\alpha^2 - \frac{1}{2}kx^2 + k\alpha x \xrightarrow{(*)} \rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}(m + M)V_K^2 = -(m + M)gx - \frac{1}{2}kx^2 + k\frac{Mg}{k}x \Rightarrow$$

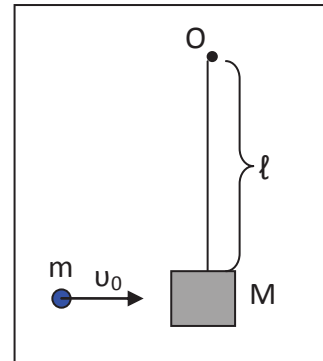
$$-\frac{1}{2}(m + M)V_K^2 = -mgx - \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 + mgx - \frac{1}{2}(m + M)V_K^2 = 0 \Rightarrow$$

$$10x^2 + 50x - \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -6\text{m} & \text{απορρίπτεται} \\ x = 1\text{m} & \text{δεκτή} \end{cases}$$

Πρόβλημα 5.

Το σώμα του διπλανού σχήματος έχει μάζα $M = 4,8\text{kg}$ και ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου μη εκτατού νήματος μήκους $\ell = 0,18\text{m}$. Σώμα μάζας $m = 0,2\text{kg}$ κινείται με ταχύτητα u_0 και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα M . Να υπολογίσετε:



α) Την ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει το σώμα m ώστε μετά την πλαστική τους κρούση, το συσσωμάτωμα να διαγράψει μία πλήρη κυκλική τροχιά (να κάνει ανακύκλωση).

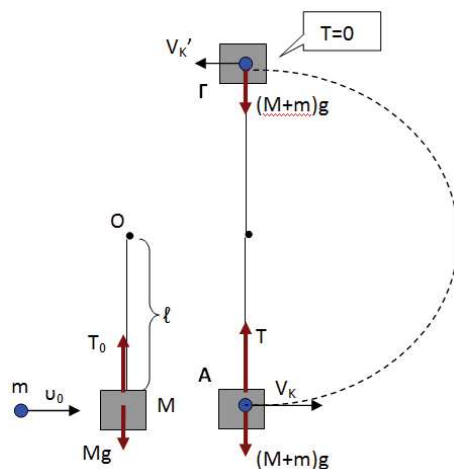
β) Το μέτρο της μεταβολής της ορμής της μάζας m πριν και μετά την κρούση.

γ) Την τάση T_0 του νήματος πριν την κρούση.

δ) Την τάση T του νήματος αμέσως μετά την κρούση. Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$.

Λύση

α)



Φαινόμενο 1^ο: Πλαστική κρούση m - M .

Α.Δ.Ο (λίγο πριν - λίγο μετά)

$$\vec{p}_{ολ}(\text{πριν}) = \vec{p}_{ολ}(\text{μετά}) \Rightarrow$$

$$\vec{p}_m + \vec{p}_M = \vec{p}'_m + \vec{p}'_M \Rightarrow$$

$$mu_0 = (m + M)V_K \Rightarrow$$

$$u_0 = \frac{(m + M)V_K}{m} = \frac{(0,2 + 4,8)V_K}{0,2} \Rightarrow u_0 = 25V_K \quad (1)$$

Φαινόμενο 2^ο: Κίνηση συσσωματώματος από το Α στο Γ.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας.

$$K_{\Gamma} - K_A = W_{(m+M)g} + W_T \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(m+M)V_K'^2 - \frac{1}{2}(m+M)V_K^2 = -(m+M)g2\ell + 0 \Rightarrow$$

$$V_K'^2 = V_K^2 + 4g\ell \Rightarrow V_K = \sqrt{V_K^2 + 4g\ell} \quad (2)$$

Φαινόμενο 3^ο: Συνθήκη ανακύκλωσης στο σημείο Γ.

$$\Sigma F_R = F_K \Rightarrow$$

$$T + (M+m)g = (M+m) \frac{V_K'^2}{\ell} \xrightarrow{V_K' \rightarrow \min \Rightarrow T=0}$$

$$V_K'^2 = g\ell \Rightarrow V_K' = \sqrt{g\ell} = \sqrt{10 \cdot 0,18} \text{ m/s} \Rightarrow V_K' = \sqrt{1,8} \text{ m/s} \quad (3)$$

$$(2) \xrightarrow{(3)} V_K = \sqrt{1,8 + 4 \cdot 10 \cdot 0,18} \text{ m/s} = \sqrt{1,8 + 7,2} \text{ m/s} = \sqrt{9} \text{ m/s} \Rightarrow V_K = 3 \text{ m/s} \quad (4)$$

$$(1) \xrightarrow{(4)} u_0 = 25 \cdot 3 \text{ m/s} \Rightarrow u_0 = 75 \text{ m/s}$$

β) Το μέτρο της ορμής της μάζας m πριν την κρούση είναι:

$$p_m = mu_0 = 0,2 \cdot 75 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \Rightarrow p_m = 15 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Το μέτρο της ορμής της μάζας m μετά την κρούση είναι:

$$p'_m = mV_K = 0,2 \cdot 3 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \Rightarrow p'_m = 0,6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του m κατά την κρούση είναι:

$$|\Delta \vec{p}_m| = |p'_m - p_m| = |0,6 - 15| \text{ kg} \cdot \text{m/s} \Rightarrow |\Delta \vec{p}_m| = 14,4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

γ) Επειδή αρχικά το σώμα μάζας M ισορροπούσε: $\Sigma F = 0 \Rightarrow T_0 - Mg = 0 \Rightarrow T_0 = Mg \Rightarrow$

$$T_0 = 4,8 \cdot 10 \text{ N} \Rightarrow T_0 = 48 \text{ N}$$

δ) Το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση μπαίνει σε κυκλική κίνηση.

Προσοχή: Η τάση του νήματος δεν ισούται με το βάρος του συσσωματώματος ($T \neq (M+m)g$) και η συνισταμένη της τάσης και του βάρους είναι η κεντρομόλος δύναμη.

$$\Sigma F_R = F_K \Rightarrow T - (M + m)g = (M + m) \frac{V_K^2}{\ell} \Rightarrow T = (M + m)g + (M + m) \frac{V_K^2}{\ell} \xrightarrow{(4)}$$

$$T = \left(50 + 5 \frac{9}{0,18} \right) N \Rightarrow T = 300 N$$

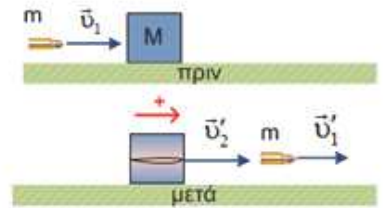
Ημερομηνία τροποποίησης: 31/08/2015

Επιμέλεια: Ιωάννης Αλεξόπουλος, Αντώνιος Γεωργούσης, Νικόλαος Στέρπης
Επιστημονικός έλεγχος: Αντώνιος Παλόγος, Βασίλειος Ραυτόπουλος, Κωνσταντίνος Στεφανίδης

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Σώμα μάζας $M = 5\text{kg}$ ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Βλήμα κινούμενο οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $v_1 = 100\text{m/s}$ και μάζας $m = 0,2\text{kg}$, διαπερνά το σώμα χάνοντας το 75% της κινητικής του ενέργειας και εξέρχεται με ταχύτητα v'_1 . Να υπολογιστεί:



- το μέτρο της ταχύτητας v'_1 του βλήματος και της ταχύτητας v'_2 του σώματος αμέσως μετά την έξοδο του βλήματος.
- Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του βλήματος που μεταφέρθηκε στο σώμα κατά την κρούση.
- Η μεταβολή της ορμής του βλήματος και του σώματος από τη στιγμή που ηρεμούσε το σώμα μέχρι την έξοδο του βλήματος.
- Η μέση δύναμη που δέχεται το σώμα κατά τη διάρκεια της διέλευσης του βλήματος, αν αυτή διαρκεί $\Delta t = 0,01\text{s}$.

Λύση

α) Η αρχική κινητική ενέργεια του βλήματος πριν τη κρούση είναι:

$$K_{\beta\lambda.\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow K_{\beta\lambda.\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}0,2\text{kg} \cdot \left(100\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \Rightarrow K_{\beta\lambda.\alpha\rho\chi} = 1000\text{J}$$

Το βλήμα χάνει το 75% της κινητικής του ενέργειας, άρα η τελική κινητική ενέργεια του βλήματος μετά τη κρούση είναι το 25% της αρχικής, οπότε:

$$K_{\beta\lambda.\tau\epsilon\lambda} = 25\%K_{\beta\lambda.\alpha\rho\chi} \Rightarrow K_{\beta\lambda.\tau\epsilon\lambda} = 25\% \cdot 1000\text{J} \Rightarrow K_{\beta\lambda.\tau\epsilon\lambda} = 250\text{J}$$

Ισχύει:

$$K_{\beta\lambda.\tau\epsilon\lambda} = \frac{1}{2}mv_1'^2 \Rightarrow v_1' = \sqrt{\frac{2K_{\beta\lambda.\tau\epsilon\lambda}}{m}} \Rightarrow v_1' = \sqrt{\frac{2 \cdot 250\text{J}}{0,2\text{kg}}} \Rightarrow v_1' = \sqrt{2500}\frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_1' = 50\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Στην περίπτωση αυτή η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας ταυτίζεται με το μέτρο.

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των δύο σωμάτων:

$$\vec{p}_{\text{ολ},\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\text{ολ},\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow \vec{p}_{1,\alpha\rho\chi} + 0 = \vec{p}_{1,\tau\epsilon\lambda} + \vec{p}_{2,\tau\epsilon\lambda}$$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$mv_1 = mv_1' + Mv_2' \Rightarrow v_2' = \frac{mv_1 - mv_1'}{M} \Rightarrow v_2' = \frac{m(v_1 - v_1')}{M}$$

και με αντικατάσταση προκύπτει:

$$v_2' = \frac{0,2\text{kg} \cdot (100 - 50)\frac{\text{m}}{\text{s}}}{5\text{kg}} \Rightarrow v_2' = 2\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του βλήματος που μεταφέρθηκε στο ακίνητο σώμα κατά την κρούση είναι:

$$\frac{K_{\text{σωμ.τελ}}}{K_{\text{βλ.αρχ}}} = \frac{\frac{1}{2} M v_2'^2}{\frac{1}{2} m v_1^2} = \frac{\frac{1}{2} 5\text{kg} \cdot \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{\frac{1}{2} 0,2\text{kg} \left(100 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = \frac{10\text{J}}{1000\text{J}} = 0,01 \quad \text{ή} \quad 1\%$$

γ) Η μεταβολή της ορμής του σώματος είναι:

$$\Delta \vec{p}_{\text{σωμ}} = \vec{p}_{\text{σωμ}}^{\text{μετά}} - \vec{p}_{\text{σωμ}}^{\text{πριν}}$$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$\Delta p_{\text{σωμ}} = M v_2' - 0 \Rightarrow \Delta p_{\text{σωμ}} = 5\text{kg} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_{\text{σωμ}} = 10 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \quad \text{με φορά προς τα δεξιά.}$$

Η μεταβολή της ορμής του βλήματος είναι:

$$\Delta \vec{p}_{\text{βλ}} = \vec{p}_{\text{βλ}}^{\text{μετά}} - \vec{p}_{\text{βλ}}^{\text{πριν}}$$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$\Delta p_{\text{βλ}} = m v_1' - m v_1 \Rightarrow \Delta p_{\text{βλ}} = 0,2\text{kg} \cdot 50 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0,2\text{kg} \cdot 100 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_{\text{βλ}} = -10 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \quad \text{με φορά}$$

προς τα αριστερά.

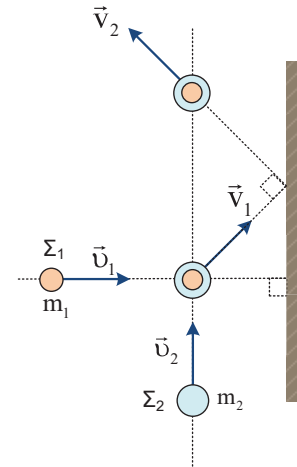
Παρατηρούμε ότι οι δύο μεταβολές είναι αντίθετες.

δ) Εφαρμόζουμε τον 2^ο νόμο του Newton για το σώμα, για τη διάρκεια της διέλευσης του βλήματος μέσα από αυτό:

$$\Sigma \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}_{\text{σωμ}}}{\Delta t} \Rightarrow F = \frac{\Delta p_{\text{σωμ}}}{\Delta t} \Rightarrow F = \frac{10 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}}{0,01\text{s}} \Rightarrow F = 10^3 \text{ N}$$

Άσκηση 2.

Σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1\text{kg}$ κινείται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $v_1 = 12\text{m/s}$ με κατεύθυνση κάθετη σε κατακόρυφο τοίχο και συγκρούεται πλαστικά με σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 2\text{kg}$ που κινείται παράλληλα προς τον τοίχο με οριζόντια ταχύτητα $\vec{v}_2$. Το συσσωμάτωμα αποκτά ταχύτητα $\vec{v}_1$. Στη συνέχεια το συσσωμάτωμα συγκρούεται ελαστικά με τον κατακόρυφο τοίχο. Μετά την ελαστική κρούση αποκτά ταχύτητα μέτρου $v_2 = 4\sqrt{2}\text{m/s}$, η διεύθυνση της οποίας είναι κάθετη με τη $\vec{v}_1$. Οι κινήσεις των σωμάτων Σ_1 , Σ_2 και του συσσωματώματος γίνονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Να υπολογίσετε:



- το μέτρο και την κατεύθυνση της ταχύτητας $\vec{v}_1$.
- το μέτρο της ταχύτητας $\vec{v}_2$.
- τη μεταβολή της ορμής του συσσωματώματος εξαιτίας της ελαστικής κρούσης με τον τοίχο.
- το μέτρο της μέσης δύναμης που ασκήθηκε στο συσσωμάτωμα κατά τη διάρκεια της κρούσης, αν η χρονική διάρκεια της κρούσης του συσσωματώματος με τον τοίχο είναι $\Delta t = 0,01\text{s}$.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$.

Λύση

- Θεωρούμε ένα σύστημα δύο ορθοκανονικών αξόνων: Τον $x'x$ παράλληλο στον τοίχο και τον $y'y$ κάθετο στον τοίχο. Αναλύουμε την ταχύτητα $\vec{v}_1$ σε δύο συνιστώσες και εφαρμόζουμε την

αρχή διατήρησης της ορμής για την πλαστική κρούση:

$$\vec{p}_{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{μετά}}$$

Όταν δύο διανύσματα είναι ίσα, είναι ίσες και οι συνιστώσες τους, επομένως η παραπάνω σχέση γράφεται αλγεβρικά για κάθε άξονα:

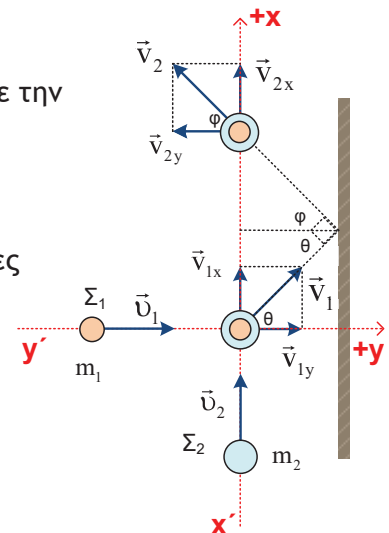
Στον άξονα $x'x$ επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα πάνω έχουμε:

$$p_x^{\text{πριν}} = p_x^{\text{μετά}} \Rightarrow 0 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_{1x} \Rightarrow v_{1x} = \frac{m_2 v_2}{(m_1 + m_2)} \Rightarrow$$

$$v_{1x} = \frac{2\text{kg} \cdot v_2}{(1\text{kg} + 2\text{kg})} \Rightarrow v_{1x} = \frac{2}{3} v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{3v_{1x}}{2} \quad (1)$$

Στον άξονα $y'y$ επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά έχουμε:

$$p_y^{\text{πριν}} = p_y^{\text{μετά}} \Rightarrow m_1 v_1 + 0 = (m_1 + m_2) v_{1y} \Rightarrow v_{1y} = \frac{m_1 v_1}{(m_1 + m_2)} \Rightarrow v_{1y} = \frac{1\text{kg} \cdot 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(1\text{kg} + 2\text{kg})} \Rightarrow v_{1y} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Επειδή η κρούση με τον τοίχο είναι ελαστική η κινητική ενέργεια του συστήματος διατηρείται.

$$K_{ολ}^{πριν} = K_{ολ}^{μετά} \Rightarrow K_1^{πριν} = K_1^{μετά} \Rightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_1^2 + 0 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_2^2 \Rightarrow v_1 = v_2 = 4\sqrt{2} \text{ m/s}$$

Κατά τη διάρκεια της κρούσης με τον τοίχο ασκείται στο σώμα μία οριζόντια δύναμη, κάθετη στον τοίχο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Ως εκ τούτου δεν υπάρχει δύναμη στον άξονα $x'x$ οπότε η ορμή διατηρείται. Αντίθετα στον άξονα $y'y$ υπάρχει η εξωτερική δύναμη $\vec{F}$ οπότε εκεί έχουμε μεταβολή της ορμής. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής του συσσωματώματος στον άξονα $x'x$ έχουμε:

$$\vec{p}_x^{πριν} = \vec{p}_x^{μετά}$$

Επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα πάνω, η παραπάνω σχέση γράφεται αλγεβρικά:

$$(m_1 + m_2)v_{1x} = (m_1 + m_2)v_{2x} \Rightarrow v_{1x} = v_{2x} \Rightarrow v_1 \eta \mu \theta = v_2 \eta \mu \varphi \Rightarrow \eta \mu \theta = \eta \mu \varphi \Rightarrow \theta = \varphi$$

$$\text{Όμως } \theta + \varphi = 90^\circ \Rightarrow 2\theta = 90^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

$$\text{Άρα } \varphi = \theta = 45^\circ$$

$$\text{β) Οπότε έχουμε: } v_{1x} = v_1 \eta \mu 45^\circ \Rightarrow v_{1x} = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{1x} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$(1) \Rightarrow v_2 = \frac{3v_{1x}}{2} \Rightarrow v_2 = \frac{3 \cdot 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} \Rightarrow v_2 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\gamma) \text{ Για τα μέτρα των ταχυτήτων ισχύει: } v_{2x} = v_2 \eta \mu 45^\circ \Rightarrow v_{2x} = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{2x} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

και

$$v_{2y} = v_2 \sigma \nu \eta 45^\circ \Rightarrow v_{2y} = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{2y} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ και}$$

$$v_{1y} = v_1 \sigma \nu \eta 45^\circ \Rightarrow v_{1y} = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{1y} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η μεταβολή της ορμής του συσσωματώματος εξαιτίας της ελαστικής κρούσης με τον τοίχο είναι:

$$\Delta \vec{p} = \Delta \vec{p}_x + \Delta \vec{p}_y$$

Για τον άξονα $x'x$ σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω ισχύει :

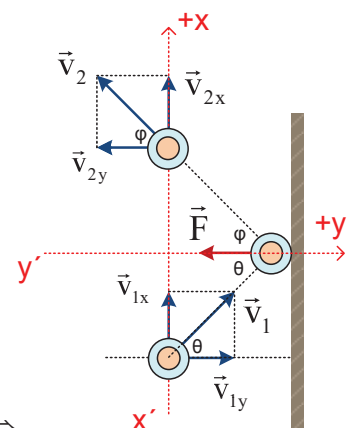
$$\Delta \vec{p}_x = \vec{p}_x^{μετά} - \vec{p}_x^{πριν} = 0$$

$$\text{Για τον άξονα } y'y: \Delta \vec{p}_y = \vec{p}_y^{μετά} - \vec{p}_y^{πριν}$$

Επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω σχέση γράφεται αλγεβρικά:

$$\Delta p_y = -(m_1 + m_2)v_{2y} - (m_1 + m_2)v_{1y} \Rightarrow \Delta p_y = -(m_1 + m_2)(v_{2y} + v_{1y}) \Rightarrow$$

$$\Delta p_y = -(1\text{kg} + 2\text{kg}) \cdot \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \longrightarrow \Delta p_y = -24 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$



Άρα η μεταβολή της ορμής του συσσωματώματος έχει μέτρο $\Delta p = 24 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$ με κατεύθυνση κάθετη στον τοίχο και φορά προς τα αριστερά.

δ) Εφαρμόζουμε τον 2^ο Νόμο του Newton για τον άξονα $y'y$ για όσο χρόνο το συσσωμάτωμα βρίσκεται σε επαφή με τον τοίχο:

$$\Sigma \vec{F}_y = \frac{\Delta \vec{p}_y}{\Delta t}$$

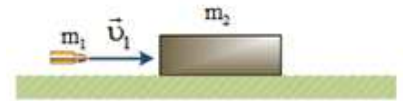
Επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω σχέση γράφεται αλγεβρικά:

$$F = \frac{\Delta p_y}{\Delta t} \Rightarrow F = \frac{-24 \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,01 \text{s}} \Rightarrow F = -2400 \text{N}$$

Άρα το μέτρο της δύναμης F είναι $F = 2400 \text{N}$

Άσκηση 3.

Ένα ξύλινο σώμα μάζας $m_2 = 0,96\text{kg}$ είναι ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ένα βλήμα μάζας $m_1 = 40\text{g}$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $u_1 = 200\text{m/s}$ και σφηνώνεται στο σώμα, σε βάθος $d = 7,68\text{cm}$. Να υπολογιστεί:



- το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος μετά την κρούση.
- το ποσοστό της μηχανικής ενέργειας που μετατρέπεται σε θερμότητα (να θεωρήσετε ότι όλη η απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος γίνεται θερμότητα και ότι το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας είναι το οριζόντιο επίπεδο).
- η μέση δύναμη που ασκεί η σφαίρα στο ξύλο καθώς εισχωρεί σε αυτό.
- η μετατόπιση του συστήματος ξύλο-βλήμα μέχρι να σφηνωθεί το βλήμα στο ξύλο.

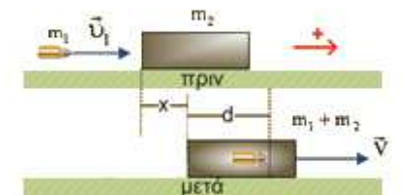
Λύση

α) Έστω $\vec{v}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος που δημιουργείται αμέσως μετά την κρούση. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των δύο σωμάτων:

$$\vec{P}_1^{\text{πριν}} + \vec{P}_2^{\text{πριν}} = \vec{P}_{\text{συσ}}^{\text{μετά}}$$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$m_1 u_1 + 0 = (m_1 + m_2) v \Rightarrow v = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2}$$



Με αντικατάσταση $m_1 = 40\text{g} = 0,04\text{kg}$, $m_2 = 0,96\text{kg}$ και $u_1 = 200\text{m/s}$, προκύπτει:

$$v = \frac{0,04\text{kg} \cdot 200 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(0,04 + 0,96)\text{kg}} \Rightarrow v = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \text{ Το μέτρο συμπίπτει με την αλγεβρική τιμή.}$$

β) Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος κατά τη κρούση είναι:

$$E_{\text{απ}} = E_{\text{μην}}^{\text{πριν}} - E_{\text{μην}}^{\text{μετά}} \Rightarrow E_{\text{απ}} = (K_{\text{ολ}}^{\text{πριν}} + U_{\text{ολ}}^{\text{πριν}}) - (K_{\text{ολ}}^{\text{μετά}} + U_{\text{ολ}}^{\text{μετά}}) \xrightarrow{U_{\text{ολ}}^{\text{πριν}} = U_{\text{ολ}}^{\text{μετά}} = 0} E_{\text{απ}} = K_{\text{ολ}}^{\text{πριν}} - K_{\text{ολ}}^{\text{μετά}}$$

Επειδή όλη η απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος γίνεται θερμότητα,

$$Q = E_{\text{απ}} = K_{\text{ολ}}^{\text{πριν}} - K_{\text{ολ}}^{\text{μετά}}$$

Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που μετατρέπεται σε θερμότητα κατά την κρούση

$$\text{είναι: } \frac{Q}{K_{\text{ολ}}^{\text{πριν}}} = \frac{K_{\text{ολ}}^{\text{πριν}} - K_{\text{ολ}}^{\text{μετά}}}{K_{\text{ολ}}^{\text{πριν}}} = 1 - \frac{K_{\text{ολ}}^{\text{μετά}}}{K_{\text{ολ}}^{\text{πριν}}} = 1 - \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2}{\frac{1}{2}m_1 u_1^2 + 0}$$

Με αντικατάσταση προκύπτει:

$$\frac{Q}{K_{ολ}^{πριν}} = 1 - \frac{\frac{1}{2}(0,04\text{kg} + 0,96\text{kg}) \cdot \left(8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{\frac{1}{2}0,04\text{kg} \cdot \left(200 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 1 - \frac{64}{0,04 \cdot 40000} = 1 - 0,04 = 0,96 \quad \text{ή} \quad 96\%$$

γ) Σε όλη τη διάρκεια της κρούσης το βλήμα ασκεί στο ξύλο μια μέση δύναμη $\vec{F}$ και το ξύλο μια αντίθετη δύναμη $\vec{F}'$ (3ος νόμος του Newton). Η δύναμη $\vec{F}$ μετακινεί το ξύλο κατά x . Το βλήμα μετατοπίζεται κατά $d+x$.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου-ενέργειας:

$$\text{Για το ξύλο: } K_2^{\text{μετά}} - K_2^{\text{πριν}} = W_F \Rightarrow \frac{1}{2}m_2v^2 - 0 = F \cdot x \quad (1)$$

$$\text{Και για το βλήμα: } K_1^{\text{μετά}} - K_1^{\text{πριν}} = W_{F'} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1v^2 - \frac{1}{2}m_1v_1^2 = -F' \cdot (d+x) \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2):

$$\frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}m_1v^2 - \frac{1}{2}m_1v_1^2 = F \cdot x - F' \cdot (d+x) \xrightarrow{F=F'} \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}m_1v^2 - \frac{1}{2}m_1v_1^2 = -F \cdot d \Rightarrow$$

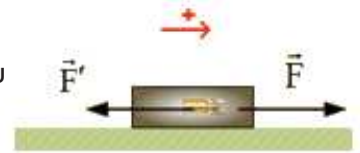
$$F = \frac{-m_2v^2 - m_1v^2 + m_1v_1^2}{2d}$$

Με αντικατάσταση προκύπτει:

$$F = \frac{-0,96 \cdot 8^2 - 0,04 \cdot 8^2 + 0,04 \cdot 200^2}{2 \cdot 0,0768} \text{ N} \Rightarrow F = \frac{1536}{0,1536} \text{ N} \Rightarrow F = 10^4 \text{ N}$$

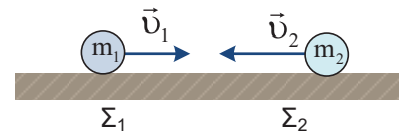
δ) Η μετατόπιση x του συστήματος ξύλο-βλήμα μέχρι να σφηνωθεί το βλήμα στο ξύλο θα βρεθεί από τη σχέση (1):

$$(1) \Rightarrow x = \frac{m_2v^2}{2F} \Rightarrow x = \frac{0,96\text{kg} \cdot \left(8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 10^4} \Rightarrow x \approx 0,003\text{m} \quad \text{ή} \quad x \approx 0,3\text{cm}$$



Άσκηση 4.

Δυο σφαίρες Σ_1 και Σ_2 , που έχουν μάζες $m_1 = 1\text{kg}$ και $m_2 = 2\text{kg}$ αντίστοιχα, κινούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο κατά μήκος της ίδιας ευθείας και πλησιάζουν η μια την άλλη με ταχύτητες μέτρων $v_1 = 6\text{m/s}$ και $v_2 = 9\text{m/s}$, αντίστοιχα.



Οι δυο σφαίρες συγκρούονται μετωπικά. Μετά τη κρούση η σφαίρα Σ_1 αλλάζει κατεύθυνση κινούμενη με ταχύτητα μέτρου $v'_1 = 14\text{m/s}$.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας v'_2 της σφαίρας Σ_2 μετά την κρούση.

β) Να εξετάσετε αν η κρούση είναι ελαστική.

γ) Να υπολογίσετε:

- 1) τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας κάθε σφαίρας κατά τη κρούση. Τι παρατηρείτε;
- 2) τη μεταβολή της ορμής κάθε σφαίρας κατά τη κρούση. Τι παρατηρείτε;

Λύση

α) Επιλέγουμε θετική φορά προς τα δεξιά. Έστω η v'_2 έχει φορά προς τα δεξιά.

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των δύο σωμάτων:

$$\vec{p}_{\text{ολ}}^{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{ολ}}^{\text{μετά}} \Rightarrow \vec{p}_1^{\text{πριν}} + \vec{p}_2^{\text{πριν}} = \vec{p}_1^{\text{μετά}} + \vec{p}_2^{\text{μετά}}$$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = -m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \Rightarrow v'_2 = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2 + m_1 v'_1}{m_2}$$

και με αντικατάσταση προκύπτει:

$$v'_2 = \frac{1\text{kg} \cdot 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 2\text{kg} \cdot 9 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 1\text{kg} \cdot 14 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2\text{kg}} \Rightarrow v'_2 = 1\text{m/s}$$

Επειδή η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας v'_2 είναι θετική ($v'_2 > 0$) συμπεραίνουμε ότι το Σ_2 μετά τη κρούση κινείται πράγματι προς τα δεξιά.

β) Υπολογίζουμε την κινητική ενέργεια κάθε σφαίρας πριν και μετά τη κρούση.

Σφαίρα Σ_1 πριν τη κρούση:

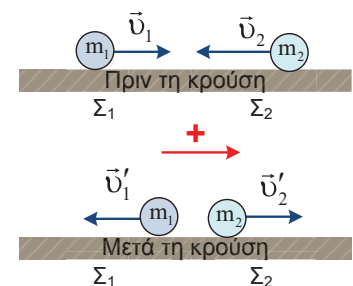
$$K_1^{\text{πριν}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Rightarrow K_1^{\text{πριν}} = \frac{1}{2} 1\text{kg} \cdot \left(6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \Rightarrow K_1^{\text{πριν}} = 18\text{J}$$

Σφαίρα Σ_2 πριν τη κρούση:

$$K_2^{\text{πριν}} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \Rightarrow K_2^{\text{πριν}} = \frac{1}{2} 2\text{kg} \cdot \left(9 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \Rightarrow K_2^{\text{πριν}} = 81\text{J}$$

Σφαίρα Σ_1 μετά τη κρούση:

$$K_1^{\text{μετά}} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 \Rightarrow K_1^{\text{μετά}} = \frac{1}{2} 1\text{kg} \cdot \left(14 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \Rightarrow K_1^{\text{μετά}} = 98\text{J}$$



Σφαίρα Σ_2 μετά τη κρούση:

$$K_2^{\text{μετά}} = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \Rightarrow K_2^{\text{μετά}} = \frac{1}{2} 2\text{kg} \cdot \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \Rightarrow K_2^{\text{μετά}} = 1\text{J}$$

Η ολική ενέργεια των δύο σφαιρών πριν τη κρούση είναι:

$$K_{\text{ολ}}^{\text{πριν}} = K_1^{\text{πριν}} + K_2^{\text{πριν}} \Rightarrow K_{\text{ολ}}^{\text{πριν}} = 18\text{J} + 81\text{J} \Rightarrow K_{\text{ολ}}^{\text{πριν}} = 99\text{J}$$

Η ολική ενέργεια των δύο σφαιρών μετά τη κρούση είναι:

$$K_{\text{ολ}}^{\text{μετά}} = K_1^{\text{μετά}} + K_2^{\text{μετά}} \Rightarrow K_{\text{ολ}}^{\text{μετά}} = 98\text{J} + 1\text{J} \Rightarrow K_{\text{ολ}}^{\text{μετά}} = 99\text{J}$$

Δηλαδή ισχύει $K_{\text{ολ}}^{\text{πριν}} = K_{\text{ολ}}^{\text{μετά}}$ οπότε η κρούση είναι ελαστική.

γ)

1) Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας της σφαίρας Σ_1 είναι:

$$\Delta K_1 = K_1^{\text{μετά}} - K_1^{\text{πριν}} \Rightarrow \Delta K_1 = 98\text{J} - 18\text{J} \Rightarrow \Delta K_1 = 80\text{J}$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας της σφαίρας Σ_2 είναι:

$$\Delta K_2 = K_2^{\text{μετά}} - K_2^{\text{πριν}} \Rightarrow \Delta K_2 = 1\text{J} - 81\text{J} \Rightarrow \Delta K_2 = -80\text{J}$$

Παρατηρούμε ότι κατά την κρούση η μείωση της ενέργειας της σφαίρας Σ_2 είναι ίση με την αύξηση της ενέργειας της σφαίρας Σ_1 . Στην περίπτωση αυτή, ένα μέρος της ενέργειας της πιο 'βαριάς' σφαίρας Σ_2 μεταφέρεται στην πιο 'ελαφριά' σφαίρα Σ_1 .

2) Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Σ_1 είναι:

$$\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_1^{\text{μετά}} - \vec{p}_1^{\text{πριν}}$$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$\Delta p_1 = -m_1 v_1' - m_1 v_1 \Rightarrow \Delta p_1 = -1\text{kg} \cdot 14 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 1\text{kg} \cdot 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_1 = -20 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Σ_2 είναι:

$$\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_2^{\text{μετά}} - \vec{p}_2^{\text{πριν}}$$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$\Delta p_2 = m_2 v_2' - m_2 \cdot (-v_2) \Rightarrow \Delta p_2 = 2\text{kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 2\text{kg} \cdot 9 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_2 = 20 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

Παρατηρούμε ότι οι μεταβολές της ορμής των δύο σφαιρών είναι αντίθετες. Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο αφού η ορμή του συστήματος των σωμάτων διατηρείται, άρα θα πρέπει:

$$\Delta \vec{p}_{\text{ολ}} = 0$$

Άσκηση 5.

Τρεις μικρές σφαίρες Σ_1 , Σ_2 και Σ_3 βρίσκονται ακίνητες πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο όπως στο σχήμα. Οι σφαίρες έχουν μάζες $m_1 = m$, $m_2 = m$ και $m_3 = 3m$ αντίστοιχα. Δίνουμε στη σφαίρα Σ_1 ταχύτητα μέτρου u_1 . Όλες οι κρούσεις που ακολουθούν ανάμεσα στις σφαίρες είναι κεντρικές και ελαστικές. Να βρεθούν:

α) ο αριθμός των κρούσεων που θα γίνουν συνολικά.

Αφού ολοκληρωθούν όλες οι κρούσεις των σφαιρών μεταξύ τους, να υπολογισθεί:

β) η τελική ταχύτητα κάθε σφαίρας.

γ) το μέτρο της μεταβολής της ορμής της πρώτης σφαίρας.

δ) το ποσοστό της κινητικής ενέργειας της σφαίρας Σ_1 που μεταφέρθηκε στη τρίτη σφαίρα Σ_3 .

Δίνονται: η μάζα $m_1 = 2\text{kg}$ και $u_1 = 10\text{m/s}$.



Λύση

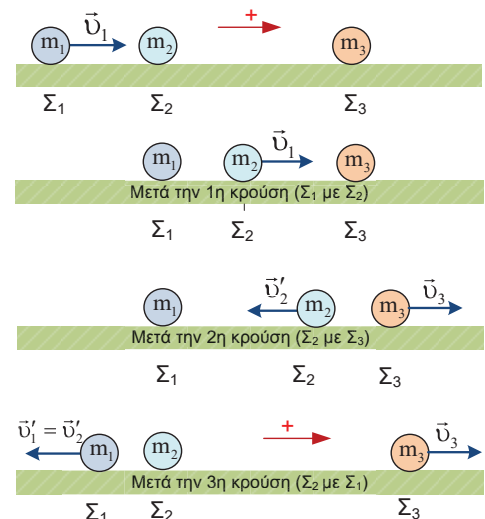
α) Αρχικά η σφαίρα Σ_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με τη δεύτερη σφαίρα Σ_2 που είναι ακίνητη (1^η κρούση).

Επειδή οι δύο σφαίρες έχουν ίσες μάζες ανταλλάσσουν ταχύτητες, άρα σφαίρα Σ_1 ακινητοποιείται και η Σ_2 αποκτά ταχύτητα ίση με $\vec{u}_1$.

Στη συνέχεια η δεύτερη σφαίρα Σ_2 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με τη τρίτη σφαίρα Σ_3 που είναι ακίνητη (2^η κρούση). Επειδή $m_2 < m_3$ η σφαίρα Σ_2 μετά τη κρούση θα κινηθεί προς τα αριστερά.

Έτσι τέλος η δεύτερη σφαίρα Σ_2 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με τη πρώτη σφαίρα Σ_1 που είναι ακίνητη (3^η κρούση).

Συνολικά λοιπόν γίνονται τρεις (3) κρούσεις.



β) Η δεύτερη κρούση είναι κεντρική και ελαστική, η σφαίρα Σ_2 έχει πριν τη κρούση ταχύτητα $\vec{u}_1$ και η Σ_3

είναι αρχικά ακίνητη. Έστω $\vec{u}'_2$ η ταχύτητα της σφαίρας Σ_2 και $\vec{u}_3$ η ταχύτητα της σφαίρας Σ_3 μετά τη δεύτερη κρούση. Ισχύει:

$$u_3 = \frac{2m_2}{m_2 + m_3} u_1 \xrightarrow{m_2=m, m_3=3m} u_3 = \frac{2m}{m+3m} u_1 \Rightarrow u_3 = \frac{2m}{4m} u_1 \Rightarrow u_3 = \frac{u_1}{2} \quad (1) \text{ (φορά προς τα δεξιά) και}$$

$$u'_2 = \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3} u_1 \xrightarrow{m_2=m, m_3=3m} u'_2 = \frac{m-3m}{m+3m} u_1 \Rightarrow u'_2 = \frac{-2m}{4m} u_1 \Rightarrow u'_2 = -\frac{u_1}{2} \quad (2) \text{ (φορά προς τα αριστερά).}$$

Στην τρίτη κρούση επειδή οι δύο σφαίρες έχουν ίσες μάζες ανταλλάσσουν ταχύτητες. Άρα η σφαίρα Σ_1 αποκτά ταχύτητα $\vec{v}'_1 = \vec{v}'_2$, άρα έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά και μέτρο (από σχέση 2) $v'_1 = v'_2 = \frac{v_1}{2}$ (3) και η σφαίρα Σ_2 ακινητοποιείται.

Με αντικατάσταση στις παραπάνω σχέσεις του μέτρου της ταχύτητας $v_1=10\text{m/s}$ προκύπτει η τελική ταχύτητα της κάθε σφαίρας:

$$\text{Σφαίρα } \Sigma_1: (3) \Rightarrow v'_1 = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} \Rightarrow v'_1 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ με φορά προς τα αριστερά.}$$

Σφαίρα Σ_2 : Έχει ταχύτητα μηδέν.

$$\text{Σφαίρα } \Sigma_3: (1) \Rightarrow v_3 = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} \Rightarrow v_3 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ με φορά προς τα δεξιά.}$$

γ) Η μεταβολή της ορμής της πρώτης σφαίρας Σ_1 είναι:

$$\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_1^{\text{μετά}} - \vec{p}_1^{\text{πριν}}$$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$\Delta p_1 = -m_1 v'_1 - m_1 v_1 \xrightarrow{(3)} \Delta p_1 = -m_1 \frac{v_1}{2} - m_1 v_1 \Rightarrow \Delta p_1 = -\frac{3m_1 v_1}{2}$$

Με αντικατάσταση προκύπτει:

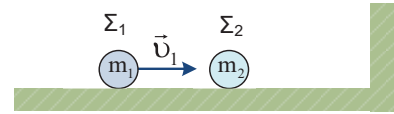
$$\Delta p_1 = -\frac{3 \cdot 2\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} \Rightarrow \Delta p_1 = -30 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

δ) Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας της σφαίρας Σ_1 που μεταφέρθηκε στη τρίτη σφαίρα Σ_3 είναι:

$$\frac{K_3^{\text{μετά}}}{K_1^{\text{πριν}}} = \frac{\frac{1}{2} m_3 v_3^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \xrightarrow[\substack{m_3=3m \\ m_1=m}]{\substack{m_3=3m \\ m_1=m}} \frac{K_3^{\text{μετά}}}{K_1^{\text{πριν}}} = \frac{\frac{1}{2} 3m v_3^2}{\frac{1}{2} m v_1^2} = \frac{3v_3^2}{v_1^2} = \frac{3 \left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2} = \frac{75}{100} = 75\%$$

Άσκηση 6.

Μια σφαίρα Σ_1 μάζας m_1 κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $\vec{v}_1$ και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Σ_2 μάζας m_2 ($m_2 > m_1$). Μετά την κρούση η σφαίρα Σ_2 συγκρούεται ελαστικά με κατακόρυφο επίπεδο τοίχο, που είναι κάθετος στη διεύθυνση της κίνησης των δυο σφαιρών.



α) Αν ο λόγος των μαζών των δυο σφαιρών είναι $\lambda = \frac{m_2}{m_1}$ να

εκφράσετε τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 σε συνάρτηση με το λ και το μέτρο της ταχύτητας $\vec{v}_1$.

Να βρεθεί:

β) για ποιες τιμές του λ η σφαίρα Σ_1 μετά την κρούση της με τη σφαίρα Σ_2 κινείται προς τα αριστερά.

γ) για ποια τιμή του λ , η σφαίρα Σ_2 , μετά την κρούση της με τον τοίχο θα διατηρεί σταθερή απόσταση από την σφαίρα Σ_1 .

Με βάση την παραπάνω τιμή του λ , να υπολογισθεί:

δ) ο λόγος της τελικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας Σ_2 , που έχει μετά την κρούση της με τον τοίχο, προς την αρχική κινητική ενέργεια της σφαίρας Σ_1 .

Λύση

α) Η κρούση των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 είναι κεντρική και ελαστική, η σφαίρα Σ_1 έχει ταχύτητα $\vec{v}_1$ και η σφαίρα Σ_2 είναι αρχικά ακίνητη. Άρα η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας v'_1 της σφαίρας Σ_1 μετά την κρούση δίνεται από τον τύπο:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (1)$$

και η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας v'_2 της σφαίρας Σ_2

μετά την κρούση δίνεται από τον τύπο: $v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$

(2)

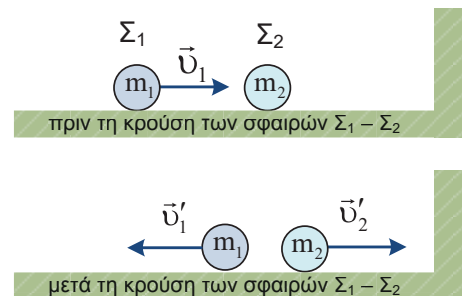
Λύνουμε τη σχέση $\lambda = \frac{m_2}{m_1}$ ως προς m_2 : $m_2 = \lambda \cdot m_1$ (3)

Από τις σχέσεις (1), (3) προκύπτει: $v'_1 = \frac{m_1 - \lambda m_1}{m_1 + \lambda m_1} v_1 \Rightarrow v'_1 = \frac{m_1(1 - \lambda)}{m_1(1 + \lambda)} v_1 \Rightarrow v'_1 = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} v_1$

(4)

Από τις σχέσεις (2), (3) προκύπτει:

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + \lambda m_1} v_1 \Rightarrow v'_2 = \frac{2m_1}{m_1(1 + \lambda)} v_1 \Rightarrow v'_2 = \frac{2}{1 + \lambda} v_1 \quad (5)$$



β) Για να κινείται η σφαίρα Σ_1 προς τα αριστερά πρέπει η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας της $\vec{v}'_1$ (σχέση 4), που αποκτά μετά την κρούση της με τη σφαίρα Σ_2 , να είναι αρνητική, οπότε προκύπτει ότι:

$$(4) \Rightarrow v'_1 = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} v_1 < 0 \Rightarrow 1-\lambda < 0 \Rightarrow \lambda > 1$$

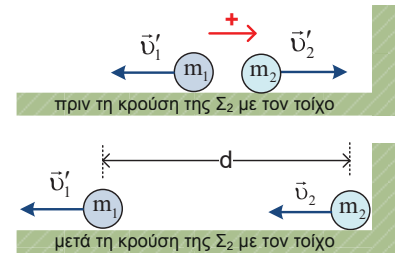
γ) Το μέτρο της ταχύτητας $\vec{v}'_1$ είναι: $|v'_1| = \left| \frac{1-\lambda}{1+\lambda} v_1 \right| \Rightarrow |v'_1| = \frac{\lambda-1}{1+\lambda} v_1$ (6)

Η σφαίρα Σ_2 χτυπά στον τοίχο ελαστικά, άρα ανακλάται με ταχύτητα $\vec{v}_2$ ίσου μέτρου με την ταχύτητα $\vec{v}'_2$ και αντίθετης

φοράς, $|v_2| = v'_2 \xrightarrow{(5)} |v_2| = \frac{2}{1+\lambda} v_1$ (7)

Για να παραμένει σταθερή η απόσταση των δύο σφαιρών μετά τη κρούση της σφαίρας Σ_2 με τον τοίχο, πρέπει τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σφαιρών να είναι ίσα, δηλαδή:

$$|v_2| = |v'_1| \xrightarrow{(6)} \xrightarrow{(7)} \frac{2}{1+\lambda} v_1 = \frac{\lambda-1}{1+\lambda} v_1 \Rightarrow 2 = \lambda - 1 \Rightarrow \lambda = 3$$



δ) Ισχύει: $\lambda = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow 3 = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow m_2 = 3m_1$

Από τη σχέση (7) με αντικατάσταση του $\lambda=3$, προκύπτει:

$$|v_2| = \frac{2}{1+\lambda} v_1 \Rightarrow |v_2| = \frac{2}{1+3} v_1 \Rightarrow |v_2| = \frac{v_1}{2}$$

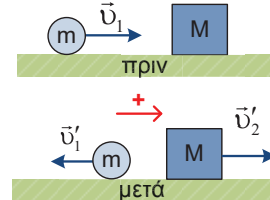
Ο λόγος της τελικής κινητικής ενέργειας K_2 της σφαίρας Σ_2 , που έχει μετά την κρούση της με τον τοίχο, προς την αρχική κινητική ενέργεια K_1 της σφαίρας Σ_1 είναι:

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \xrightarrow{(7)} \frac{K_2}{K_1} = \frac{3m_1 \left(\frac{v_1}{2} \right)^2}{m_1 v_1^2} = \frac{3 \frac{v_1^2}{4}}{v_1^2} = 0,75$$

Άσκηση 7.

Σώμα μάζας $M = 2\text{kg}$ ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,2$. Μια μικρή μπάλα μάζας $m = 100\text{g}$ κινούμενη οριζόντια προς τα δεξιά, με ταχύτητα μέτρου $v_1 = 100\text{m/s}$, συγκρούεται με το σώμα και επιστρέφει με ταχύτητα μέτρου $v'_1 = 20\text{m/s}$. Να υπολογιστεί:

- το μέτρο της ταχύτητας v'_2 του σώματος M αμέσως μετά την κρούση.
- η απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων κατά την κρούση. Σε ποιες μορφές ενέργειας μετατράπηκε;
- η μετατόπιση του σώματος μάζας M μέχρι να σταματήσει εξαιτίας της τριβής του με το επίπεδο.
- ο λόγος $\lambda = \frac{M}{m}$ των μαζών των δύο σωμάτων, αν η κρούση ήταν ελαστική.



Δίνεται: $g = 10\text{m/s}^2$

Λύση

α) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των δύο σωμάτων:

$$\vec{p}_{\text{ολ}}^{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{ολ}}^{\text{μετά}} \Rightarrow \vec{p}_1^{\text{πριν}} + \vec{p}_2^{\text{πριν}} = \vec{p}_1^{\text{μετά}} + \vec{p}_2^{\text{μετά}}$$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$mv_1 + 0 = -mv'_1 + Mv'_2 \Rightarrow v'_2 = \frac{mv_1 + mv'_1}{M} \Rightarrow v'_2 = \frac{m(v_1 + v'_1)}{M}$$

και με αντικατάσταση προκύπτει:

$$v'_2 = \frac{0,1\text{kg} \cdot (100 + 20) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2\text{kg}} \Rightarrow v'_2 = 6\text{m/s}$$

$$\text{β) } K_{\text{ολ}}^{\text{πριν}} = \frac{1}{2}mv_1^2 + 0 \Rightarrow K_{\text{ολ}}^{\text{πριν}} = \frac{1}{2}0,1\text{kg} \cdot \left(100 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \Rightarrow K_{\text{ολ}}^{\text{πριν}} = 500\text{J}$$

$$K_{\text{ολ}}^{\text{μετά}} = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}Mv_2'^2 \Rightarrow K_{\text{ολ}}^{\text{μετά}} = \frac{1}{2}0,1\text{kg} \cdot \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \frac{1}{2}2\text{kg} \cdot \left(6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \Rightarrow K_{\text{ολ}}^{\text{μετά}} = 20\text{J} + 36\text{J} \Rightarrow K_{\text{ολ}}^{\text{μετά}} = 56\text{J}$$

Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων κατά την κρούση είναι:

$$E_{\text{απωλ}} = E_{\text{μηχ}}^{\text{πριν}} - E_{\text{μηχ}}^{\text{μετά}} \Rightarrow E_{\text{απωλ}} = (K_{\text{ολ}}^{\text{πριν}} + U_{\text{ολ}}^{\text{πριν}}) - (K_{\text{ολ}}^{\text{μετά}} + U_{\text{ολ}}^{\text{μετά}})$$

Επειδή η κρούση των σωμάτων γίνεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο ισχύει: $U_{\text{ολ}}^{\text{πριν}} = U_{\text{ολ}}^{\text{μετά}}$
 άρα

$$E_{\text{απωλ}} = K_{\text{ολ}}^{\text{πριν}} - K_{\text{ολ}}^{\text{μετά}} \Rightarrow E_{\text{απωλ}} = 500\text{J} - 56\text{J} \Rightarrow E_{\text{απωλ}} = 444\text{J}$$

Κατά την κρούση ένα μέρος της μηχανικής ενέργειας του συστήματος μετατράπηκε (υποβαθμίστηκε) σε θερμότητα και (πιθανόν) σε μόνιμη ενέργεια παραμόρφωσης των δύο σωμάτων.

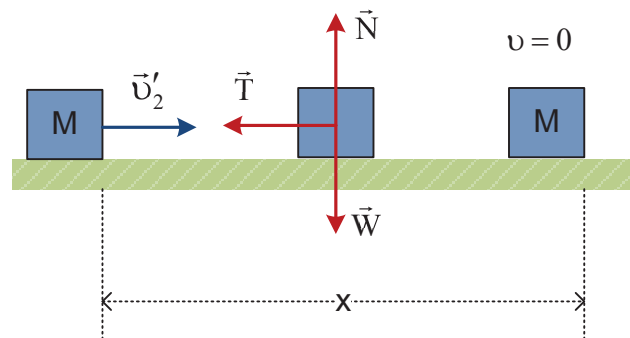
γ) Στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις: τριβή T , βάρος W και η κάθετη αντίδραση από το επίπεδο N .

Το σώμα στον άξονα $y'y$ είναι ακίνητο, άρα

$$\Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow N - W = 0 \Rightarrow N = W \Rightarrow N = Mg$$

Η τριβή έχει μέτρο: $T = \mu N \Rightarrow T = \mu Mg$

Η τριβή παράγει έργο: $W_T = -T \cdot x$



Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας για τη διαδρομή του σώματος M μέχρι να σταματήσει:

$$\Delta K = W_{ολ} \Rightarrow K_{\tau} - K_{\alpha} = W_T \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} M v_2'^2 = -T \cdot x \Rightarrow x = \frac{M v_2'^2}{2T} \Rightarrow x = \frac{v_2'^2}{2\mu g}$$

$$\text{Με αντικατάσταση προκύπτει: } x = \frac{\left(6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 0,2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow x = 9\text{m}$$

δ) Είναι $\lambda = \frac{M}{m} \Rightarrow M = \lambda m$.

Επειδή η κρούση είναι ελαστική η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας v_1' της μπάλας μετά την κρούση δίνεται από τον τύπο:

$$v_1' = \frac{m - M}{m + M} v_1 \xrightarrow{M = \lambda m} v_1' = \frac{m - \lambda m}{m + \lambda m} v_1 \Rightarrow \frac{v_1'}{v_1} = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}$$

Με αντικατάσταση $v_1 = 100\text{m/s}$ και $v_1' = -20\text{m/s}$ (επειδή έχει φορά προς τα αριστερά), προκύπτει:

$$\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} = \frac{-20 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{100 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \Rightarrow \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} = -\frac{1}{5} \Rightarrow -1 - \lambda = 5 - 5\lambda \Rightarrow 4\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}$$

Άσκηση 8.

Δύο τελείως ελαστικές σφαίρες με μάζες $m_1 = m = 1\text{kg}$ και $m_2 = 3m = 3\text{kg}$ αντίστοιχα, κινούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και πλησιάζουν η μία την άλλη με ταχύτητες μέτρου $v_1 = v_2 = v_0 = 10\text{m/s}$. Να βρείτε:

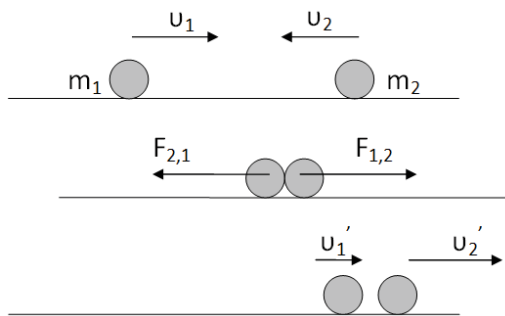
α) Τις ταχύτητές των μαζών μετά την κρούση.

β) Τη μεταβολή της ορμής της m_2 .

γ) Το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας m_2 .

δ) Τη μέση δύναμη που ασκήθηκε στη σφαίρα m_1 κατά την κρούση αν αυτή διαρκεί χρόνο $\Delta t = 0,02\text{s}$.

Λύση



α) Σε κάθε κρούση ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής.

$$\vec{p}_{ολ} (\text{πριν}) = \vec{p}_{ολ} (\text{μετά}) \Rightarrow$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

Επιλέγοντας θετική φορά προς τα δεξιά, η παραπάνω σχέση γράφεται αλγεβρικά:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \Rightarrow$$

$$m v_0 - 3m v_0 = m v_1' + 3m v_2' \Rightarrow$$

$$-2v_0 = v_1' + 3v_2' \Rightarrow$$

$$v_1' = -3v_2' - 2v_0 \quad (1)$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή. Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Κινητικής Ενέργειας.

$$K_{ολ} (\text{πριν}) = K_{ολ} (\text{μετά}) \Rightarrow$$

$$K_1 + K_2 = K_1' + K_2' \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \Rightarrow$$

$$m v_0^2 + 3m v_0^2 = m v_1'^2 + 3m v_2'^2 \Rightarrow$$

$$4v_0^2 = v_1'^2 + 3v_2'^2 \quad (2)$$

$$(2) \xrightarrow{(1)} 4v_0^2 = (-3v_2' - 2v_0)^2 + 3v_2'^2 \Rightarrow$$

$$4v_0^2 = 9v_2'^2 + 4v_0^2 + 12v_0v_2' + 3v_2'^2 \Rightarrow$$

$$12v_2'^2 + 12v_0v_2' = 0 \Rightarrow$$

$$12v_2'(v_2' + v_0) = 0$$

Προκύπτει:

$$v_2' = -v_0,$$

η οποία απορρίπτεται γιατί είναι η αρχική ταχύτητα του m_2 , και

$$v_2' = 0$$

που είναι αποδεκτή.

Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή της v_2' στη σχέση (1) προκύπτει:

$$v_1' = -2v_0 = -20 \text{ m/s}.$$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι μετά την κρούση η σφαίρα m_1 θα έχει ταχύτητα αντίθετης φοράς από αυτή που φαίνεται στο σχήμα (δηλαδή προς τα αριστερά).

$$\text{β) } \Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_2(\text{μετά}) - \vec{p}_2(\text{πριν})$$

Επιλέγοντας θετική φορά προς τα αριστερά, η παραπάνω σχέση γράφεται αλγεβρικά:

$$\Delta p_2 = m_2 v_2' - m_2 v_2 = (0 - 3 \cdot 10) \text{ kg} \cdot \text{m/s} \Rightarrow$$

$$\Delta p_2 = -30 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$\text{γ) } K_2(\text{πριν}) = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} 3 m v_0^2, \quad K_2(\text{μετά}) = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = 0$$

$$\Delta K_2 = K_2(\text{μετά}) - K_2(\text{πριν}) = -\frac{1}{2} 3 m v_0^2$$

Στα $K_2(\text{αρχ})$ η μεταβολή της κινητικής του ενέργειας είναι ΔK_2

Στα 100%

$\alpha_2\% =$;

$$\alpha_2 \% = \frac{\Delta K_2}{K_2(\alpha\rho\chi)} \cdot 100\% = \frac{-\frac{1}{2}3mv_0^2}{\frac{1}{2}3mv_0^2} \cdot 100\% \Rightarrow \alpha_2 \% = -100\%$$

δ)

$$\Sigma \vec{F}_1 = \frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} \Rightarrow \vec{F}_{2,1} = \frac{\vec{p}_1(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}) - \vec{p}_1(\pi\rho\iota\nu)}{\Delta t}$$

Επιλέγοντας θετική φορά προς τα δεξιά, η παραπάνω σχέση γράφεται αλγεβρικά:

$$-F_{2,1} = \frac{m_1 v_1' - m_1 v_1}{\Delta t} = \frac{-m2v_0 - mv_0}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$F_{2,1} = \frac{3mv_0}{\Delta t} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 10}{0,02} \text{ N} = 1500 \text{ N}$$

Άσκηση 9.

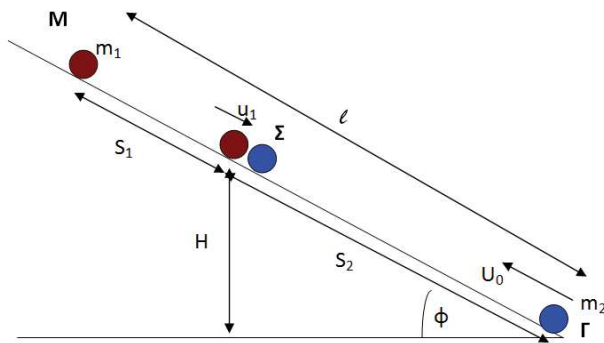
Σώμα Α μάζας $m_1 = 2\text{ kg}$ αφήνεται να γλιστρήσει από απόσταση $\ell = 20\text{ m}$ από την κορυφή λείου κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\varphi = 30^\circ$. Ταυτόχρονα δεύτερο σώμα Β μάζας $m_2 = m_1$ βάλλεται με αρχική ταχύτητα $u_0 = 10\text{ m/s}$ από τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου. Τα σώματα συγκρούονται κεντρικά και πλαστικά.

Να υπολογίσετε:

- τις ταχύτητες των σωμάτων λίγο πριν την κρούση.
- την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.
- το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σώματος Α κατά τη διάρκεια της κρούσης.
- την ταχύτητα με την οποία το συσσωμάτωμα θα επανέλθει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας: $g = 10\text{ m/s}^2$.

Λύση



α) Φαινόμενο 1^ο: Κίνηση του σώματος m_1 από το (Μ) προς το (Σ).

$$\Sigma F_1 = m_1 \alpha_1 \Rightarrow m_1 g_x = m_1 \alpha_1 \Rightarrow m_1 g \eta \mu \varphi = m_1 \alpha_1 \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = g \eta \mu \varphi = 10 \frac{1}{2} \text{ m/s}^2 \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = 5 \text{ m/s}^2 \quad (1)$$

$$v_1 = \alpha_1 t \quad (2)$$

$$s_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 t^2 \quad (3)$$

Φαινόμενο 2^ο: Κίνηση του σώματος m_2 από το (Γ) προς το (Σ).

$$\Sigma F_2 = m_2 \alpha_2 \Rightarrow m_2 g_x = m_2 \alpha_2 \Rightarrow m_2 g \eta \mu \varphi = m_2 \alpha_2 \Rightarrow$$

$$\alpha_2 = g \eta \mu \varphi = 10 \frac{1}{2} \text{ m/s}^2 \Rightarrow$$

$$\alpha_2 = 5 \text{ m/s}^2 \quad (4)$$

$$v_2 = v_0 - \alpha_2 t \quad (5)$$

$$s_2 = v_0 t - \frac{1}{2} \alpha_2 t^2 \quad (6)$$

Από το σχήμα προκύπτει ότι τη στιγμή της συνάντησης θα ισχύει:

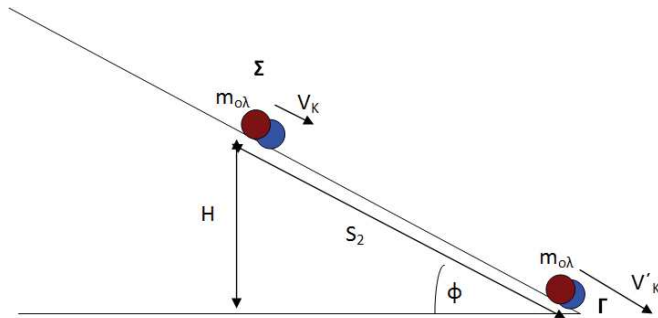
$$\ell = s_1 + s_2 \xrightarrow{(3),(6)} \ell = \frac{1}{2} \alpha_1 t^2 + v_0 t - \frac{1}{2} \alpha_2 t^2 \Rightarrow \ell = v_0 t \Rightarrow t = \frac{\ell}{v_0} = \frac{20}{10} \text{ s} \Rightarrow t = 2 \text{ s} \quad (7)$$

$$(2): v_1 = \alpha_1 t = 5 \cdot 2 \text{ m/s} \Rightarrow v_1 = 10 \text{ m/s}$$

$$(5): v_2 = v_0 - \alpha_2 t = (10 - 5 \cdot 2) \text{ m/s} \Rightarrow v_2 = 0 \text{ m/s}$$

β) Φαινόμενο 3^ο: Πλαστική κρούση $m - M$.

Σε κάθε κρούση ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής:



Την εφαρμόζουμε για τις χρονικές στιγμές: λίγο πριν την κρούση και λίγο μετά.

$$\vec{p}_{ολ} (\text{πριν}) = \vec{p}_{ολ} (\text{μετά})$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \Rightarrow$$

Επιλέγοντας θετική φορά προς τα κάτω, η παραπάνω σχέση γράφεται αλγεβρικά:

$$m_1 v_1 + 0 = (m_1 + m_2) V_K \Rightarrow$$

$$V_K = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{m 10}{2m} \text{ m/s} \Rightarrow V_K = 5 \text{ m/s}$$

γ) Το μέτρο της ορμής της μάζας m_1 πριν την κρούση είναι:

$$p_1 = m_1 v_1 = 2 \cdot 10 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \Rightarrow p_1 = 20 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Το μέτρο της ορμής της μάζας m_1 μετά την κρούση είναι:

$$p'_1 = m_1 V_K = 2 \cdot 5 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \Rightarrow p'_1 = 10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του m_1 κατά την κρούση είναι:

$$|\Delta \vec{p}_1| = |\vec{p}'_1 - \vec{p}_1| = p'_1 - (-p_1) = (10 + 20) \text{ kg} \cdot \text{m/s} \Rightarrow |\Delta \vec{p}_1| = 30 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

δ) Φαινόμενο 4^ο: Κίνηση του συσσωματώματος (Σ) $\rightarrow$ (Γ).

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε.:

$$K_\Gamma - K_\Sigma = W_{B_2} + W_N \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_K'^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_K^2 = (m_1 + m_2)gH + 0 \xrightarrow{H=s_2\eta\mu\phi} \rightarrow$$

$$V_K'^2 = V_K^2 + 2gs_2\eta\mu\phi \Rightarrow$$

$$V_K' = \sqrt{V_K^2 + 2gs_2\eta\mu\phi} \quad (8)$$

$$(6) \xrightarrow{(7)} s_2 = \left(10 \cdot 2 - \frac{1}{2}5 \cdot 2^2\right) \text{ m} \Rightarrow s_2 = 10 \text{ m} \quad (9)$$

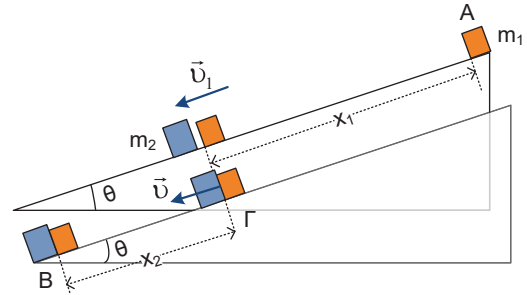
$$(8) \xrightarrow{(9)} V_K' = \sqrt{25 + 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}} \text{ m/s} \Rightarrow$$

$$V_K' = 5\sqrt{5} \text{ m/s}$$

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Από την κορυφή (Α) ενός κεκλιμένου επιπέδου μεγάλου μήκους και γωνίας κλίσης θ αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί ένα σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1\text{kg}$ το οποίο εμφανίζει με το κεκλιμένο επίπεδο συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,5$. Αφού διανύσει διάστημα $ΑΓ = x_1 = 4\text{m}$ κινούμενο στο κεκλιμένο επίπεδο, συναντά ακίνητο σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 3\text{kg}$, με το οποίο συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά (σημείο Γ). Το συσσωμάτωμα που δημιουργείται από την κρούση των δύο σωμάτων διανύει διάστημα $x_2 = 2\text{m}$ και φτάνει στη βάση (Β) του κεκλιμένου επιπέδου. Να υπολογίσετε:



- την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.
 - τη συνολική θερμότητα λόγω τριβών που παράχθηκε από τη στιγμή που αφήσαμε ελεύθερο το σώμα μάζας m_1 μέχρι τη στιγμή που το συσσωμάτωμα έφτασε στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.
 - την απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος των δύο μαζών κατά την κρούση.
 - το ποσοστό της αρχικής δυναμικής ενέργειας των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 που έγινε θερμότητα μέχρι το συσσωμάτωμα να φτάσει στη βάση (Β) του κεκλιμένου επιπέδου.
- Να θεωρηθεί:

- Το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας ταυτίζεται με το οριζόντιο επίπεδο που περνά από τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.
- Όλη η απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος κατά τη κρούση γίνεται θερμότητα.
- Το έργο που καταναλώνει η τριβή μετατρέπεται σε θερμότητα.
- Τα σώματα έχουν αμελητέες διαστάσεις.
- Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης πριν και μετά την κρούση παραμένει ίδιος.

Δίνονται: $\eta\mu\theta = 0,6$, $\sigma\upsilon\nu\theta = 0,8$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$.

Λύση

α) Στην κίνηση του σώματος Σ_1 από τη κορυφή Α ως το σημείο Γ ασκούνται πάνω του οι δυνάμεις: τριβή T_1 , βάρος W_1 και η κάθετη αντίδραση από το επίπεδο N_1 . Θεωρούμε ένα σύστημα δύο ορθοκανονικών αξόνων. Τον $x'x$ παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο και τον $y'y$ κάθετο στο κεκλιμένο επίπεδο. Αναλύουμε το βάρος σε δύο συνιστώσες:

$$\begin{cases} W_{1y} = m_1 g \cdot \sin \theta \\ W_{1x} = m_1 g \cdot \eta \mu \theta \end{cases}$$

Το σώμα στον άξονα $y'y$ είναι ακίνητο, άρα

$$\Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow N_1 - W_{1y} = 0 \Rightarrow$$

$$N_1 = W_{1y} \Rightarrow N_1 = m_1 g \cdot \sin \theta$$

Η τριβή έχει μέτρο:

$$T_1 = \mu N_1 \Rightarrow T_1 = \mu m_1 g \cdot \sin \theta$$

Κατά τη μετατόπιση του σώματος από το Α στο Γ:

$$\text{το έργο της τριβής είναι } W_{T_1} = -T_1 \cdot x_1 \Rightarrow W_{T_1} = -\mu m_1 g \cdot \sin \theta \cdot x_1 \quad (1)$$

$$\text{και το έργο του βάρους είναι } W_{W_1} = W_{1x} \cdot x_1 \Rightarrow W_{W_1} = m_1 g \cdot \eta \mu \theta \cdot x_1$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας για τη διαδρομή του σώματος Σ_1 από το σημείο Α στο Γ:

$$\Delta K = W_{\text{ολ}} \Rightarrow K_{\tau} - K_{\alpha} = W_{W_1} + W_{T_1} + W_{N_1} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = m_1 g \cdot \eta \mu \theta \cdot x_1 - \mu m_1 g \cdot \sin \theta \cdot x_1 + 0 \Rightarrow$$

$$v_1^2 = 2g \cdot \eta \mu \theta \cdot x_1 - 2\mu g \cdot \sin \theta \cdot x_1 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gx_1(\eta \mu \theta - \mu \cdot \sin \theta)}$$

Με αντικατάσταση προκύπτει:

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4\text{m} \cdot (0,6 - 0,5 \cdot 0,8)} \Rightarrow v_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Έστω $\vec{v}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος που δημιουργείται αμέσως μετά τη κρούση. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των δύο σωμάτων:

$$\vec{p}_1^{\text{πριν}} + \vec{p}_2^{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{συσ}}^{\text{μετά}}$$

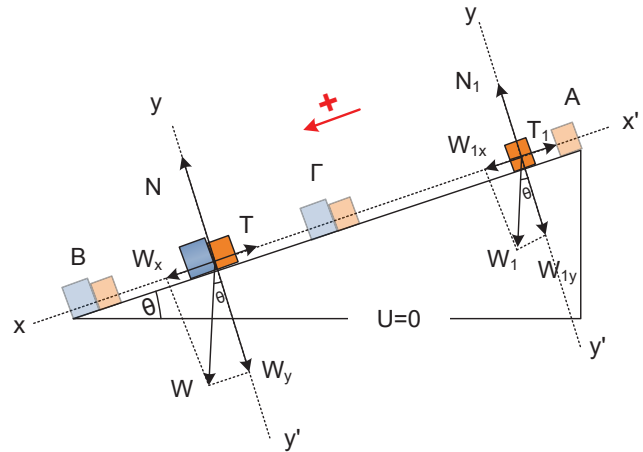
Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα κάτω (όπως φαίνεται στο σχήμα), η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$m_1 v_1 + 0 = (m_1 + m_2) v \Rightarrow v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Με αντικατάσταση $m_1=1\text{kg}$, $m_2=3\text{kg}$ και $v_1=4\text{m/s}$, προκύπτει:

$$v = \frac{1\text{kg} \cdot 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(1+3)\text{kg}} \Rightarrow v = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Στην κίνηση του συσσωματώματος από το σημείο Γ στη βάση Β του κεκλιμένου επιπέδου, ασκούνται πάνω του οι δυνάμεις: τριβή T , βάρος W και η κάθετη αντίδραση από το επίπεδο N .



Αναλύουμε το βάρος του συσσωματώματος σε δύο συνιστώσες:

$$\begin{cases} W_y = (m_1 + m_2)g \cdot \sin\theta \\ W_x = (m_1 + m_2)g \cdot \eta\mu\theta \end{cases}$$

Το σώμα στον άξονα γ'γ είναι ακίνητο, άρα

$$\Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow N - W_y = 0 \Rightarrow N = W_y \Rightarrow N = (m_1 + m_2)g \cdot \sin\theta$$

Η τριβή έχει μέτρο:

$$T = \mu N \Rightarrow T = \mu(m_1 + m_2)g \cdot \sin\theta$$

Για τη μετατόπιση του σώματος από το σημείο Γ στη βάση Β το έργο της τριβής είναι:

$$W_T = -T \cdot x_2 \Rightarrow W_T = -\mu(m_1 + m_2)g \cdot \sin\theta \cdot x_2$$

Με αντικατάσταση προκύπτει:

$$W_T = -0,5(1\text{kg} + 3\text{kg})10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,8 \cdot 2\text{m} \Rightarrow W_T = -32\text{J}$$

Από τη σχέση (1) με αντικατάσταση υπολογίζουμε το έργο της τριβής για την κίνηση του Σ₁ από τη κορυφή Α ως το σημείο Γ:

$$W_{T_1} = -\mu m_1 g \cdot \sin\theta \cdot x_1 = -0,5 \cdot 1\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,8 \cdot 4\text{m} \Rightarrow W_{T_1} = -16\text{J}$$

Το έργο που καταναλώνει η τριβή μετατρέπεται σε θερμότητα, άρα:

$$Q_{\text{τριβ}} = |W_T| + |W_{T_1}| \Rightarrow Q_{\text{τριβ}} = 32\text{J} + 16\text{J} \Rightarrow Q_{\text{τριβ}} = 48\text{J}$$

γ) Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος κατά την πλαστική κρούση είναι:

$$E_{\alpha\pi} = E_{\mu\eta\chi}^{\text{πριν}} - E_{\mu\eta\chi}^{\text{μετά}} \Rightarrow E_{\alpha\pi} = (K_{\text{πριν}}^{\text{ολ}} + U_{\text{πριν}}^{\text{ολ}}) - (K_{\text{μετά}}^{\text{ολ}} + U_{\text{μετά}}^{\text{ολ}}) \xrightarrow{U_{\text{πριν}}^{\text{ολ}} = U_{\text{μετά}}^{\text{ολ}}} E_{\alpha\pi} = K_{\text{πριν}}^{\text{ολ}} - K_{\text{μετά}}^{\text{ολ}} \Rightarrow$$

$$E_{\alpha\pi} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 \Rightarrow E_{\alpha\pi} = \frac{1}{2} 1\text{kg} \cdot \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \frac{1}{2} (1\text{kg} + 3\text{kg}) \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$E_{\alpha\pi} = 8\text{J} - 2\text{J} \Rightarrow E_{\alpha\pi} = 6\text{J}$$

Σχόλιο: Θεωρούμε ότι η διάρκεια της πλαστικής κρούσης είναι πάρα πολύ μικρή έτσι ώστε η μετατόπιση των σωμάτων να είναι αμελητέα. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η δυναμική ενέργεια λόγω βάρους πριν και μετά τη κρούση είναι η ίδια.

δ) Όλη η απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος κατά την πλαστική κρούση γίνεται θερμότητα, δηλαδή $Q_{\text{κρούσης}} = E_{\alpha\pi} = 6\text{J}$

Το συνολικό ποσό της θερμότητας είναι:

$$Q_{\text{ολ}} = Q_{\text{τριβ}} + Q_{\text{κρούσης}} \Rightarrow Q_{\text{ολ}} = 48\text{J} + 6\text{J} \Rightarrow$$

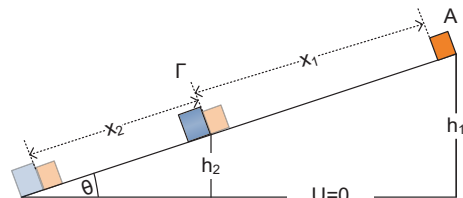
$$Q_{\text{ολ}} = 54\text{J}$$

Η αρχική δυναμική ενέργεια του σώματος μάζας Σ₁ είναι:

$$U_{1,\alpha\rho\chi} = m_1 g h_1$$

όπου $h_1 = (x_1 + x_2) \cdot \eta\mu\theta \Rightarrow h_1 = (4\text{m} + 2\text{m}) \cdot 0,6 \Rightarrow h_1 = 3,6\text{m}$

Άρα $U_{1,\alpha\rho\chi} = 1\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3,6\text{m} \Rightarrow U_{1,\alpha\rho\chi} = 36\text{J}$



Η αρχική δυναμική ενέργεια του σώματος μάζας Σ_2 είναι:

$$U_{2,αρχ} = m_2 g h_2 ,$$

$$\text{όπου } h_2 = x_2 \cdot \eta \mu \theta \Rightarrow h_2 = 2\text{m} \cdot 0,6 \Rightarrow h_2 = 1,2\text{m}$$

$$\text{Άρα } U_{2,αρχ} = 3\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,2\text{m} \Rightarrow U_{2,αρχ} = 36\text{J}$$

Το ποσοστό της αρχικής δυναμικής ενέργειας των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 που έγινε θερμότητα μέχρι το συσσωμάτωμα να φτάσει στη βάση (Β) του κεκλιμένου επιπέδου, είναι:

$$\frac{Q_{ολ}}{U_{1,αρχ} + U_{2,αρχ}} = \frac{54\text{J}}{36\text{J} + 36\text{J}} = \frac{54}{72} = 0,75 \quad \text{ή } 75\%$$

Πρόβλημα 2.

Ένα πρωτόνιο Π_1 μάζας $m_1 = m$ κινούμενο με ταχύτητα μέτρου $v_1 = 10^6 \text{ m/s}$ αλληλεπιδρά (συγκρούεται έκκεντρα και ελαστικά) με ένα άλλο ακίνητο πρωτόνιο Π_2 μάζας $m_2 = m$. Μετά την κρούση το πρωτόνιο Π_1 κινείται σε διεύθυνση που σχηματίζει γωνία $\theta = 30^\circ$ σε σχέση με την αρχική του πορεία.

A. Να υπολογισθεί αμέσως μετά τη κρούση:

- το μέτρο της ταχύτητας του πρωτονίου Π_1 .
- η ταχύτητα του πρωτονίου Π_2 .

B. Να βρεθεί το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του πρωτονίου Π_1 που μεταφέρεται στο πρωτόνιο Π_2

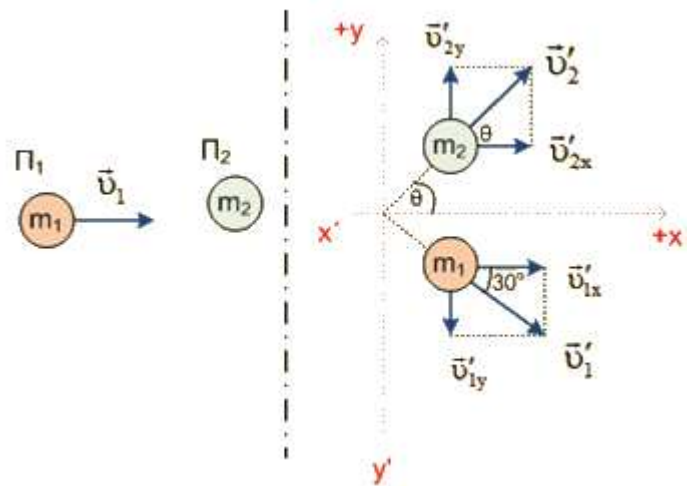
- στην παραπάνω κρούση.
- αν η κρούση ήταν κεντρική.

Λύση

A.

α) Έστω $\vec{v}'_2$ η ταχύτητα του πρωτονίου Π_2 μετά τη κρούση και θ η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$. Αναλύουμε την ταχύτητα $\vec{v}'_2$ σε δύο συνιστώσες οι οποίες έχουν μέτρα:

$$v'_{2x} = v'_2 \cdot \sin\theta \text{ και } v'_{2y} = v'_2 \cdot \eta\mu\theta$$



Έστω $\vec{v}'_1$ η ταχύτητα του πρωτονίου Π_1 μετά τη κρούση και σχηματίζει γωνία 30° με τον άξονα $x'x$.

Αναλύουμε την ταχύτητα $\vec{v}'_1$ σε δύο συνιστώσες οι οποίες έχουν μέτρα:

$$v'_{1x} = v'_1 \cdot \sin 30^\circ \text{ και}$$

$$v'_{1y} = v'_1 \cdot \eta\mu 30^\circ \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για κάθε άξονα χωριστά για το σύστημα των δύο πρωτονίων:

$$x'x: \vec{p}_{ολ,x}^{πριν} = \vec{p}_{ολ,x}^{μετά} \Rightarrow \vec{p}_{1,x}^{πριν} + \vec{p}_{2,x}^{πριν} = \vec{p}_{1,x}^{μετά} + \vec{p}_{2,x}^{μετά}$$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$mv_1 + 0 = mv'_{1x} + mv'_{2x} \Rightarrow v_1 = v'_{1x} + v'_{2x} \Rightarrow v'_{2x} = v_1 - v'_{1x} \quad (2)$$

$$y'y: \vec{p}_{ολ,y}^{πριν} = \vec{p}_{ολ,y}^{μετά} \Rightarrow \vec{p}_{1,y}^{πριν} + \vec{p}_{2,y}^{πριν} = \vec{p}_{1,y}^{μετά} + \vec{p}_{2,y}^{μετά}$$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα πάνω, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$0 + 0 = mv'_{2y} - mv'_{1y} \Rightarrow 0 = v'_{2y} - v'_{1y} \Rightarrow v'_{2y} = v'_{1y} \quad (3)$$

Υψώνουμε τις σχέσεις (2) και (3) στο τετράγωνο και στη συνέχεια τις προσθέτουμε κατά μέλη:

$$\left. \begin{aligned} v_{2x}'^2 &= v_1^2 + v_{1x}'^2 - 2v_1 v_{1x}' \\ v_{2y}'^2 &= v_{1y}'^2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(+)} v_{2x}'^2 + v_{2y}'^2 = v_1^2 + v_{1x}'^2 - 2v_1 v_{1x}' + v_{1y}'^2 \quad (4)$$

Όμως $v_2'^2 = v_{2x}'^2 + v_{2y}'^2$, $v_1'^2 = v_{1x}'^2 + v_{1y}'^2$ και $v_{1x}' = v_1' \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ οπότε με αντικατάσταση στην (4):

$$v_2'^2 = v_1^2 + v_1'^2 - v_1 v_1' \sqrt{3} \quad (5)$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική ισχύει η αρχή διατήρησης κινητικής ενέργειας του συστήματος.

$$K_{ολ}^{πριν} = K_{ολ}^{μετά} \Rightarrow K_1^{πριν} + K_2^{πριν} = K_1^{μετά} + K_2^{μετά} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_1^2 + 0 = \frac{1}{2} m v_2'^2 + \frac{1}{2} m v_1'^2 \Rightarrow$$

$$v_1^2 = v_2'^2 + v_1'^2 \quad (6)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (5) και (6):

$$v_2'^2 + v_1^2 = v_2'^2 + v_1'^2 + v_1^2 + v_1'^2 - v_1 v_1' \sqrt{3} \Rightarrow 0 = v_1'^2 + v_1'^2 - v_1 v_1' \sqrt{3} \Rightarrow 2v_1'^2 = v_1 v_1' \sqrt{3} \Rightarrow v_1' = v_1 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Με αντικατάσταση $v_1 = 10^6 \text{ m/s}$ προκύπτει: $v_1' = 10^6 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Β) Από τη σχέση (6) έχουμε:

$$v_2'^2 = v_1^2 - v_1'^2 \Rightarrow v_2' = \sqrt{v_1^2 - v_1'^2} \Rightarrow v_2' = \sqrt{\left(10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(10^6 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} \Rightarrow v_2' = \sqrt{10^{12} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - \frac{3}{4} 10^{12} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \Rightarrow$$

$$v_2' = \sqrt{\frac{1}{4} 10^{12} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \Rightarrow v_2' = \frac{1}{2} 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για να βρούμε την κατεύθυνση της $\vec{v}_2'$ θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο: $\eta \mu \theta = \frac{v_{2y}'}{v_2'} \quad (7)$

Με αντικατάσταση $v_1' = 10^6 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ στην (1) προκύπτει:

$$v_{1y}' = 10^6 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow v_{1y}' = 10^6 \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Άρα από την (3) προκύπτει: $v_{2y}' = 10^6 \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Οπότε από τη σχέση (7) με αντικατάσταση $v_{2y}' = 10^6 \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ και $v_2' = \frac{1}{2} 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ προκύπτει:

$$\eta \mu \theta = \frac{10^6 \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\text{m}}{\text{s}}}{\frac{1}{2} 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \Rightarrow \eta \mu \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \theta = 60^\circ$$

B.

γ) Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του νετρονίου που μεταφέρεται στον πυρήνα είναι:

$$\frac{K_2^{\text{μετά}}}{K_1^{\text{πριν}}} = \frac{\frac{1}{2}mv_2'^2}{\frac{1}{2}mv_1^2} = \frac{v_2'^2}{v_1^2} = \left(\frac{v_2'}{v_1}\right)^2$$

Με αντικατάσταση $v_2' = \frac{1}{2}10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ και $v_1 = 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ προκύπτει:

$$\frac{K_2^{\text{μετά}}}{K_1^{\text{πριν}}} = \left(\frac{\frac{1}{2}10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0,25 \quad \text{ή} \quad 25\%$$

δ) Αν η κρούση ήταν κεντρική επειδή οι μάζες είναι ίσες θα αντάλλαζαν ταχύτητες. Δηλαδή όλη η κινητική ενέργεια του πρωτονίου Π_1 θα μεταφερόταν στο πρωτόνιο Π_2 , δηλαδή $K_1^{\text{πριν}} = K_2^{\text{μετά}}$ άρα:

$$\frac{K_2^{\text{μετά}}}{K_1^{\text{πριν}}} = 1 = 100\%$$

Πρόβλημα 3.

Ένα σώμα μάζας $M = 3 \text{ Kg}$ ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100 \text{ N/m}$. Δεύτερο σώμα μάζας $m = 1,5 \text{ kg}$, βάλλεται από το έδαφος από το σημείο Κ με αρχική ταχύτητα $u_0 = 10 \text{ m/s}$ και μετά από χρόνο $t = 0,8 \text{ s}$ συγκρούεται ανελαστικά με το Μ. Μετά την κρούση το σώμα m αφού εξέλθει από το Μ με ταχύτητα μέτρου $u' = 1 \text{ m/s}$ απομακρύνεται χωρίς να επηρεάζει την εξέλιξη του φαινομένου.

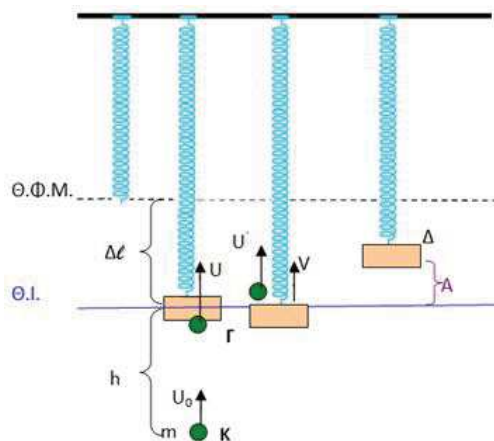


Να υπολογίσετε:

- το μέτρο της ταχύτητας του σώματος m ελάχιστα πριν την κρούση.
- το μέτρο της ταχύτητας του σώματος M αμέσως μετά την κρούση.
- τη μέγιστη μετατόπιση του σώματος M μέχρι να σταματήσει στιγμιαία.
- την αρχική μηχανική ενέργεια του συστήματος ελατήριο - σώμα μάζας m - σώμα μάζας M θεωρώντας σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής βαρυτικής ενέργειας αυτό που διέρχεται από το σημείο Κ.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Λύση



- α) Φαινόμενο 1^ο: Κίνηση m από το (Κ) στο (Γ).

$$v = v_0 - gt \Rightarrow v = (10 - 10 \cdot 0,8) \text{ m/s} \Rightarrow v = 2 \text{ m/s}$$

β) Φαινόμενο 2^ο: Ανελαστική κρούση m-M.

Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Ορμής (λίγο πριν - λίγο μετά).

$$\vec{p}_{ολ}(\text{πριν}) = \vec{p}_{ολ}(\text{μετά}) \Rightarrow \vec{p}_M + \vec{p}_m = \vec{p}'_M + \vec{p}'_m$$

Επιλέγοντας θετική φορά προς τα πάνω, γράφουμε την παραπάνω σχέση αλγεβρικά:

$$0 + mv = MV + mv' \Rightarrow V = \frac{m(v - v')}{M} \Rightarrow V = \frac{1,5 \cdot (2 - 1)}{3} \text{ m/s} \Rightarrow V = \frac{1}{2} \text{ m/s}$$

γ) Φαινόμενο 3^ο: Κίνηση του σώματος μάζας M υπό την επίδραση συντηρητικών δυνάμεων.

Εφαρμόζουμε, για το σύστημα M-k, τη Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας μεταξύ των θέσεων Γ και Δ. Συμβολίζουμε με A τη μέγιστη μετατόπιση του σώματος M μέχρι να σταματήσει στιγμιαία.

$$E_T(\text{ολ}) = E_A(\text{ολ}) \Rightarrow \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}k(\Delta\ell - A)^2 + mgA \quad (1)$$

Εκμεταλλευόμενοι την αρχική ισορροπία του σώματος μάζας M, υπολογίζουμε την παραμόρφωση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος:

$$\Sigma F_{\Theta,1} = 0 \Rightarrow Mg - F_{ελ} = 0 \Rightarrow Mg = k \cdot \Delta\ell \Rightarrow \Delta\ell = \frac{Mg}{k} = \frac{30}{100} \text{ m} \Rightarrow \Delta\ell = 0,3 \text{ m}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) προκύπτει:

$$A^2 = \frac{M}{k} V^2 = \frac{3}{400} \text{ m}^2 \Rightarrow A = \frac{\sqrt{3}}{20} \text{ m}$$

δ) Η αρχική απόσταση του σώματος μάζας m από το σώμα μάζας M είναι:

$$h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h = \left(10 \cdot 0,8 - \frac{1}{2}10 \cdot 0,8^2 \right) \text{ m} = (8 - 3,2) \text{ m} \Rightarrow h = 4,8 \text{ m}$$

Η αρχική μηχανική ενέργεια του συστήματος είναι το άθροισμα:

1. της δυναμικής βαρυτικής ενέργειας του σώματος μάζας M,
2. της κινητικής ενέργειας του σώματος μάζας m και

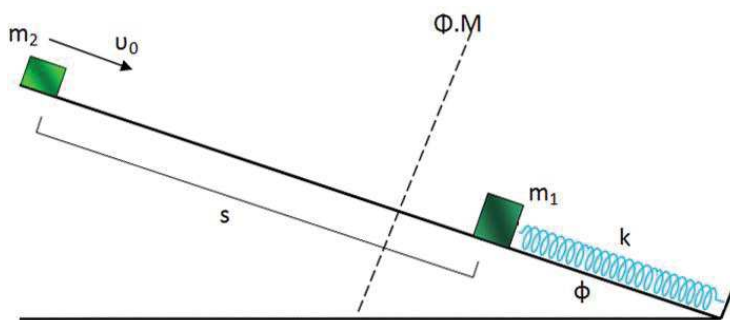
3. της δυναμικής ελαστικής ενέργειας του ελατηρίου.

$$\begin{aligned} E_{\text{MHX}}(\alpha\rho\chi) &= Mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 = \\ &= \left(3 \cdot 10 \cdot 4,8 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^2 + \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 0,3^2 \right) \text{J} = \\ &= (144 + 50 + 4,5) \text{J} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$E_{\text{MHX}}(\alpha\rho\chi) = 198,5 \text{J}$$

Πρόβλημα 4.

Στο κάτω άκρο λείου κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\varphi = 30^\circ$ είναι στερεωμένο ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 100 \text{ N/m}$. Στο πάνω ελεύθερο άκρο του ελατηρίου έχει προσδεθεί σώμα μάζας $m_1 = 2 \text{ kg}$ που ισορροπεί. Από την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου και από απόσταση $s = 0,15 \text{ m}$ από το m_1 , βάλλεται προς τα κάτω δεύτερο σώμα $m_2 = 1 \text{ kg}$ με αρχική ταχύτητα $u_0 = \sqrt{3} \text{ m/s}$ και με κατεύθυνση τον άξονα του ελατηρίου που συγκρούεται κεντρικά με το m_1 . Μετά την κρούση η κίνηση του m_2 αντιστρέφεται, και διανύοντας απόσταση $d = 0,05 \text{ m}$ σταματάει. Το m_1 κινούμενο συμπιέζει το ελατήριο και στιγμιαία σταματά.



A. Να υπολογίσετε:

- την ταχύτητα του σώματος m_2 ελάχιστα πριν την κρούση.
- τις ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση.
- τη μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου από την αρχική του θέση.
- την μέγιστη δυναμική ελαστική ενέργεια του ελατηρίου κατά την κίνηση του m_1 .

B. Να εξετάσετε αν η κρούση είναι ελαστική.

Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

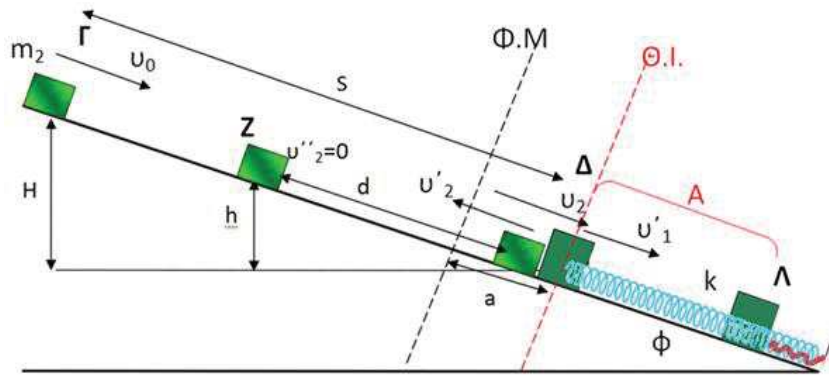
Λύση

A. Εκμεταλλευόμενοι την αρχική ισορροπία του σώματος μάζας m_1 , υπολογίζουμε την αρχική παραμόρφωση, α , του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος:

$$\Sigma F = 0 \begin{cases} \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma F_x = 0 \Rightarrow m_1 g_x = F_{ελ} \end{cases} \Rightarrow m_1 g \sin \varphi = k \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{m_1 g \sin \varphi}{k} \Rightarrow \alpha = \frac{10}{100} \text{ m} \Rightarrow$$

$$\alpha = 0,1 \text{ m} \quad (1)$$

α) Φαινόμενο 1^ο: Κίνηση του σώματος m_2 (Γ) $\rightarrow$ (Δ).



Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε.:

$$K_{\Delta} - K_{\Gamma} = W_{B_2} + W_N \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_2 v_0^2 = m_2 g H + 0 \xrightarrow{H=s\eta\mu\phi}$$

$$\frac{1}{2} v_2^2 - \frac{1}{2} v_0^2 = g s \eta \mu \phi \Rightarrow$$

$$v_2^2 = v_0^2 + 2 g s \eta \mu \phi \Rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{v_0^2 + 2 g s \eta \mu \phi} \Rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{3 + 2 \cdot 10 \cdot 0,15 \cdot \frac{1}{2}} \text{ m/s} \Rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{4,5} \text{ m/s} \Rightarrow v_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ m/s} \quad (2)$$

β) Φαινόμενο 2^ο: Κρούση m_1 - m_2 .

Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Ορμής.

$$\vec{p}_{ολ} (\text{πριν}) = \vec{p}_{ολ} (\text{μετά})$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$

Επιλέγοντας θετική φορά προς τα κάτω, η παραπάνω σχέση γράφεται αλγεβρικά:

$$0 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 - m_2 v'_2 \Rightarrow$$

$$v'_1 = \frac{m_2 (v_2 + v'_2)}{m_1} \quad (3)$$

Φαινόμενο 3^ο: Κίνηση του σώματος m_2 από το (Δ) προς το (Z).

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε.:

$$K_Z - K_\Delta = W_{B_2} + W_N \Rightarrow$$

$$0 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -m_2 gh + 0 \xrightarrow{h=d\eta\mu\phi}$$

$$\frac{1}{2} v_2'^2 = g d \eta \mu \phi \Rightarrow$$

$$v_2' = \sqrt{2 g d \eta \mu \phi} \Rightarrow$$

$$v_2' = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,05 \cdot \frac{1}{2}} \text{ m/s} \Rightarrow$$

$$v_2' = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m/s} \quad (4)$$

$$(3) \xrightarrow{(2),(4)} v_1' = \frac{1 \left(\frac{4\sqrt{2}}{2} \right)}{2} \text{ m/s} \Rightarrow v_1' = \sqrt{2} \text{ m/s} \quad (5)$$

γ) Φαινόμενο 4^ο: Κίνηση του σώματος m_1 από το (Δ) προς το (Λ) υπό την επίδραση των συντηρητικών δυνάμεων του βάρους και της $F_{ελ}$. Συμβολίζουμε με A την επιπλέον συμπίεση του ελατηρίου και εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε.:

$$K_\Lambda - K_\Delta = W_{B1} + W_{F_{ελ}} \Rightarrow$$

$$0 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = m_1 g h_1 + \frac{1}{2} k \alpha^2 - \frac{1}{2} k (\alpha + A)^2 \xrightarrow{h_1 = A \eta \mu \phi}$$

$$100 A^2 = 4 \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

$A = 0,2 \text{ m}$ θα είναι η επιπλέον συμπίεση του ελατηρίου.

$$\delta) U_{(ελ)}^{\max} = \frac{1}{2} k (A + \alpha)^2 = \frac{1}{2} 100 \cdot 0,3^2 \text{ J} \Rightarrow U_{(ελ)}^{\max} = 4,5 \text{ J}$$

Β. Αν η κρούση των m_1 και m_2 είναι ελαστική, θα ισχύει και η Αρχή Διατήρησης της Κινητικής Ενέργειας.

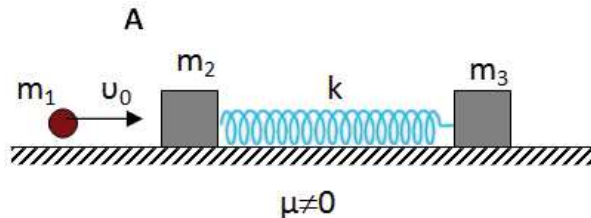
$$K_{ολ}(\text{πριν}) = K_1 + K_2 = 0 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{9}{2} \text{ J} \Rightarrow K_{ολ}(\text{πριν}) = 2,25 \text{ J}$$

$$K_{ολ}(\text{μετά}) = K_1' + K_2' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \left(\frac{1}{2} 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \right) \text{ J} = \frac{9}{4} \text{ J} \Rightarrow K_{ολ}(\text{μετά}) = 2,25 \text{ J}$$

Συνεπώς η κρούση είναι ελαστική.

Πρόβλημα 5.

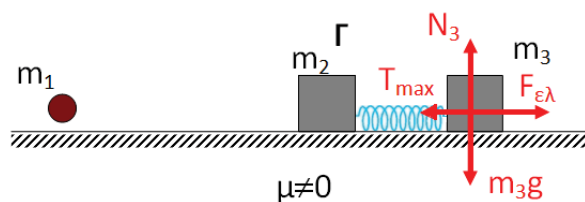
Στο σχήμα το σώμα μάζας $m_1 = 5\text{kg}$ συγκρούεται ελαστικά και κεντρικά με το σώμα μάζας $m_2 = 5\text{kg}$. Αν είναι γνωστό ότι το ιδανικό ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό μήκος του, ότι η μάζα του σώματος m_3 είναι $m_3 = 10\text{kg}$, η σταθερά του ελατηρίου είναι $k = 10\text{N/m}$, ο συντελεστής τριβής μεταξύ σωμάτων και επιπέδου είναι $\mu = 0,4$ και ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\text{m/s}^2$, να υπολογίσετε:



- τη μέγιστη επιτρεπτή παραμόρφωση του ελατηρίου ώστε να μην κινηθεί το m_3 .
- τη μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να έχει το m_1 ώστε να μην κινηθεί το m_3 .
- το μέτρο της μεταβολής της ορμής του m_1 στη διάρκεια της κρούσης.
- τη θερμότητα που αναπτύχθηκε κατά τη διάρκεια του φαινομένου του ερωτήματος α.

Λύση

α) Για να μην κινηθεί το m_3 θα πρέπει να συμπιεστεί το ελατήριο μέχρις ότου η δύναμη του ελατηρίου να γίνει ίση με την μέγιστη τιμή της στατικής τριβής στο m_3 . Με άλλα λόγια η μέγιστη επιτρεπτή τιμή της συμπίεσης του ελατηρίου πρέπει να είναι:



$$F_{ελ} = T(\text{max}) \Rightarrow$$

$$kx = \mu m_3 g \Rightarrow$$

$$x = \frac{\mu m_3 g}{k} = \frac{0,4 \cdot 10 \cdot 10}{10} \text{m} \Rightarrow$$

$$x = 4\text{m}$$

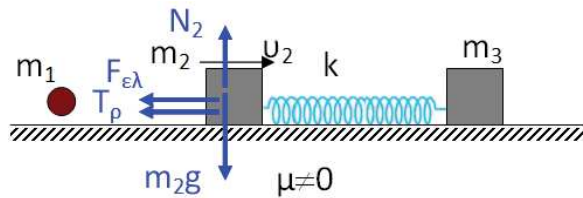
β) Φαινόμενο 1^ο: Ελαστική κρούση $m_1 - m_2$.

Αφού τα σώματα έχουν ίσες μάζες θα ανταλλάξουν ταχύτητες.

$$v'_1 = v_2 = 0 \text{ και } v'_2 = v_1 = v_0 \quad (1)$$

Φαινόμενο 2^ο: Κίνηση του m_2

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας από τη θέση Α (αρχική θέση του m_2) ως τη θέση Γ (τελική θέση του m_2).



$$K_2(\Gamma) - K_2(A) = W_B + W_N + W_{T\rho} + W_{F_{ελ}} \xrightarrow{W_B=0, W_N=0}$$

$$0 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = 0 + 0 + T_\rho \cdot x \cdot \cos 180^\circ + 0 - \frac{1}{2} kx^2 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -\mu m_2 g x - \frac{1}{2} kx^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} 5 v_2'^2 = 0,4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 16 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} 5 v_2'^2 = 160 \Rightarrow v_2'^2 = 64 \left(\text{m/s} \right)^2 \Rightarrow v_2' = 8 \text{ m/s}$$

$$(1): v_0 = 8 \text{ m/s}$$

γ) Το μέτρο της ορμής της μάζας m_1 πριν την κρούση είναι:

$$p_1 = m_1 v_0 = 5 \cdot 8 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \Rightarrow p_1 = 40 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Το μέτρο της ορμής της μάζας m_1 μετά την κρούση είναι:

$$p_1' = m_1 v_1' \Rightarrow p_1' = 0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του m_1 κατά την κρούση είναι:

$$|\Delta \vec{p}_m| = |\vec{p}_1' - \vec{p}_1| = |\vec{p}_1| \Rightarrow |\Delta \vec{p}_1| = 40 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

δ) Η θερμότητα οφείλεται στην τριβή και είναι ίση με το έργο της:

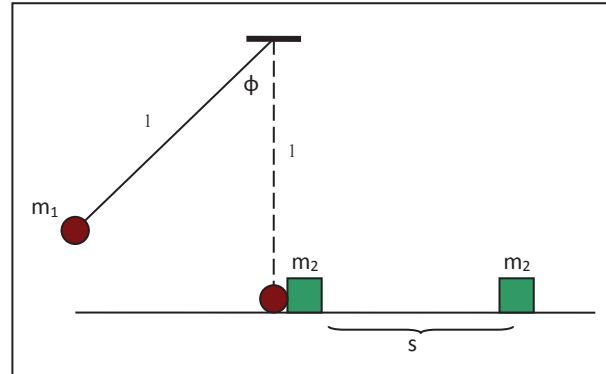
$$Q = |W_{T\rho}| = |-\mu m_2 g x| = (0,4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 4) \text{ J} \Rightarrow Q = 80 \text{ J}$$

Πρόβλημα 6.

Αρχικά η σφαίρα m_1 βρίσκεται ακίνητη και το νήμα σε κατακόρυφη θέση.

Εκτρέπουμε τη σφαίρα μάζας $m_1 = m$ από την αρχική της θέση ώστε το νήμα μήκους $\ell = 1,6 \text{ m}$ να σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία $\varphi = 60^\circ$ και την αφήνουμε ελεύθερη. Όταν αυτή περάσει από την αρχική της θέση ισορροπίας συγκρούεται ελαστικά με ακίνητο σώμα μάζας $m_2 = 3m$ που βρισκόταν πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με τριβές. Το σώμα m_2 μετά την κρούση, αφού διανύσει διάστημα s σταματάει. Να βρεθούν:

α) Το μέτρο της ταχύτητας u_1 του σώματος μάζας m ελάχιστα πριν την κρούση.



β) Το συνημίτονο της τελικής γωνίας απόκλισης θ που θα σχηματίσει το νήμα με την κατακόρυφο μετά την ελαστική κρούση.

γ) Το διάστημα s μέχρι να σταματήσει το σώμα m_2 .

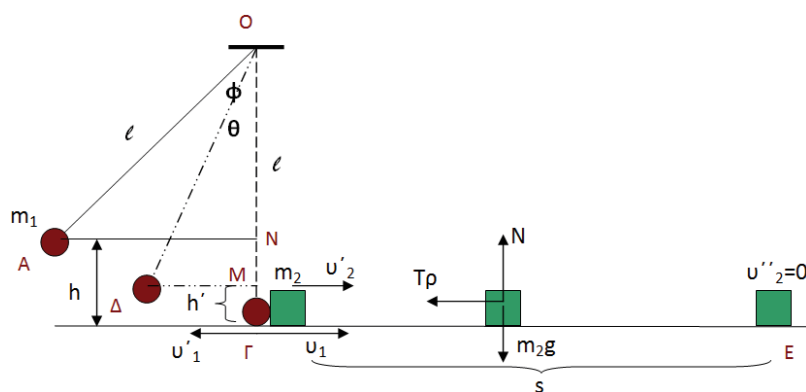
δ) Το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας του m_1 κατά την κρούση.

Δίνονται ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και επιπέδου $\mu = 0,2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Λύση

α) Στο τρίγωνο OAN έχουμε:

$$\cos \varphi = \frac{\ell - h}{\ell} \Rightarrow \ell - h = \ell \cdot \cos \varphi \Rightarrow h = \ell - \ell \cdot \cos \varphi = \left(1,6 - 1,6 \frac{1}{2} \right) \text{ m} \Rightarrow h = 0,8 \text{ m} \quad (1)$$



Φαινόμενο 1^ο: Κίνηση του σώματος μάζας m_1 από το σημείο (Α) στο σημείο (Γ)

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας για το σώμα μάζας m_1 από τη θέση Α ως τη θέση Γ.

$$K(\Gamma) - K(A) = W_B + W_T \xrightarrow{W_T=0}$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - 0 = mgh \xrightarrow{(1)}$$

$$v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,8} \text{ m/s} = \sqrt{16} \text{ m/s} \Rightarrow$$

$$v_1 = 4 \text{ m/s} \quad (2)$$

β) Φαινόμενο 2^ο: Ελαστική κρούση μεταξύ των σωμάτων m_1 και m_2 .

Θεωρώντας θετική φορά την προς τα δεξιά, αφού η κρούση είναι ελαστική και το 2^ο σώμα είναι ακίνητο θα ισχύουν οι τύποι:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (3) \text{ και } v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (4).$$

Με αντικατάσταση στους παραπάνω τύπους προκύπτουν:

$$(3): v'_1 = \frac{m - 3m}{m + 3m} 4 \text{ m/s} = \frac{-2m}{4m} 4 \text{ m/s} \Rightarrow v'_1 = -2 \text{ m/s}$$

$$(4): v'_2 = \frac{2m}{m + 3m} 4 \text{ m/s} = \frac{2m}{4m} 4 \text{ m/s} \Rightarrow v'_2 = 2 \text{ m/s}$$

Φαινόμενο 3^ο: Κίνηση του σώματος μάζας m_1 από το σημείο (Γ) στο σημείο (Δ) όπου θα σταματήσει στιγμιαία.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας για το σώμα μάζας m_1 από τη θέση Γ ως τη θέση Δ.

$$K(\Delta) - K(\Gamma) = W_B + W_T \xrightarrow{W_T=0}$$

$$0 - \frac{1}{2}mv_1'^2 = -mgh' \Rightarrow$$

$$h' = \frac{v_1'^2}{2g} = \frac{4}{20} \text{ m} \Rightarrow$$

$$h' = 0,2 \text{ m} \quad (5)$$

Στο τρίγωνο ΟΔΜ έχουμε:

$$\sin \theta = \frac{\ell - h'}{\ell} \xrightarrow{(5)} \sin \theta = \frac{1,6 - 0,2}{1,6} = \frac{1,4}{1,6} \Rightarrow \sin \theta = \frac{7}{8}$$

γ) Φαινόμενο 4^ο: Κίνηση του σώματος μάζας m_2 από το σημείο (Γ) στο σημείο (Ε) όπου θα σταματήσει.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας για το σώμα μάζας m_2 από τη θέση Γ ως τη θέση Ε.

$$K(E) - K(\Gamma) = W_B + W_N + W_{Tp} \xrightarrow{W_N=0, W_B=0}$$

$$0 - \frac{1}{2} \mu v_2'^2 = -\mu \lambda m g s \Rightarrow$$

$$s = \frac{v_2'^2}{2\mu g} = \frac{4}{2 \cdot 0,2 \cdot 10} \text{ m} \Rightarrow$$

$$s = 1 \text{ m}$$

δ) Ελάχιστα πριν την ελαστική κρούση, το σώμα μάζας m_1 είχε κινητική ενέργεια:

$$K_1(\alpha\rho\chi) = \frac{1}{2} m v_1^2$$

Αμέσως μετά την ελαστική κρούση, το σώμα μάζας m_1 έχει κινητική ενέργεια:

$$K_1(\tau\epsilon\lambda) = \frac{1}{2} m v_1'^2.$$

Το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας του m_1 κατά την κρούση θα είναι:

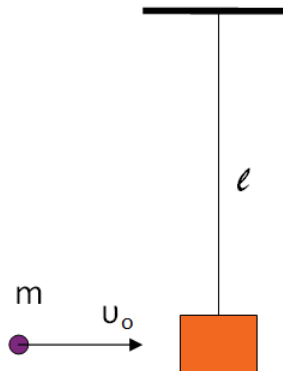
$$a_1 \% = \frac{|\Delta K_1|}{K_1(\alpha\rho\chi)} 100\% = \frac{|K_1(\tau\epsilon\lambda) - K_1(\alpha\rho\chi)|}{K_1(\alpha\rho\chi)} 100\% = \frac{|\frac{1}{2} m v_1'^2 - \frac{1}{2} m v_1^2|}{\frac{1}{2} m v_1^2} 100\%$$

Με αντικατάσταση προκύπτει:

$$a_1 \% = \frac{|4 - 16|}{16} 100\% = \frac{3}{4} 100\% \Rightarrow a_1 \% = 75\%$$

Πρόβλημα 7.

Το σώμα του διπλανού σχήματος έχει μάζα $M = 0,98\text{Kg}$ και ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου νήματος μήκους $\ell = 2\text{m}$. Κάποια χρονική στιγμή βλήμα μάζας $m = 0,02\text{kg}$ σφηνώνεται στο σώμα μάζας M και το συσσωμάτωμα που προκύπτει, εκτελώντας κυκλική κίνηση, φτάνει σε θέση όπου το νήμα σχηματίζει με την κατακόρυφη γωνία φ τέτοια ώστε $\sin\varphi = 0,6$ και σταματά στιγμιαία.



Να υπολογίσετε:

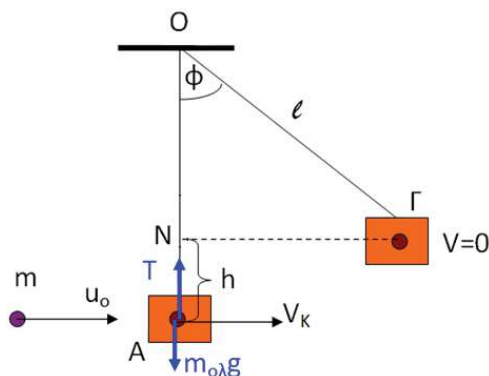
- Το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.
- Την αρχική ταχύτητα u_0 του βλήματος.
- Την τάση του νήματος πριν την κρούση.
- Την τάση του νήματος αμέσως μετά την κρούση.
- Τη μηχανική ενέργεια, που μετατράπηκε σε θερμότητα στην πλαστική κρούση.

Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$.

Λύση

α) Φαινόμενο 1^ο: Πλαστική κρούση $m - M$.

Σε κάθε κρούση ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής:



$$\vec{p}_{ολ}(\text{πριν}) = \vec{p}_{ολ}(\text{μετά})$$

$$\vec{p}_m + \vec{p}_M = \vec{p}'_m + \vec{p}'_M$$

Επιλέγοντας θετική φορά προς τα δεξιά, η παραπάνω σχέση γράφεται αλγεβρικά:

$$mv_0 + 0 = (m + M) V_K \Rightarrow$$

$$v_0 = \frac{(m + M) V_K}{m} \quad (1)$$

Στο τρίγωνο ΟΝΓ έχουμε:

$$\cos \varphi = \frac{\ell - h}{\ell} \Rightarrow \ell - h = \ell \cos \varphi \Rightarrow h = \ell - \ell \cos \varphi \quad (2)$$

Φαινόμενο 2^ο: Κίνηση του συσσωματώματος.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας για το συσσωμάτωμα από τη θέση Α ως τη θέση Γ.

$$K(\Gamma) - K(A) = W_B + W_T \xrightarrow{W_T=0}$$

$$0 - \frac{1}{2}(m + M) V_K^2 = 0 - (m + M) gh \xrightarrow{(2)}$$

$$V_K^2 = 2g\ell(1 - \cos \varphi) \Rightarrow$$

$$V_K = \sqrt{2g\ell(1 - \cos \varphi)} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 2(1 - 0,6)} \text{ m/s} = \sqrt{16} \text{ m/s} \Rightarrow$$

$$V_K = 4 \text{ m/s} \quad (2)$$

$$\text{β) (1): } v_0 = \frac{(0,02 + 0,98) \cdot 4}{0,02} \text{ m/s} \Rightarrow v_0 = 200 \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned} \gamma) \text{ Επειδή αρχικά το σώμα μάζας } M \text{ ισορροπούσε: } \Sigma F = 0 \Rightarrow T_0 - Mg = 0 \Rightarrow \\ T_0 = Mg \Rightarrow T_0 = 0,98 \cdot 10 \text{ N} \Rightarrow T_0 = 9,8 \text{ N} \end{aligned}$$

δ) Το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση μπαίνει σε κυκλική κίνηση.

Η συνισταμένη της τάσης και του βάρους λειτουργεί ως κεντρομόλος δύναμη.

$$\Sigma F_R = F_K \Rightarrow$$

$$T - (M + m)g = (M + m) \frac{V_K^2}{\ell} \Rightarrow$$

$$T = (M + m)g + (M + m) \frac{V_K^2}{\ell} \xrightarrow{(2)}$$

$$T = \left(10 + 1 \cdot \frac{16}{2} \right) N \Rightarrow$$

$$T = 18N$$

ε) Οι δυναμικές ενέργειες θεωρούνται εξαρχής ίσες με το μηδέν. Η μηχανική ενέργεια του συστήματος λίγο πριν την κρούση ήταν:

$$E_{\text{MHX}}(\text{αρχ}) = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} 2 \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^4 \text{ J} = 400 \text{ J}$$

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος αμέσως μετά την κρούση είναι:

$$E_{\text{MHX}}(\text{τελ}) = \frac{1}{2} (M + m) V_K^2 = \frac{1}{2} 1 \cdot 16 \text{ J} = 8 \text{ J}$$

$$|\Delta E_{\text{MHX}}| = |E_{\text{MHX}}(\text{τελ}) - E_{\text{MHX}}(\text{αρχ})| = 392 \text{ J}$$

Πρόβλημα 8.

Ένα βλήμα μάζας $m = 1 \text{ kg}$, βάλλεται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $u_0 = 100\sqrt{2} \text{ m/s}$ και διαπερνά ένα κιβώτιο μάζας $M = 8 \text{ kg}$ που ήταν αρχικά ακίνητο στη θέση $x = 0$ μη λείου οριζόντιου δαπέδου. Το βλήμα εξέρχεται από το κιβώτιο με ταχύτητα $u = 20\sqrt{2} \text{ m/s}$. Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ δαπέδου και κιβωτίου είναι $\mu = 0,5 + x$, όπου x η θέση του κιβωτίου στο (S.I.), να υπολογίσετε:

α) Την ταχύτητα του κιβωτίου αμέσως μετά την κρούση.

β) Το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του βλήματος κατά τη διάρκεια της κρούσης.

γ) Το διάστημα που θα διανύσει το κιβώτιο μέχρι να σταματήσει.

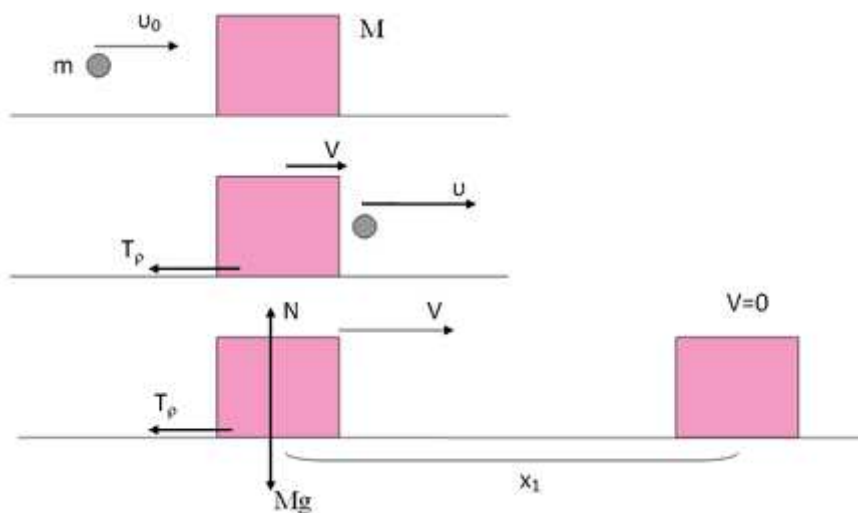
δ) Το μέτρο του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής της ορμής του κιβωτίου στη θέση $x = 2 \text{ m}$.

ε) Τη συνολική θερμότητα που μεταφέρθηκε στο περιβάλλον στη διάρκεια του φαινομένου.

Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Λύση

α) Φαινόμενο 1^ο: Ανελαστική κρούση $m - M$.



Σε κάθε κρούση ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής:

$$\vec{p}_{\text{ολ}} (\text{πριν}) = \vec{p}_{\text{ολ}} (\text{μετά})$$

$$\vec{p}_m + \vec{p}_M = \vec{p}'_m + \vec{p}'_M$$

Επιλέγοντας θετική φορά προς τα δεξιά, η παραπάνω σχέση γράφεται αλγεβρικά:

$$mv_0 + 0 = mv + MV \Rightarrow$$

$$V = \frac{m(v_0 - v)}{M} =$$

$$= \frac{1 \cdot (100\sqrt{2} - 20\sqrt{2})}{8} \text{ m/s} \Rightarrow$$

$$V = 10\sqrt{2} \text{ m/s}$$

$$\text{β) } K_m(\text{πριν}) = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (100\sqrt{2})^2 \text{ J} = 10000 \text{ J}$$

$$K_m(\text{μετά}) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (20\sqrt{2})^2 \text{ J} = 400 \text{ J}$$

$$\Delta K_m = K_m(\text{μετά}) - K_m(\text{πριν}) = (400 - 10000) \text{ J} = -9600 \text{ J}$$

Στα $K_m(\text{αρχ})$ η μεταβολή της κινητικής του ενέργειας είναι ΔK_m

Στα 100% $\alpha_m\% =$;

$$\alpha_m\% = \frac{\Delta K_m}{K_m(\text{αρχ})} \cdot 100\% = \frac{-9600}{10000} \cdot 100\% \Rightarrow \alpha_m\% = -96\%$$

γ) Φαινόμενο 2^ο: Κίνηση κιβωτίου από το Α στο Γ.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας για το κιβώτιο.

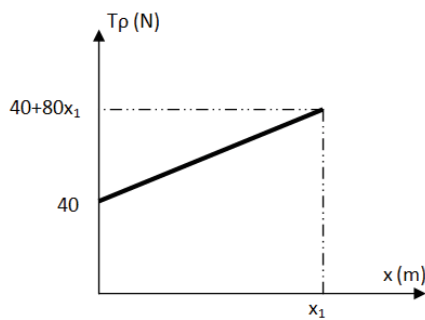
$$K(\Gamma) - K(A) = W_B + W_N + W_{Tp} \xrightarrow{W_N=0, W_B=0}$$

$$0 - \frac{1}{2}MV^2 = W_{Tp} \quad (2)$$

Η τριβή όμως είναι μεταβλητή δύναμη:

$$T_p = \mu Mg = (0,5 + x) \cdot 8 \cdot 10 \text{ N} \Rightarrow T_p = 40 + 80x$$

Συνεπώς το έργο της θα υπολογιστεί μέσω της γραφικής της παράστασης σε συνάρτηση με τη θέση x .



$$\begin{aligned}
 W_{Tp} &= -E\mu\beta(\tau\alpha\pi) = \\
 &= -\frac{(40 + 80x_1) + 40}{2} x_1 = \\
 &= -40x_1 - 40x_1^2
 \end{aligned}$$

$$W_{Tp} = -40x_1 - 40x_1^2 \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας στην (2), έχουμε:

$$\begin{aligned}
 0 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 200 &= -40x_1 - 40x_1^2 \Rightarrow \\
 40x_1^2 + 40x_1 - 800 &= 0 \Rightarrow \\
 x_1^2 + x_1 - 20 &= 0
 \end{aligned}$$

Η παραπάνω δευτεροβάθμια εξίσωση έχει ρίζες:

$$x_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2} m = \frac{-1 \pm 9}{2} m \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5m \\ x_1 = 4m \end{cases}$$

Δεκτή είναι μόνο η θέση: $x_1 = 4m$

δ) Το μέτρο του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής της ορμής του κιβωτίου δίνεται από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα:

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F = T_p = \mu Mg = (0,5 + x) Mg$$

Στη θέση $x=2m$, ο παραπάνω ρυθμός παίρνει την τιμή:

$$\left. \frac{dp}{dt} \right|_{x=2m} = (0,5 + 2) \cdot 8 \cdot 10 N \Rightarrow \left. \frac{dp}{dt} \right|_{x=2m} = 200 N$$

ε) Η συνολική θερμότητα θα είναι η ενέργεια που μετατράπηκε σε θερμότητα στην ανελαστική κρούση και η θερμότητα λόγω της τριβής του κιβωτίου με το δάπεδο:

$$Q_{ολ} = Q_{κρ} + Q_{Tp} \quad (4)$$

$$Q_{\kappa\rho} = |\Delta K_{\text{ολ}}| = K_{\text{ολ}(\alpha\rho\chi)} - K_{\text{ολ}(\tau\epsilon\lambda)} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 \right) =$$

$$\left[\frac{1}{2}1 \cdot 20000 - \left(\frac{1}{2}1 \cdot 800 + \frac{1}{2}8 \cdot 200 \right) \right] \text{J} = (10000 - 1200) \text{J} \Rightarrow$$

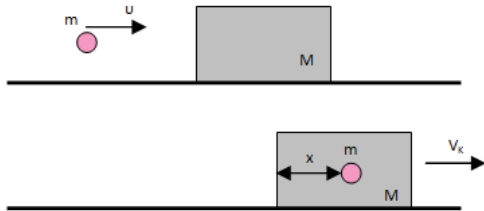
$$Q_{\kappa\rho} = 8800 \text{J}$$

$$Q_{\text{T}\rho} = |W_{\text{T}\rho}| \xrightarrow{(3)} Q_{\text{T}\rho} = (40 \cdot 4 + 40 \cdot 16) \text{J} \Rightarrow Q_{\text{T}\rho} = 800 \text{J}$$

$$(4): Q_{\text{ολ}} = 9600 \text{J}$$

Πρόβλημα 9.

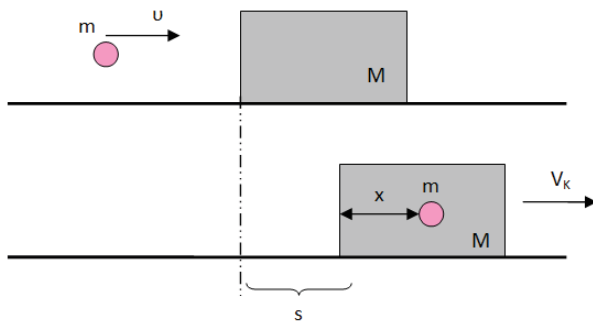
Ένα βλήμα μάζας $m = 0,1\text{kg}$ σφηνώνεται με ταχύτητα $v = 100\text{m/s}$ σε ακίνητο κιβώτιο μάζας $M = 0,9\text{kg}$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το κιβώτιο μπορεί να ολισθαίνει σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Αν η δύναμη αντίστασης που εμφανίζεται μεταξύ βλήματος και κιβωτίου κατά την κρούση θεωρηθεί σταθερού μέτρου $F = 4500\text{N}$, να υπολογίσετε:



- Την κοινή ταχύτητα του συσσωματώματος.
- Τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος (βλήμα - κιβώτιο) κατά τη διάρκεια της κρούσης
- Το χρόνο που διαρκεί η κίνηση του βλήματος σε σχέση με το κιβώτιο.
- Πόσο βαθιά εισχωρεί το βλήμα στο κιβώτιο.

Λύση

α) Φαινόμενο 1^ο: πλαστική κρούση $m - M$.



Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Ορμής:

$$\vec{p}_{ολ}(\text{πριν}) = \vec{p}_{ολ}(\text{μετά})$$

$$\vec{p}_m + \vec{p}_M = \vec{p}'_m + \vec{p}'_M$$

Επιλέγοντας θετική φορά προς τα δεξιά, η παραπάνω σχέση γράφεται αλγεβρικά:

$$mv + 0 = (m + M)V_k \Rightarrow$$

$$V_k = \frac{mv}{m + M} = \frac{0,1 \cdot 100}{0,1 + 0,9} \text{ m/s} \Rightarrow$$

$$V_k = 10 \text{ m/s}$$

β) Η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση είναι:

$$K_{ολ}(πριν) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}0,1 \cdot 100^2 J \Rightarrow K_{ολ}(πριν) = 500J$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος μετά την κρούση είναι:

$$K_{ολ}(μετά) = \frac{1}{2}(m+M)V_K^2 = \frac{1}{2}1 \cdot 10^2 J \Rightarrow K_{ολ}(μετά) = 50J$$

$$\Delta K_{ολ} = K_{ολ}(μετά) - K_{ολ}(πριν) = (50 - 500)J \Rightarrow \Delta K_{ολ} = -450J$$

γ)

Α' Τρόπος:

Φαινόμενο 2^ο: Κίνηση του σώματος m.

$$\Sigma F = m\alpha \Rightarrow F = m\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{F}{m} = \frac{4500}{0,1} m/s^2 \Rightarrow \alpha = 45 \cdot 10^3 m/s^2 \quad (1)$$

$$V_K = v - \alpha t \quad (2)$$

$$s + x = vt - \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (3)$$

Φαινόμενο 3^ο: Κίνηση του σώματος M.

$$\Sigma F = M\alpha_M \Rightarrow F = M\alpha_M \Rightarrow \alpha_M = \frac{F}{M} = \frac{4500}{0,9} m/s^2 \Rightarrow \alpha_M = 5 \cdot 10^3 m/s^2 \quad (4)$$

$$V_K = \alpha_M t \quad (5)$$

$$s = \frac{1}{2}\alpha_M t^2 \quad (6)$$

$$(2) = (5) : v - \alpha t = \alpha_M t \Rightarrow (\alpha_M + \alpha)t = v \Rightarrow t = \frac{v}{\alpha_M + \alpha} = \frac{100}{50 \cdot 10^3} s \Rightarrow t = 2 \cdot 10^{-3} s$$

Β' Τρόπος:

Εφαρμόζουμε για το κιβώτιο το 2^ο νόμο του Νεύτωνα στη γενικευμένη του μορφή.

$$\Sigma \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

Επιλέγοντας θετική φορά προς τα δεξιά, η παραπάνω σχέση γράφεται αλγεβρικά:

$$F = \frac{mV_{\kappa} - mv}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{mV_{\kappa} - mv}{F} = \frac{m(V_{\kappa} - v)}{F} \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{0,1\text{kg} \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 100 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)}{-4,5 \cdot 10^3 \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow \Delta t = 2 \cdot 10^{-3} \text{s}$$

δ)

Α΄ Τρόπος:

Αφαιρώντας τις (3) και (6) κατά μέλη, έχουμε:

$$x = vt - \frac{1}{2} \alpha t^2 - \frac{1}{2} \alpha_M t^2 = vt - \frac{1}{2} (\alpha + \alpha_M) t^2 =$$

$$= \left(100 \cdot 2 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{2} 50 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-6} \right) \text{m} = (0,2 - 0,1) \text{m} \Rightarrow$$

$$x = 0,1 \text{m}$$

Β΄ Τρόπος:

Η δύναμη F που ασκείται από το κιβώτιο στο βλήμα (προκαλεί τη μείωση της κινητικής ενέργειας του βλήματος) και η δύναμη F' που ασκείται από το βλήμα στο κιβώτιο (προκαλεί την αύξηση της κινητικής ενέργειας του κιβωτίου) έχουν ίσα μέτρα.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας για το βλήμα.

$$\frac{1}{2} mV_{\kappa}^2 - \frac{1}{2} mv^2 = -F(s+x) \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας για το κιβώτιο.

$$\frac{1}{2} MV_{\kappa}^2 - 0 = F's \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) παίρνουμε:

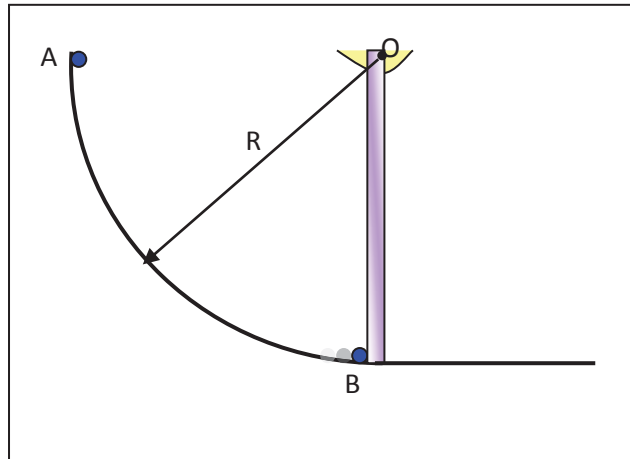
$$\frac{1}{2} mV_{\kappa}^2 - \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} MV_{\kappa}^2 = -Fx \Rightarrow x = \frac{mv^2 - (m+M)V_{\kappa}^2}{2F}$$

Με αριθμητική αντικατάσταση προκύπτει:

$$x = \frac{0,1\text{kg} \cdot (100\text{m/s})^2 - 1\text{kg} \cdot (10\text{m/s})^2}{2 \cdot 4,5 \cdot 10^3 \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow x = 0,1 \text{m}$$

Πρόβλημα 10. (περιέχει και ύλη Στερεού σώματος)

Το υλικό σημείο μάζας $m = \sqrt{3}\text{kg}$ αφήνεται να κινηθεί από το σημείο Α ενός λείου κατακόρυφου οδηγού σε σχήμα τεταρτοκυκλίου ακτίνας $R = 0,15\text{ m}$. Όταν το υλικό σημείο φτάσει στο σημείο Β συγκρούεται ανελαστικά με μία λεπτή ομογενή κατακόρυφη ράβδο μάζας $M = 9\text{kg}$ και μήκους $\ell = R = 0,15\text{ m}$ που μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από το αρθρωμένο άκρο της Ο. Μετά την κρούση το υλικό σημείο αποκτά ταχύτητα μέτρου ίσου με το μισό από αυτό που είχε ελάχιστα πριν την κρούση και αντίθετης φοράς.



Αν δίνονται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12}ML^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{ m/s}^2$, να υπολογίσετε:

- το μέτρο της ταχύτητας του υλικού σημείου ελάχιστα πριν την κρούση.
- το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου αμέσως μετά την κρούση.
- τη μέγιστη γωνία εκτροπής που θα σχηματίσει η ράβδος με την κατακόρυφο.
- την απόλυτη τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της ράβδου σε εκείνο το σημείο.

Λύση

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Ο υπολογίζεται από το θεώρημα Steiner:

$$I_O = I_{\text{cm}} + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}M\ell^2 + M\frac{\ell^2}{4} \Rightarrow I_O = \frac{1}{3}M\ell^2 \quad (1)$$



$$\omega = 10 \text{ rad/s}$$

γ) Φαινόμενο 3^ο: Κίνηση της ράβδου από τη θέση I στη θέση II.

Στο τρίγωνο ΟΝΚ έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\ell - H}{\ell/2} \Rightarrow \ell - H = \frac{\ell}{2} \sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow H = \ell - \frac{\ell}{2} \sigma\upsilon\nu\varphi \quad (3)$$

Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας.

$$E_{\text{MHX}}(\text{I}) = E_{\text{MHX}}(\text{II}) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} I_O \omega^2 + Mg \frac{\ell}{2} = 0 + MgH \xrightarrow{(3)}$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{3} M \ell^2 \omega^2 + Mg \frac{\ell}{2} = Mg \left(\ell - \frac{\ell}{2} \sigma\upsilon\nu\varphi \right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{6} \ell \omega^2 = -\frac{g}{2} + g \left(1 - \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu\varphi \right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{6} \ell \omega^2 = \frac{g}{2} (1 - \sigma\upsilon\nu\varphi) \Rightarrow$$

$$1 - \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\ell \omega^2}{3g} \Rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = 1 - \frac{\ell \omega^2}{3g} = 1 - \frac{0,15 \cdot 100}{30} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\varphi = 60^\circ$$

δ) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι η συνισταμένη των ροπών

$$\left| \frac{dL}{dt} \right| = |\Sigma \tau| \Rightarrow \left| \frac{dL}{dt} \right| = |\Sigma \tau| = MgD = Mg \frac{\ell}{2} \eta\mu\varphi = 9 \cdot 10 \cdot \frac{0,15}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ N} \cdot \text{m} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{dL}{dt} \right| = 3,375\sqrt{3} \text{ N} \cdot \text{m}$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 21/11/2018

Επιμέλεια: Αντώνιος Γεωργούσης, Νικόλαος Στέρπης
Επιστημονικός έλεγχος: Βασίλειος Ραυτόπουλος, Κωνσταντίνος Στεφανίδης