

B. ΘΕΜΑΤΑ

1. ΑΠΛΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

B.1.1 Υλικό σημείο κάνει ΑΑΤ. Αν η εξίσωση απομάκρυνσης είναι της μορφής $x=A\sin\omega t$ τότε οι εξισώσεις ταχύτητας και επιτάχυνσης είναι:

$$\alpha. v=v_0\sin\omega t, \quad a=-a_0\sin\omega t$$

$$\beta. v=v_0\cos\omega t \quad a=a_0\cos\omega t$$

$$\gamma. v=-v_0\sin\omega t \quad a=-a_0\cos\omega t$$

Απάντηση:

Η ταχύτητα προηγείται φασικά της απομάκρυνσης κατά $\pi/2$ rad. Άρα:

$$x=A\sin(\omega t)=A\cos(\omega t+\pi/2)$$

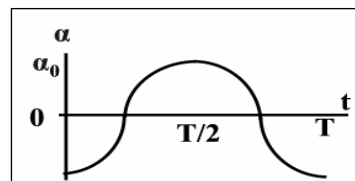
$$v=v_0\cos(\omega t+\pi/2+\pi/2)=v_0\cos(\omega t+\pi) \rightarrow v=-v_0\cos\omega t$$

Η επιτάχυνση προηγείται φασικά της απομάκρυνσης κατά π rad. Άρα:

$$a=a_0\cos(\omega t+\pi/2+\pi)=a_0\cos(\omega t+3\pi/2) \rightarrow a=-a_0\sin\omega t$$

Σωστό είναι το (γ)

B.1.2 Σε μια ΑΑΤ η γωνιακή συχνότητα είναι ω και η μέγιστη ταχύτητα v_0 . Αν η επιτάχυνση, a , μεταβάλλεται με το χρόνο με τον τρόπο που φαίνεται στη γραφική παράσταση τότε οι εξισώσεις της ταχύτητας και της απομάκρυνσης έχουν τη μορφή:



$$\alpha. v=-v_0\cos\omega t \quad x=-A\sin(\omega t+\pi/2)$$

$$\beta. v=v_0\sin\omega t \quad x=A\sin(\omega t)$$

$$\gamma. v=-v_0\sin\omega t, \quad x=A\sin(\omega t+\pi/2)$$

Απάντηση

Από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι η επιτάχυνση είναι της μορφής $a=a_0\sin(\omega t+3\pi/2)$

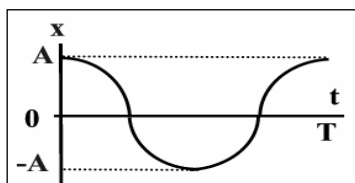
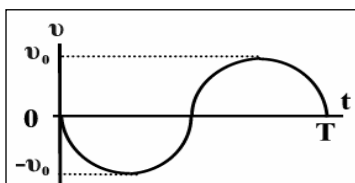
Η ταχύτητα καθυστερεί της επιτάχυνσης κατά $\pi/2$ rad συνεπώς η εξίσωσή της ως προς το χρόνο θα είναι:

$$v=v_0\sin(\omega t+3\pi/2-\pi/2) \rightarrow v=v_0\sin(\omega t+\pi) \rightarrow v=-v_0\sin\omega t$$

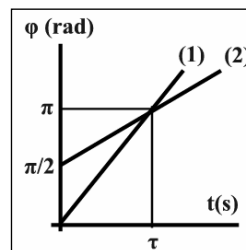
Η απομάκρυνση καθυστερεί της επιτάχυνσης κατά π rad συνεπώς:

$$x=A\sin(\omega t+3\pi/2-\pi) \rightarrow x=A\sin(\omega t+\pi/2)$$

Σωστό είναι το (γ)



B.1.3 Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε τη μεταβολή φάσης δύο ΑΑΤ που κάνουν δύο υλικά σημεία Σ_1 και Σ_2 ίδιας μάζας, m , με πλάτη $A_1=A$ και $A_2=2A$. Ποιες από τις σχέσεις που ακολουθούν είναι σωστές και ποιες λανθασμένες; πρόταση είναι η σωστή;



I. Η σχέση των περιόδων είναι $T_2=2T_1$

II. Για τις μέγιστες τιμές των ταχυτήτων ισχύει, $v_{01}=v_{02}$

III. Για τις ενέργειες ισχύει, $E_1=E_2$.

Απάντηση:

I. Το υλικό σημείο Σ_1 έχει φάση της μορφής $\phi_1=\omega_1 t$ ενώ το Σ_2 , $\phi_2=\frac{\pi}{2}+\omega_2 t$. Τη χρονική στιγμή $t=\tau$ οι φάσεις είναι ίσες με π rad σύμφωνα με τη γραφική παράσταση:

Άρα $\omega_1 \tau = \pi$ (1) και $\omega_2 \tau + \frac{\pi}{2} = \pi \rightarrow \omega_2 \tau = \frac{\pi}{2}$ (2) Από (1) και (2) $\rightarrow \omega_1 = 2\omega_2 \rightarrow$ Άρα **$T_2=2T_1$** .

Άρα είναι **Σωστή**

II. Για τις μέγιστες ταχύτητες $v_{01}=A_1\omega_1=A\omega_1$ και $v_{02}=A_2\omega_2=2A_1\frac{\omega_1}{2}=A_1\omega_1 \rightarrow$ **$v_{02}=v_{01}$**

Άρα είναι **Σωστή**

III. Οι σταθερές επαναφοράς των ΑΑΤ είναι $D_1=m\omega_1^2$ και $D_2=m\omega_2^2$ άρα $D_1=4D_2$.

$E_1 = \frac{1}{2}D_1A_1^2 = \frac{1}{2}D_1A^2$

$E_2 = \frac{1}{2}D_2A_2^2 = \frac{1}{2}\frac{D_1}{4}4A^2 = \frac{1}{2}D_1A^2$ Άρα **$E_1=E_2$** Άρα είναι **Σωστή**

B.1.4 Υλικό σημείο κάνει ΑΑΤ με πλάτος A . Τη χρονική στιγμή $t=0$ η ταχύτητα είναι $v=v_0/2$ και η απομάκρυνση $x>0$, Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι

α. $x=A \eta\mu(\omega t+\pi/6)$,

β. $x=A \eta\mu(\omega t+5\pi/3)$,

γ. $x=A \eta\mu(\omega t+\pi/3)$

Απάντηση:

Η εξίσωση της ταχύτητας είναι: $v=v_0\sigma\upsilon\nu(\omega t+\phi_0) \rightarrow \frac{v_0}{2} = v_0\sigma\upsilon\nu(\omega t+\phi_0) \xrightarrow{t=0} \sigma\upsilon\nu\phi_0=1/2 \rightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\phi_0=\sigma\upsilon\nu\pi/3 \rightarrow \phi_0=2k\pi-\pi/3 \xrightarrow{k=1} \phi=5\pi/3 \text{ rad}$

$\phi_0=2k\pi+\pi/3 \xrightarrow{k=0} \phi=\pi/3 \text{ rad}$

για $x>0 \rightarrow A \eta\mu(\omega t+\phi_0)>0 \rightarrow \eta\mu\phi_0>0$ άρα $\phi_0=\pi/3 \text{ rad}$

Άρα $x=A \eta\mu(\omega t+\pi/3)$ Σωστό είναι το (γ)

B.1.5 Υλικό σημείο κάνει ΑΑΤ με πλάτος A . Τη χρονική στιγμή $t=0$ η ταχύτητα είναι $v=-v_0/2$ και η απομάκρυνση $x<0$. Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι

α. $x=A \eta\mu(\omega t+\pi/3)$,

β. $x=A \eta\mu(\omega t+4\pi/3)$,

γ. $x=A \eta\mu(\omega t+2\pi/3)$

Απάντηση:

Η εξίσωση της ταχύτητας είναι: $v=v_0\sigma\upsilon\nu(\omega t+\phi_0) \rightarrow -\frac{v_0}{2} = v_0\sigma\upsilon\nu(\omega t+\phi_0) \xrightarrow{t=0} \sigma\upsilon\nu\phi_0=-1/2 \rightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\phi_0=\sigma\upsilon\nu2\pi/3 \rightarrow \phi_0=2k\pi-2\pi/3 \xrightarrow{k=1} \phi_0=4\pi/3 \text{ rad}$

$\phi_0=2k\pi+2\pi/3 \xrightarrow{k=0} \phi_0=2\pi/3 \text{ rad}$

για $x<0 \rightarrow A \eta\mu(\omega t+\phi_0)<0 \rightarrow \eta\mu\phi_0<0$ άρα $\phi_0=4\pi/3 \text{ rad}$.

Άρα $x=A \eta\mu(\omega t+4\pi/3)$ Σωστό είναι το (β)

B.1.6 Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A . Η ελάχιστη χρονική διάρκεια για τη μετάβαση του σώματος από τη θέση $x_0=0$ στη θέση $x_1=A/2$ είναι Δt_1 . Η ελάχιστη χρονική διάρκεια για τη μετάβαση του σώματος από τη θέση $x_1=A/2$ στη θετική ακραία θέση της ταλάντωσης $x=A$ είναι Δt_2 . Ισχύει:

α. $\Delta t_1=2\Delta t_2$

β. $\Delta t_1=\Delta t_2$

γ. $\Delta t_1= \frac{1}{2}\Delta t_2$

Απάντηση:

Έστω ότι τη χρονική στιγμή $t_0=0$ είναι στη θέση $x_0=0$ με $v>0$. Άρα $x=A\eta\mu(\omega t)$. Τη χρονική στιγμή t_1 θα είναι στη θέση $x_1=A/2$ με $v>0$. Άρα

$$x=A\eta\mu(\omega t) \rightarrow \frac{A}{2} = A\eta\mu(\omega t) \rightarrow \eta\mu(\omega t)=1/2=\eta\mu(\pi/6) \rightarrow \omega t=2\kappa\pi+\pi/6 \quad (1) \quad \text{και} \quad \omega t=2\kappa\pi+5\pi/6 \quad (2)$$

Για πρώτη φορά έχουμε για $\kappa=0$ στην (1): $\omega t_1=\pi/6 \rightarrow t_1=T/12$

Άρα η χρονική διάρκεια για να πάει από τη θέση $x_0=0$ στη θέση x_1 είναι $\Delta t_1=t_1-t_0=T/12$

Στη θέση $x_2=A$ θα βρεθεί τη χρονική στιγμή $t_2=T/4$. Άρα από τη θέση x_1 στη θέση x_2 χρειάζεται χρονικό διάστημα $\Delta t_2=T/4-T/12 \rightarrow \Delta t_2=T/6$

Άρα $\Delta t_2=2\Delta t_1$ **Σωστό είναι το (γ)**

B.1.7 Απλή αρμονική ταλάντωση έχει πλάτος A και περίοδο T . Το χρονικό διάστημα της απευθείας μετάβασης από τη θέση $x_1=A/2$ στη θέση $x_2=-A/2$ είναι:

α. $t=T/6$

β. $t=T/2$

γ. $t=T/3$

δ. $t=T/12$

Απάντηση:

Για την απευθείας μετάβαση από τη θέση x_1 τη θέση x_2 πρέπει αν υποθέσουμε ότι τη χρονική στιγμή $t_1=0$ είναι στη θέση x_1 , η ταχύτητα να είναι $v<0$. Κατασκευάζουμε την εξίσωση απομάκρυνσης με αυτά τα δεδομένα, υπολογίζοντας την αρχική φάση φ_0 .

$$x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \rightarrow \frac{A}{2} = A\eta\mu(\varphi_0) \rightarrow \eta\mu\varphi_0=1/2=\eta\mu(\pi/6) \rightarrow \varphi_0=2\kappa\pi+\pi/6 \rightarrow \varphi_0=\pi/6 \quad \text{και}$$

$$\varphi_0=2\kappa\pi+5\pi/6 \rightarrow \varphi_0=5\pi/6 \quad (2)$$

Για $v<0$ πρέπει $\sin\varphi_0<0 \rightarrow \varphi_0=5\pi/6$

$$\text{Άρα } x=A\eta\mu(\omega t+5\pi/6)$$

Τη χρονική στιγμή t_2 θα βρίσκεται στη θέση $x=-A/2$ για πρώτη φορά. Άρα

$$x=A\eta\mu(\omega t+5\pi/6) \rightarrow -\frac{A}{2} = A\eta\mu(\omega t+5\pi/6) \rightarrow \eta\mu(\omega t+5\pi/6) = \eta\mu(-\pi/6) \rightarrow$$

$$\omega t+5\pi/6=2\kappa\pi-\pi/6 \quad (3) \quad \text{και} \quad \omega t+5\pi/6=2\kappa\pi+\pi+\pi/6 \quad (4)$$

Για $\kappa=0$ στη (3) $\rightarrow t<0$, άτοπο

Για $\kappa=0$ στην (4) $\rightarrow \omega t+5\pi/6=7\pi/6 \rightarrow \omega t=\pi/3 \rightarrow t=T/6$ **Σωστό είναι το (α)**

B.1.8 Υλικό σημείο κάνει ΑΑΤ με εξίσωση απομάκρυνσης $x=0,1\eta\mu(\pi t/6)$ (S.I). Το ελάχιστο χρονικό διάστημα ώστε το υλικό σημείο να πάει από τη θέση $x_1=0,05\text{m}$ έχοντας θετική ταχύτητα, στη θέση $x_2=0,05\sqrt{2}\text{m}$ έχοντας, αρνητική ταχύτητα είναι:

α. $\Delta t=0,5\text{s}$

β. $\Delta t=3,5\text{s}$

γ. $\Delta t=1\text{s}$

Απάντηση:

Έστω ότι στη θέση $x_1=0,05\text{m}$ βρίσκεται για πρώτη φορά με $v>0$ τη χρονική στιγμή t_1 .

$$x=0,1\eta\mu(\pi t/6) \rightarrow 0,05=0,1\eta\mu(\pi t_1/6) \rightarrow \eta\mu(\pi t_1/6)=\eta\mu(\pi/6) \rightarrow \pi t_1/6=2\kappa\pi+\pi/6 \quad \kappa=0 \quad t_1=1\text{s}$$

Στη θέση $x_2=0,05\sqrt{2}\text{m}$ βρίσκεται για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή t_2 με $v<0$.

$$x=0,1\eta\mu(\pi t/6) \rightarrow 0,05\sqrt{2}=0,1\eta\mu(\pi t_2/6) \rightarrow \eta\mu(\pi t_2/6)=\eta\mu(\pi/4) \rightarrow \pi t_2/6=2\kappa\pi+\pi/4 \quad \kappa=0 \quad t_2=1,5\text{s}$$

$$\text{και } \pi t_2/6=2\kappa\pi+\pi-\pi/4 \quad \kappa=0 \rightarrow t_2=4,5\text{s}$$

Αλλά η τιμή $t_2=1,5\text{s}$ κάνει την ταχύτητα $v=v_0\sin(\pi t_2/6)=v_0\sin(\pi/4)>0$.

Ενώ η τιμή $t_2=4,5\text{s}$ κάνει την ταχύτητα $v=v_0\sin(\pi t_2/6)=v_0\sin(3\pi/4)<0$. Άρα δεκτή είναι η $t_2=4,5\text{s}$

Οπότε $\Delta t=t_2-t_1=4,5\text{s}-1\text{s}=3,5\text{s}$. Σωστό είναι το (β).

B.1.9 Δύο υλικά σημεία Σ_1 και Σ_2 εκτελούν ΑΑΤ στη ίδια ευθεία με περίοδο $T=2\text{s}$ και πλάτος $A=2\text{cm}$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το υλικό σημείο Σ_1 είναι στη θέση $x=1\text{cm}$ με $v>0$, ενώ το Σ_2 στη θέση $x=1\text{cm}$ με $v<0$. Η επόμενη χρονική στιγμή μέσα στην πρώτη περίοδο της κίνησής τους στην οποία τα δύο υλικά σημεία θα συναντηθούν και πάλι, είναι:

α. $t=1\text{s}$

β. $t=1,5\text{s}$

γ. $t=2\text{s}$

δ. $t=3\text{s}$

Απάντηση:

Φτιάχνουμε τις εξισώσεις απομάκρυνσης των Σ_1 και Σ_2 με τα x σε cm, t σε s.

$$x_1=2\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \quad x=1\text{cm}, t=0, v>0 \rightarrow 1=2\eta\mu\varphi_0 \rightarrow \varphi_0=\pi/6\text{rad} \text{ άρα } x_1=1\eta\mu(\omega t+\pi/6)$$

$$x_2=2\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \quad x=1\text{cm}, t=0, v<0 \rightarrow 1=2\eta\mu\varphi_0 \rightarrow \varphi_0=5\pi/6\text{rad} \text{ άρα } x_2=1\eta\mu(\omega t+5\pi/6)$$

Για τη συνάντηση ισχύει $x_1=x_2$.

$$\begin{aligned} x_1=x_2 &\rightarrow \eta\mu(\omega t+\pi/6)=\eta\mu(\omega t+5\pi/6) \rightarrow \eta\mu(\omega t+\pi/6)=\eta\mu(\omega t+\pi-\pi/6) \rightarrow \eta\mu(\omega t+\pi/6)=-\eta\mu(\omega t-\pi/6) \rightarrow \\ \eta\mu(\omega t+\pi/6)+\eta\mu(\omega t-\pi/6) &=0 \rightarrow 2\sin\frac{\omega t+\pi/6-\omega t+\pi/6}{2}\eta\mu\frac{\omega t+\pi/6+\omega t-\pi/6}{2}=0 \rightarrow 2\sin(\pi/6)\eta\mu\omega t=0 \rightarrow \eta\mu(\omega t)=0 \\ &\rightarrow \omega t=2\kappa\pi \quad (1) \text{ και } \omega t=2\kappa\pi+\pi \quad (2) \end{aligned}$$

Από τη (2) για $\kappa=0$ έχουμε $\frac{2\pi t}{T}=\pi \rightarrow t=\frac{T}{2}=1\text{s}$. Άρα σωστό είναι το (α)

B.1.10 Υλικό σημείο κάνει ΑΑΤ χωρίς αρχική φάση και περνάει από δύο θέσεις Κ και Λ που απέχουν μεταξύ τους απόσταση $(ΚΛ)=d=10\sqrt{3}\text{cm}$ με την ίδια κατά μέτρο και κατεύθυνση ταχύτητα μέσα σε χρόνο $\Delta t_1=4\text{s}$. Αφού περάσει από το σημείο Λ, για να ξαναγυρίσει και πάλι σε αυτό, αλλά με αντίθετη φορά κίνησης χρειάζεται χρόνο $\Delta t_2=2\text{s}$.
Να βρείτε την περίοδο και το πλάτος της ΑΑΤ.

Απάντηση:

Αφού $|v_1|=|v_2|$ τα δύο σημεία Κ και Λ είναι συμμετρικά ως προς τη θέση ισορροπίας $O(x=0)$ οπότε $(ΚΟ)=(ΟΛ)=|x|=\frac{d}{2}=5\sqrt{3}\text{cm}$.

Αν χρειάζεται χρόνο $\Delta t_1=4\text{s}$ να διανύσει απευθείας την απόσταση d τότε θα χρειάζεται 2s για να πάει από το Κ στο Ο και άλλα 2s για να πάει από το Ο στο Λ.

Η εξίσωση απομάκρυνσης του υλικού σημείου είναι $x=A\eta\mu\omega t$ με $x=5\sqrt{3}\text{cm}$ για $t_1=2\text{s}$ και $t_2=t_1+\Delta t_2=4\text{s}$. Άρα:

$$5\sqrt{3}=A\eta\mu\omega t_1=A\eta\mu(4\pi/T) \quad (1) \quad \text{και} \quad 5\sqrt{3}=A\eta\mu\omega t_2=A\eta\mu(8\pi/T) \quad (2).$$

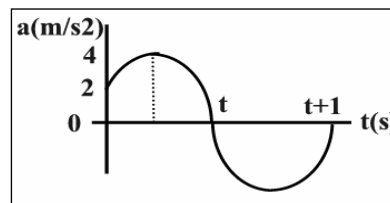
Από (1) και (2) έχουμε:

$$A\eta\mu(8\pi/T)=A\eta\mu(4\pi/T) \rightarrow \eta\mu(8\pi/T)=\eta\mu(4\pi/T) \rightarrow \frac{8\pi}{T}=2\kappa\pi+\frac{4\pi}{T} \quad \clubsuit \quad \rightarrow 8=4 \text{ άτοπο}$$

$$\text{και} \quad \frac{8\pi}{T}=2\kappa\pi+\pi-\frac{4\pi}{T} \quad \clubsuit \quad \rightarrow \frac{12\pi}{T}=\pi \rightarrow T=12\text{s}$$

$$x=A\eta\mu(2\pi t_1/T) \rightarrow 5\sqrt{3}=A\eta\mu\frac{2\pi \cdot 2}{12} \rightarrow 5\sqrt{3}=A\eta\mu(\frac{\pi}{3}) \rightarrow A=10\text{cm}$$

B.1.11 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η μεταβολή της επιτάχυνσης ενός υλικού σημείου που κάνει ΑΑΤ. Δίνεται $\pi^2=10$. Να γραφούν οι εξισώσεις απομάκρυνσης και ταχύτητας και να παρασταθούν γραφικά.



Απάντηση:

Από το διάγραμμα παίρνουμε τις πληροφορίες ότι: $T/2=1\text{s} \rightarrow T=2\text{s}$.
Ακόμα $a_0=4\text{m/s}^2$ και για $t=0$, $a=2\text{m/s}^2$. Αφού πηγαίνει προς τη θέση όπου $a=+a_0$, δηλαδή $x=-A$ αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα έχει αρνητική αλγεβρική τιμή $v<0$.

$$\text{Άρα: } a=-a_0\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \rightarrow \eta\mu\varphi_0=-0,5 \rightarrow \varphi_0=2\kappa\pi-\pi/6 \quad \clubsuit \quad \varphi_0=-\pi/6 \text{ rad}$$

$$\text{και } \varphi_0=2\kappa\pi+\pi+\pi/6 \quad \clubsuit \quad \varphi_0=7\pi/6 \text{ rad}$$

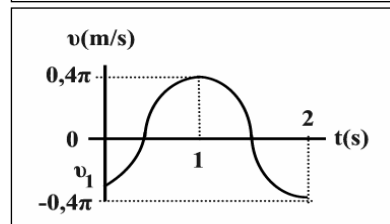
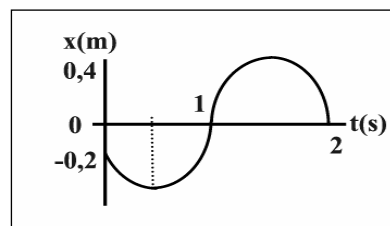
Αλλά για $v=v_0\sigma\upsilon\nu\varphi_0=v_0\sigma\upsilon\nu(7\pi/6)<0$. Άρα $\varphi_0=7\pi/6 \text{ rad}$

$$\text{Ακόμα } \omega=2\pi/T=\pi \text{ rad} \quad \text{και} \quad a_0=A\omega^2 \rightarrow A=0,4\text{m}, \quad v_0=A\omega=0,4\pi\text{m/s}$$

Οπότε οι εξισώσεις είναι:

$$x=0,4\eta\mu(\pi t+7\pi/6), \quad v=0,4\pi\sigma\upsilon\nu(\pi t+7\pi/6) \quad \text{και} \quad a=-4\eta\mu(\pi t+7\pi/6) \text{ στο SI.}$$

Για $t=0$ έχουμε $x_1=-0,2\text{m}$ και $v_1=-0,2\pi\sqrt{3}\text{m/s}$



B.1.12 Δύο σώματα Σ_1, Σ_2 με ίσες μάζες ισορροπούν κρεμασμένα από κατακόρυφα ελατήρια k_1, k_2 έτσι ώστε $k_2=2k_1$. Απομακρύνουμε τα σώματα από τη θέση ισορροπίας κατά A και $2A$ αντίστοιχα και τα αφήνουμε ελεύθερα να κάνουν ΑΑΤ.

I. Τα σώματα διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους:

α. Ταυτόχρονα.

β. Σε διαφορετικές χρονικές στιγμές με πρώτο το Σ_1 .

γ. Σε διαφορετικές χρονικές στιγμές με πρώτο το Σ_2 .

II. Ο λόγος των μέγιστων τιμών των κινητικών ενεργειών είναι:

$$\alpha. \frac{K_{0,1}}{K_{0,2}} = \frac{1}{8}$$

$$\beta. \frac{K_{0,1}}{K_{0,2}} = \frac{1}{4}$$

$$\gamma. \frac{K_{0,1}}{K_{0,2}} = \frac{1}{2}$$

Απάντηση:

I. Υπολογίζουμε τις περιόδους. $T_1=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}$ και $T_2=2\pi\sqrt{\frac{m}{2k_1}}$, Άρα $T_2<T_1$.

Για να περάσουν από τη θέση ισορροπίας χρειάζονται χρόνο ίσο με $T/4$, ανεξάρτητα από το πλάτος, άρα $t_2<t_1$. Συνεπώς πρώτο περνάει το σώμα Σ_2 . Σωστό είναι το **(γ)**

II. Η μέγιστη τιμή της κινητικής ενέργειας είναι ίση με την ενέργεια της κάθε ταλάντωσης. Άρα:

$$\alpha. \frac{K_{0,1}}{K_{0,2}} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{2}k_1A^2}{\frac{1}{2}k_2(2A)^2} \rightarrow \frac{K_{0,1}}{K_{0,2}} = \frac{1}{8} \quad \text{Άρα σωστό είναι το (α)}$$

B.1.13 Σώμα άγνωστης μάζας ισορροπεί σε ελεύθερο άκρο ελατηρίου προκαλώντας σε αυτό παραμόρφωση d . Αν απομακρύνουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας μέχρι να φτάσει στο άκρο του φυσικού μήκους και το αφήνουμε να κάνει ΑΑΤ,

I. τότε η περίοδος των ΑΑΤ είναι:

$$\alpha. T=2\pi\sqrt{d/g}$$

$$\beta. T=2\pi\sqrt{g/d}$$

$$\gamma. T=\pi\sqrt{d/g}$$

II. η μέγιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου είναι:

$$\alpha. U_{ελ,max} = \frac{1}{2}kd^2$$

$$\beta. U_{ελ,max} = kd^2$$

$$\gamma. U_{ελ,max} = 2kd^2$$

III. Το έργο της δύναμης που ασκήσαμε για να το θέσουμε σε ταλαντώσεις είναι:

$$\alpha. W=kd^2$$

$$\beta. W=2kd^2$$

$$\gamma. W= \frac{1}{2}kd^2$$

Απάντηση

I. Γράφουμε τη συνθήκη ισορροπίας: $\Sigma F=0 \rightarrow mg=kd \rightarrow \frac{m}{k} = \frac{d}{g}$

Άρα $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}$ Άρα σωστό είναι το **(α)**

II. Το σώμα ταλαντώνεται με πλάτος $A=d$. Το ελατήριο παρουσιάζει μέγιστη επιμήκυνση $2d$ όταν το σώμα βρίσκεται στην κατώτερη θέση της τροχιάς του. Η μέγιστη τιμή της δυναμικής του ενέργειας είναι:

$$U_{ελ,max} = \frac{1}{2}k(2 \cdot d)^2 \rightarrow U_{ελ,max} = 2kd^2 \quad \text{Άρα σωστό είναι το (γ)}$$

III. Το έργο της δύναμης που έβαλε το σύστημα σε ταλαντώσεις ισούται πάντοτε με την ενέργεια της ταλάντωσης (βλέπε B.1.14). Συνεπώς

$$W=E = \frac{1}{2}kA^2 \rightarrow W= \frac{1}{2}kd^2 \quad \text{Άρα σωστό είναι το (γ)}$$

B.1.14 Σώμα μάζας m ισορροπεί δεμένο στο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k , το άλλο άκρο του οποίου έχει στερεωθεί ακλόνητα σε οροφή.

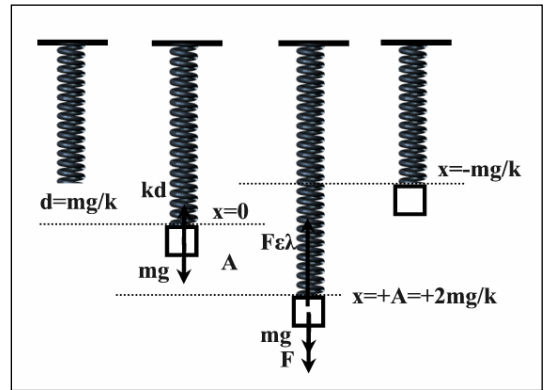
I. Απομακρύνουμε το σώμα προς τα κάτω από τη θέση ισορροπίας του κατά A και το αφήνουμε ελεύθερο, χωρίς αρχική ταχύτητα να κάνει ΑΑΤ. Δείξτε ότι το έργο της δύναμης, F , που ασκήσαμε ισούται με την ενέργεια της ταλάντωσης.

II. Απομακρύνουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας κατά $x_1=2mg/k$ και τη χρονική στιγμή $t_0=0$ το αφήνουμε ελεύθερο, χωρίς αρχική ταχύτητα. Το σώμα περνάει από τη θέση που ορίζει το άκρο του φυσικού μήκους του ελατηρίου τη χρονική στιγμή:

$$\alpha. t = \frac{5\pi}{6}\sqrt{m/k}$$

$$\beta. t = \frac{2\pi}{3}\sqrt{m/k}$$

$$\gamma. t = \frac{\pi}{2}\sqrt{m/k}$$



Απάντηση:

I. Το σώμα ισορροπεί με το ελατήριο ανοιγμένο κατά, d , όπου: $\Sigma F=0 \rightarrow mg-kd=0 \rightarrow d=mg/k$. (1)

Κατά τη μετατόπιση του σώματος προς τα κάτω από τη θέση ισορροπίας του κατά A , ασκούνται, η μεταβλητή δύναμη F του χεριού μας, το βάρος mg και η δύναμη του ελατηρίου $F_{ελ}$. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι μηδέν. Γράφουμε το ΘΜΚΕ για να υπολογίσουμε το έργο W_F , της δύναμης F .

$$W_F + W_{mg} + W_{ελ} = \Delta K \quad (2)$$

$$W_{mg}=mg \cdot A \quad (3)$$

$$W_{ελ}=U_{ελ,αρχ}-U_{ελ,τελ}=\frac{1}{2}kd^2-\frac{1}{2}k(d+A)^2 \quad (4)$$

$$\Delta K=0 \quad (5)$$

$$(1)(2)(3)(4)(5): W_F + mgA + \frac{1}{2}kd^2 - \frac{1}{2}k(d+A)^2 = 0 \rightarrow W_F + mgA + \frac{1}{2}kd^2 - \frac{1}{2}kd^2 - kdA - \frac{1}{2}kA^2 = 0 \rightarrow$$

$$W_F = \frac{1}{2}kA^2 \rightarrow W_F = E$$

II. Θεωρούμε ως θετική τη φορά προς τα κάτω. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ είναι $x=+A=+2mg/k$ και συνεπώς η εξίσωση απομάκρυνσης της ΑΑΤ είναι: $x=A\eta\mu(\omega t+\pi/2)$ (1)

Από τη συνθήκη ισορροπίας στη θέση $x_0=0$ έχουμε:

$\Sigma F=0 \rightarrow mg-kd=0 \rightarrow d=mg/k$. Όπου d η αρχική επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση $x_0=0$. Αλλά εμείς ζητάμε τη χρονική στιγμή t_1 για την οποία το σώμα φτάνει στο άκρο του φυσικού μήκους δηλαδή στη θέση, x_1 με, $x_1=-d=-mg/k=-A/2$ (2)

$$\text{Από (1)(2)} \rightarrow -A/2 = A\eta\mu(\omega t+\pi/2) \rightarrow \eta\mu(\omega t+\pi/2) = -1/2 \rightarrow \eta\mu(\omega t+\pi/2) = \eta\mu(-\pi/6) \rightarrow$$

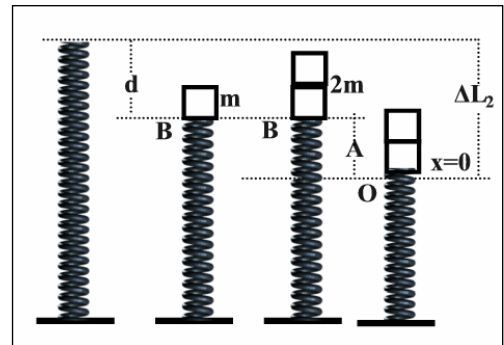
$$(i) (\omega t+\pi/2) = 2k\pi - \pi/6 \xrightarrow{k=0} t < 0 \text{ άτοπο}$$

$$(ii) (\omega t+\pi/2) = 2k\pi + \pi + \pi/6 \xrightarrow{k=0} \omega t + \pi/2 = \pi + \pi/6 \rightarrow \frac{2\pi t}{T} = \frac{2\pi}{3} \rightarrow t_1 = \frac{T}{3} \rightarrow t_1 = \frac{2\pi}{3}\sqrt{m/k}$$

Σωστό είναι το **(β)**

B.1.15 Ελατήριο σταθεράς k έχει το ένα άκρο του στερεωμένο στο οριζόντιο έδαφος και στο πάνω ελεύθερο άκρο προσαρμοσμένο σώμα μάζας $m_1=m$, που ισορροπεί. Το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά d . Τοποθετούμε πάνω στο σώμα, m_1 άλλο σώμα μάζας m_2 , με $m_2=m_1$ και το σύστημα αρχίζει να κάνει ΑΑΤ. Το πλάτος των ταλαντώσεων είναι:

- α. d β. $2d$ γ. $d/2$



Απάντηση

Το σώμα m_1 ισορροπεί στη θέση Β με το ελατήριο συσπειρωμένο κατά $\Delta L_1=d$ έτσι ώστε:

$$\Sigma F=0 \rightarrow mg-kd=0 \rightarrow d=mg/k \quad (1)$$

Όταν τοποθετούμε δεύτερο σώμα ίσης μάζας m , η θέση ισορροπίας του συστήματος είναι στη θέση Ο, χαμηλότερα από τη Β. Εκεί το ελατήριο παρουσιάζει συσπείρωση ΔL_2 τέτοια ώστε:

$$\Sigma F=0 \rightarrow 2mg-k\Delta L_2=0 \rightarrow \Delta L_2=2mg/k=2d \quad (2)$$

Όμως το πλάτος της ταλάντωσης του $2m$ είναι η απόσταση από το σημείο Β που αρχίζει η ταλάντωση ($v=0$) μέχρι τη νέα θέση ισορροπίας, Ο. Συνεπώς $A=\Delta L_2-\Delta L_1=2d-d \rightarrow A=d$.

Άρα σωστό είναι το (α).

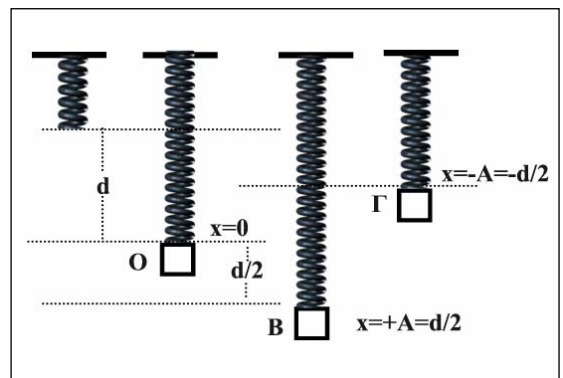
B.1.16 Στην κάτω άκρη κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k , η πάνω άκρη του οποίου είναι στερεωμένη σε ακλόνητο σημείο, σώμα μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $d/2$. Όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας, η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι d .

I. Στην κατώτερη θέση της ταλάντωσης του σώματος, ο λόγος της δύναμης του ελατηρίου προς τη δύναμη επαναφοράς είναι

- α. $\frac{F_{ελ}}{F_{επ}} = \frac{1}{3}$ β. $\frac{F_{ελ}}{F_{επ}} = 3$ γ. $\frac{F_{ελ}}{F_{επ}} = 2$

II. Στην ανώτερη θέση ταλάντωσης του σώματος, ο λόγος της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου προς τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι:

- α. $\frac{U_{ελ}}{U_{επ}} = 1$ β. $\frac{U_{ελ}}{U_{επ}} = 3$ γ. $\frac{U_{ελ}}{U_{επ}} = 2$



Απάντηση

I. Στη θέση πλάτους, Β, η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι $\Delta L=d+d/2=3d/2$ άρα

$F_{ελ}=k\Delta L=k(3d/2)=3kd/2$. Η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας είναι $x=d/2$, άρα η δύναμη επαναφοράς θα είναι: $F_{επ}=kx=k\frac{d}{2}$. Άρα: $\frac{F_{ελ}}{F_{επ}} = \frac{3kd/2}{kd/2} \rightarrow \frac{F_{ελ}}{F_{επ}} = 3$ Άρα σωστό είναι το (β)

II. Στη θέση Γ η επιμήκυνση του ελατηρίου από το φυσικό μήκος είναι $\Delta L=d-d/2=d/2$ αλλά και η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας είναι $x=-d/2$. Άρα:

$$U_{ελ} = \frac{1}{2}k\Delta L^2 = kd^2/8 \quad \text{και} \quad U_{ταλ} = \frac{1}{2}kx^2 = kd^2/8 \quad \text{Άρα} \quad \frac{U_{ελ}}{U_{επ}} = 1 \quad \text{Σωστό είναι το (α)}$$

B.1.17 Αρμονικός ταλαντωτής με σταθερά επαναφοράς k κάνει ΑΑΤ με πλάτος A , γωνιακή συχνότητα ω και εξίσωση απομάκρυνσης $x=A\eta\mu(\omega t)$. Τη δεύτερη φορά που περνάει από τη θέση x_1 στην οποία η κινητική ενέργεια είναι ίση με τη δυναμική ($K=U$) ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης είναι:

α. $\Delta U/\Delta t = -\frac{1}{2} kA^2\omega$

β. $\Delta U/\Delta t = -\frac{1}{4} kA^2\omega$

γ. $\Delta U/\Delta t = \frac{1}{4} kA^2\omega$

Απάντηση

$$E=K+U \xrightarrow{K=U} E=2U \rightarrow \frac{1}{2}kA^2=2(\frac{1}{2}kx^2) \rightarrow x=\pm A\sqrt{2}/2$$

$$E=K+U \xrightarrow{K=U} E=2K \rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2=2(\frac{1}{2}mv^2) \rightarrow v=\pm v_0\sqrt{2}/2$$

Τη δεύτερη φορά θα βρίσκεται σε θετική ακόμα απομάκρυνση $x>0$, αλλά θα έχει ταχύτητα αρνητικής αλγεβρικής τιμής, $v<0$ (θα είναι στην επιστροφή). Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι:

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\Sigma \Delta W}{\Delta t} = \frac{\Sigma F \cdot \Delta x}{\Delta t} = \Sigma F \cdot v = -kx \cdot v = -k \frac{A}{2} \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{v_0}{2} \sqrt{2}\right) = \frac{kA \cdot A\omega}{2} \rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{kA^2\omega}{2}$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας:

$$E=K+U \rightarrow \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta K}{\Delta t} + \frac{\Delta U}{\Delta t} \rightarrow 0 = \frac{\Delta K}{\Delta t} + \frac{\Delta U}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta t} = -\frac{\Delta K}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta t} = -\frac{kA^2\omega}{2} \quad \text{Σωστό είναι το (α)}^1$$

B.1.18 Υλικό σημείο κάνει ΑΑΤ με εξίσωση απομάκρυνσης $x=A\eta\mu(\omega t)$. Κάποια χρονική στιγμή t_1 έχει ταχύτητα ίση με $v=-v_0/2$ και επιβραδύνεται. Την ίδια χρονική στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης είναι:

α. $\frac{\Delta U}{\Delta t} = -\frac{kA^2\omega}{4}\sqrt{3}$

β. $\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{kA^2\omega}{4}$

γ. $\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{kA^2\omega}{4}\sqrt{3}$

Απάντηση

Γράφω την διατήρηση της ενέργειας του ταλαντωτή:

$$E=K+U \rightarrow \frac{kA^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} \rightarrow x^2 = A^2 - \frac{m v_0^2 \omega^2}{4km} \rightarrow x = \pm \frac{A}{2} \sqrt{3}.$$

Το υλικό σημείο έχει ταχύτητα αρνητικής αλγεβρικής τιμής και επιβραδύνεται. Αυτό σημαίνει ότι κινείται προς την αρνητική φορά αλλά βρίσκεται και στον αρνητικό ημιάξονα, διαφορετικά αν ήταν στον θετικό θα πήγαινε προς τη θέση ισορροπίας οπότε θα επιταχυνότανε. Άρα $x=-A\sqrt{3}/2$.

Η μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης ισούται με το αντίθετο του έργου της συντηρητικής δύναμης, δηλαδή της δύναμης επαναφοράς: $\Delta U = -W_{\Sigma F}$

Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ισούται με:

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{-W_{\Sigma F}}{\Delta t} = -\Sigma F \cdot \frac{dx}{dt} = -\Sigma F \cdot v = -(-kx) \cdot v \rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta t} = kxv = k \cdot \frac{-v_0}{2} \cdot \frac{-A}{2} \sqrt{3} \rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{kA^2\omega}{4}\sqrt{3}$$

Σωστό είναι το (γ).

¹ Στα θέματα 17 και 18 βλέπουμε δύο ισοδύναμους τρόπους υπολογισμού του ρυθμού μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ταλαντωτή.

B.1.19 Σώμα μάζας m και ισορροπεί δεμένο στο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k . Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Εκτρέπουμε το σώμα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά x από τη θέση ισορροπίας και το αφήνουμε ελεύθερο. Για να το κάνουμε αυτό δαπανήσαμε ενέργεια ίση με E_1 . Αντικαθιστούμε στο ίδιο ελατήριο το σώμα, με άλλο σώμα μάζας $2m$ και το θέτουμε και αυτό σε ταλαντώσεις αφού το εκτρέπουμε από τη θέση ισορροπίας κατά x και πάλι. Η ενέργεια που δαπανήσαμε τώρα είναι E_2 .

I. Για τις ενέργειες ισχύει.

α. $E_2=E_1$

β. $E_2=2E_1$

γ. $E_2= \frac{1}{2}E_1$

II. Για τη μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου ισχύει:

α. $U_1=U_2$

β. $U_1>U_2$

γ. $U_1<U_2$

Απάντηση:

I. Η ενέργεια E που δαπανάμε για να θέσουμε το σώμα σε ΑΑΤ ισούται με την ενέργεια της ταλάντωσης είναι δηλαδή ίση με $E= \frac{1}{2}kA^2$, δηλαδή εξαρτάται μόνο από τη σταθερά k και το πλάτος $A=d$. Συνεπώς οι ενέργειες είναι ίσες. Σωστό είναι το **(α)**.

* Βλέπε και θέμα B.1.14

II. $U_1= \frac{1}{2}k \Delta L_1^2= \frac{1}{2}k(d+x)^2$ όπου d η αρχική επιμήκυνση του ελατηρίου, $d=mg/k$

$$U_2= \frac{1}{2}k \Delta L_2^2= \frac{1}{2}k(2d+x)^2 \quad \text{όπου } 2d \text{ η νέα αρχική επιμήκυνση του ελατηρίου, } d=2mg/k$$

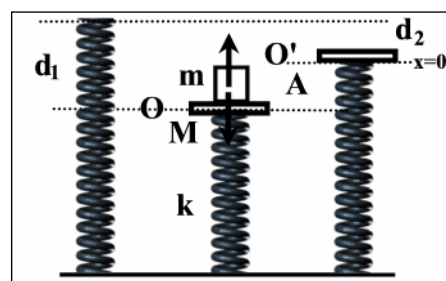
Άρα $U_2>U_1$ σωστό είναι το **(β)**

B.1.20 Ελατήριο σταθεράς, k , στηρίζεται με το ένα άκρο του κατακόρυφα στο έδαφος και φέρει στα πάνω ελεύθερο άκρο του, καλά συνδεδεμένο ένα δίσκο μάζας M και πάνω σε αυτόν ακουμπισμένο σώμα μάζας m . Το σύστημα ισορροπεί. Αν αφαιρέσουμε το σώμα μάζας m , τότε το σύστημα ελατήριο–δίσκος θα κάνει ΑΑΤ με ενέργεια

α. $E=M^2g^2/2k$

β. $E=m^2g^2/2k$

γ. $E=(M+m)^2g^2/2k$



Απάντηση

Στην αρχική θέση ισορροπίας, O , το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά d_1 από το φυσικό του μήκος. Στη νέα θέση ισορροπίας, O' , όταν αφαιρούμε το σώμα, m , η συσπείρωση είναι d_2 . Το πλάτος της ΑΑΤ είναι η διαφορά

$$A=d_1-d_2 \quad (1)$$

$$\Sigma F_1=0 \rightarrow (M+m)g-kd_1=0 \rightarrow d_1= \frac{(M+m)g}{k} \quad (2)$$

$$\Sigma F_2=0 \rightarrow Mg=kd_2 \rightarrow d_2= \frac{Mg}{k} \quad (3)$$

$$\text{Άρα από (1)(2)(3)} \rightarrow A=mg/k$$

$$\text{Η ενέργεια της ΑΑΤ είναι: } E= \frac{1}{2} k A^2 \rightarrow E= \frac{m^2 g^2}{2k} \quad \text{Σωστό είναι το (β)}$$

B.1.21 Σώμα μάζας m στερεώνεται στο ελεύθερο άκρο οριζοντίου ελατηρίου, σταθεράς k το άλλο άκρο του οποίου στηρίζεται σε ακλόνητο σημείο. Το σώμα αρχικά ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$, ασκούμε στο σώμα σταθερή οριζόντια δύναμη F .

I. Η σταθερά επαναφοράς των ΑΑΤ του σώματος είναι D που είναι:

- α. $D=k$ β. $D<k$ γ. $D>k$

II. Μέχρι το σώμα να ακινητοποιηθεί, το έργο της F είναι:

- α. F^2/k β. $F^2/2k$ γ. $2F^2/k$

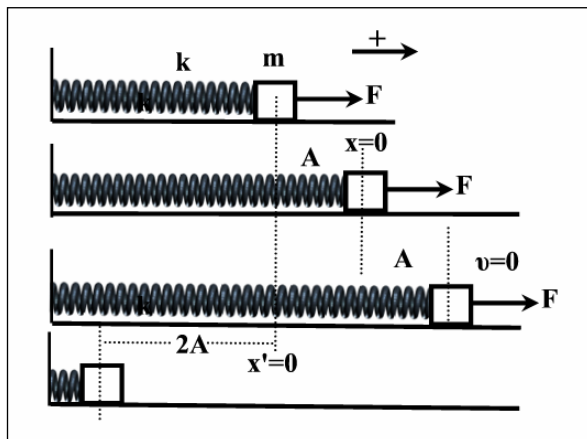
Μόλις το σώμα ακινητοποιηθεί για πρώτη φορά, καταργούμε ακαριαία την δύναμη F και το σώμα εκτελεί μία νέα ταλάντωση.

III. Το σώμα ξαναπερνά από την θέση φυσικού μήκους την χρονική στιγμή:

- α. $0,5\pi\sqrt{m/k}$, β. $\pi\sqrt{m/k}$ γ. $1,5\pi\sqrt{m/k}$

IV. Τη χρονική στιγμή $t=2\pi\sqrt{m/k}$ το σώμα θα έχει διανύσει συνολικό διάστημα.

- α. $4F/k$ β. $6F/k$ γ. $8F/k$



Απάντηση

I. Στο σώμα ασκείται σταθερή δύναμη $\vec{F}$ κατά μέτρο διεύθυνση και φορά δηλαδή κάτι σαν το βάρος στο κατακόρυφο σύστημα, μάζας – ελατηρίου. Η θέση ισορροπίας του σώματος μάζας m δεν είναι το άκρο του φυσικού μήκους αλλά η θέση στην οποία το ελατήριο παρουσιάζει επιμήκυνση $\Delta L=A$ τέτοια ώστε:

$$\Sigma F=0 \rightarrow F-k\Delta L=0 \rightarrow F=k\cdot\Delta L \rightarrow F=kA \quad (1)$$

Όταν το σώμα βρίσκεται σε απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας τότε:

$$\Sigma F=F-k(\Delta L+x) \xrightarrow{(1)} \Sigma F=k\Delta L-k\Delta L-kx \rightarrow \Sigma F=-kx, \text{ άρα η σταθερά επαναφοράς είναι } D=k.$$

Σωστό είναι το **(α)**

II. Για το έργο της F γράφουμε το ΘΜΚΕ με $\Delta K=0$, από τη θέση εκκίνησης του σώματος στο άκρο του φυσικού μήκους του ελατηρίου, μέχρι να σταματήσει στην οποία η επιμήκυνση θα είναι $2A$.

$$W_F + W_{ελ} = \Delta K \rightarrow W_F + (U_{ελ,αφ} - U_{ελ,τελ}) = 0 \rightarrow W_F + 0 - \frac{1}{2}k(2A)^2 = 0 \rightarrow W_F = 2kA^2 \xrightarrow{(1)} W_F = 2F^2/k$$

Σωστό είναι το **(γ)**

III. Το σώμα ακινητοποιείται για πρώτη φορά ($v=0$) τη χρονική στιγμή $t_1=T/2=\pi\sqrt{m/k}$. Μετά καταργείται η δύναμη, F και στη συνέχεια κάνει νέες ΑΑΤ με θέση ισορροπίας το άκρο του φυσικού μήκους, πλάτος $2A$, αλλά με την ίδια περίοδο, T αφού ούτε η σταθερά k ούτε η μάζα έχουν αλλάξει. Για να επανέλθει στο φυσικό μήκος του ελατηρίου θέλει χρόνο $\Delta t=T/4=0,5\pi\sqrt{m/k}$. Άρα φτάνει στο άκρο του φυσικού μήκους ($x'=0$) τη χρονική στιγμή t_2

$$t_2=t_1+\Delta t=\pi\sqrt{m/k}+0,5\pi\sqrt{m/k} \rightarrow t_2=1,5\pi\sqrt{m/k} \quad \text{Σωστό είναι το } (γ)$$

IV. Τη χρονική στιγμή $t_3=2\pi\sqrt{m/k}=t_2+0,5\pi\sqrt{m/k}=t_2+T/4$ το σώμα σταματάει στο νέο πλάτος του που είναι πλέον $2A$, δηλαδή στη θέση $x'=-2A$. Άρα θα έχει διανύσει συνολικά διάστημα $s=2A+2A+2A=6A$. Άρα $s=6A \rightarrow s=6F/k$ Σωστό είναι το **(β)**

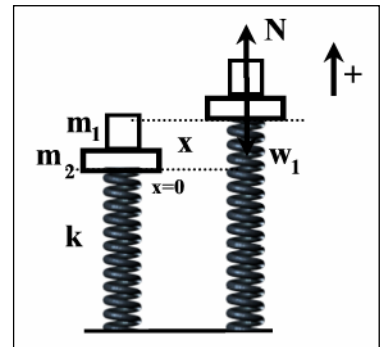
B.1.22 Κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k έχει το ένα άκρο του στερεωμένο στο έδαφος και στο ελεύθερο άκρο του φέρει συνδεδεμένο σώμα μάζας $m_2=2m$. Πάνω στο σώμα m_2 είναι τοποθετημένο άλλο σώμα μάζας $m_1=m$.

I. Το σύστημα μπαίνει σε κατακόρυφες ταλαντώσεις πλάτους A χωρίς το σώμα m_1 να αναπηδάει πάνω στο m_2 . Η ενέργεια ταλάντωσης του σώματος m_1 είναι ίση με:

α. $kA^2/2$

β. $kA^2/3$

γ. $kA^2/6$



II. Για ποιες τιμές της απομάκρυνσης x από τη θέση ισορροπίας του συστήματος είναι δυνατή η ταλάντωση χωρίς το σώμα m_1 να χάνει την επαφή του με το m_2 .

Απάντηση:

I. Το σύστημα των δύο σωμάτων κάνει ΑΑΤ με σταθερά επαναφοράς k , πλάτος A και περίοδο, T . Το κάθε σώμα κάνει ΑΑΤ με ίδιο πλάτος A και ίδια γωνιακή συχνότητα, ω . Όμως η σταθερά επαναφοράς των ταλαντώσεων του κάθε σώματος δεν είναι ίδια διότι δεν είναι ίδια και η συνισταμένη δύναμη που δρα στο καθένα από αυτά. Υποθέτω ότι η σταθερά επαναφοράς των ΑΑΤ του σώματος m_1 είναι D_1 . Τότε:

Για την ΑΑΤ του συστήματος των δύο σωμάτων: $k=(m_1+m_2)\omega^2$ (1)

Για την ΑΑΤ μόνο του m_1 : $D_1=m_1\omega^2$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε: $\frac{m_1+m_2}{k}=\frac{m_1}{D_1} \rightarrow D_1=\frac{m_1 k}{m_1+m_2} \rightarrow D_1=\frac{k}{3}$

Άρα η ενέργεια των ΑΑΤ του σώματος m_1 θα είναι: $E_1=\frac{D_1^2 A^2}{2}=\frac{kA^2}{6}$ Σωστό είναι το (γ)

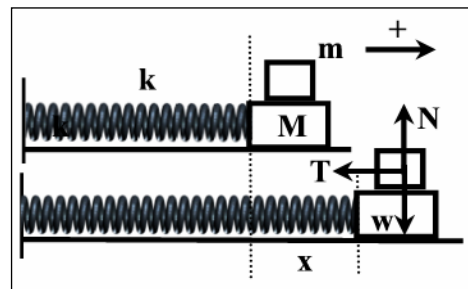
II. Στο σώμα m_1 ασκούνται το βάρος του $w_1=m_1g$ και η δύναμη στήριξης N , από το σώμα m_2 . Ως θετική ορίζεται η φορά προς τα πάνω. Το σώμα m_1 κάνει ΑΑΤ με σταθερά επαναφοράς $D_1=m_1k/(m_1+m_2)$. Άρα:

$$\Sigma F_1 = -D_1 \cdot x \rightarrow N - m_1 g = -D_1 x \rightarrow N = m_1 g - D_1 x.$$

Για να μην χάνεται η επαφή θα πρέπει $N > 0 \rightarrow m_1 g - D_1 x > 0 \rightarrow x < \frac{m_1 g}{D_1} \rightarrow x_1 < \frac{(m_1+m_2)g}{k} \rightarrow x_1 < \frac{3mg}{k}$

Συνεπώς και το πλάτος της ταλάντωσης πρέπει να είναι μικρότερο από $3mg/k$.

B.1.23 Οριζόντιο ελατήριο σταθεράς k στηρίζεται με το ένα άκρο του σε ακλόνητο σημείο ενώ στο άλλο άκρο έχει συνδεδεμένο σώμα μάζας M και πάνω σε αυτό είναι τοποθετημένο άλλο σώμα μάζας m . Το σύστημα ταλαντώνεται οριζόντια με πλάτος A . Για να μην ολισθαίνει το σώμα m πάνω στο M θα πρέπει ο μεταξύ του συντελεστής μέγιστης στατικής τριβής να είναι



α. $\mu_{\sigma} \geq \frac{kA}{Mg}$ β. $\mu_{\sigma} \geq \frac{kA}{(M+m)g}$ γ. $\mu \geq \frac{kA}{mg}$

Απάντηση

Το σύστημα των δύο σωμάτων κάνει ΑΑΤ με σταθερά επαναφοράς k , πλάτος A και περίοδο, T . Το κάθε σώμα κάνει ΑΑΤ με ίδιο πλάτος A και ίδια γωνιακή συχνότητα, ω . Όμως η σταθερά επαναφοράς των ταλαντώσεων του κάθε σώματος δεν είναι ίδια διότι δεν είναι ίδια και η συνισταμένη δύναμη που δρα στο καθένα από αυτά. Υποθέτω ότι η σταθερά επαναφοράς των ΑΑΤ του σώματος m είναι D_1 . Τότε:

Για την ΑΑΤ του συστήματος των δύο σωμάτων: $k=(m+M)\omega^2$ (1)

Για την ΑΑΤ μόνο του m : $D_1=m\omega^2$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε: $\frac{m+M}{k} = \frac{m}{D_1} \rightarrow D_1 = \frac{mk}{m+M}$ (3)

Το σώμα m δέχεται στον οριζόντιο άξονα μόνο της δύναμη της στατικής τριβής T που είναι και η δύναμη επαναφοράς του και συνεπώς θα έχει φορά προς τη θέση ισορροπίας. Αν πάρω μια τυχαία θετική απομάκρυνση, x προς τα δεξιά, η T θα έχει φορά προς τα αριστερά.

$\Sigma F = -D_1 x \rightarrow -T = -D_1 x \rightarrow T = D_1 x$ (4)

Για να μην ολισθαίνει το m πάνω στο M θα πρέπει η δύναμη της στατικής τριβής T να μην υπερβαίνει τη μέγιστη τιμή της, δηλαδή την οριακή τριβή που είναι $T_{\max} = \mu_{\sigma} N = \mu_{\sigma} mg$, όπου μ_{σ} ο συντελεστής μέγιστης στατικής τριβής. Άρα:

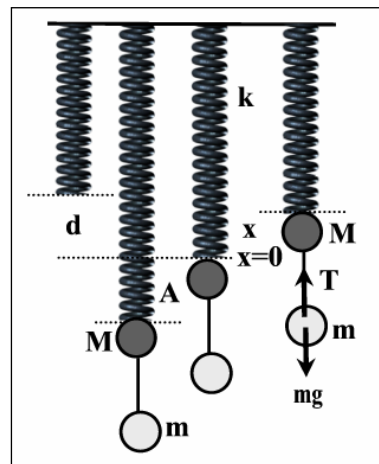
$T \leq T_{\max} \rightarrow T \leq \mu_{\sigma} mg$ (5)

Από (4)(5) $\rightarrow D_1 x \leq \mu_{\sigma} mg \rightarrow \frac{mk}{m+M} x \leq \mu_{\sigma} mg \rightarrow \mu_{\sigma} \geq \frac{kx}{(M+m)g} \xrightarrow{x(\max)=A} \mu_{\sigma} \geq \frac{kA}{(M+m)g}$

Σωστό είναι το (β)

B.1.24 Ελατήριο σταθεράς k κρέμεται από ακλόνητο σημείο και φέρει δύο σώματα με μάζες M και m συνδεδεμένα με νήμα. Το σύστημα κάνει ΑΑΤ. Για να μην τσαλακώνει το νήμα, η μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου δεν θα πρέπει να υπερβαίνει την τιμή

- α. $\frac{mg}{k}$ β. $\frac{(M+m)g}{k}$ γ. $2 \frac{mg}{k}$ δ. $2 \frac{(M+m)g}{k}$



Απάντηση:

Απομακρύνουμε το σύστημα από τη θέση ισορροπίας και το αφήνουμε ελεύθερο να κάνει ΑΑΤ με σταθερά επαναφοράς k και γωνιακή συχνότητα, ω . Αν το νήμα δεν τσαλακώνει, το σώμα m κάνει επίσης ΑΑΤ με την ίδια συχνότητα και σταθερά D_1 .

$$\text{Για την ΑΑΤ του συστήματος των δύο σωμάτων: } k=(m+M)\omega^2 \quad (1)$$

$$\text{Για την ΑΑΤ μόνο του } m: \quad D_1=m\omega^2 \quad (2)$$

$$\text{Από (1) και (2) έχουμε: } \frac{m+M}{k} = \frac{m}{D_1} \rightarrow D_1 = \frac{mk}{m+M} \quad (3)$$

Με θετική τη φορά προς τα πάνω όταν φτάνει σε τυχαία απομάκρυνση, x πάνω από τη θέση ισορροπίας πρέπει:

$$\Sigma F = -D_1 x \rightarrow T - mg = -D_1 x \rightarrow T = mg - D_1 x \quad (4)$$

$$\text{Για να είναι το νήμα τεντωμένο πρέπει } T \geq 0 \rightarrow mg - D_1 x \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{mg}{D_1} \xrightarrow{(1)} x \leq \frac{(M+m)g}{k}$$

Όμως στη θέση ισορροπίας ($x=0$) η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι d :

$$\Sigma F = 0 \rightarrow kd - (M+m)g = 0 \rightarrow d = \frac{(M+m)g}{k}$$

Άρα η συνολική επιμήκυνση πρέπει να είναι $d+x \leq 2 \frac{(M+m)g}{k}$ δηλαδή να μην υπερβαίνει την τιμή $2(M+m)g/k$.

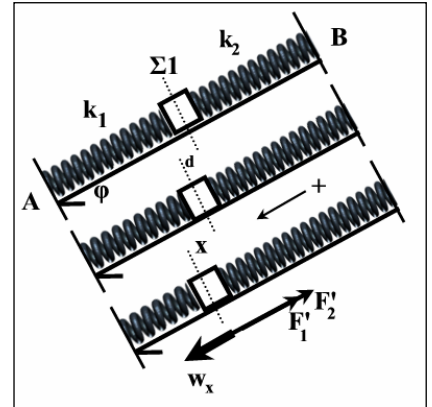
Σωστό είναι το **(δ)**.

B.1.25 Λείο κεκλιμένο επίπεδο έχει γωνία κλίσης, φ . Στα σημεία A και B στερεώνουμε τα άκρα δύο ιδανικών ελατηρίων με σταθερές k_1 και k_2 αντίστοιχα. Στα ελεύθερα άκρα των ελατηρίων, δένουμε σώμα Σ_1 , μάζας M και το κρατάμε στη θέση όπου τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος (όπως φαίνεται στο σχήμα). Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ αφήνουμε το σώμα Σ_1 ελεύθερο. Ως θετική θεωρούμε τη φορά από το B προς το A.

I. Να αποδείξετε ότι το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς:

α. $D=k_1+k_2$ β. $D=|k_1-k_2|$ γ. $D= \frac{1}{2} (k_1+k_2)$ δ. $D=k_1k_2/(k_1+k_2)$

II. Κάποια χρονική στιγμή που το σώμα Σ_1 βρίσκεται στην αρχική του θέση, τοποθετούμε πάνω του (χωρίς αρχική ταχύτητα) ένα άλλο σώμα Σ_2 μικρών διαστάσεων μάζας m. Να βρείτε τον ελάχιστο συντελεστή οριακής στατικής τριβής που πρέπει να υπάρχει μεταξύ των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 , ώστε το Σ_2 να μην ολισθαίνει σε σχέση με το Σ_1 .



Απάντηση:

I. Στη θέση ισορροπίας τα ελατήρια είναι παραμορφωμένα κατά d, σε σχέση με τα φυσικά τους μήκη. Το k_1 συσπειρωμένο και το k_2 ανοιγμένο με τις δυνάμεις του ελατηρίου $F_1=k_1d$ και $F_2=k_2d$ αντίστοιχα.

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow Mg \sin \varphi - F_1 - F_2 = 0 \rightarrow Mg \sin \varphi - k_1 d - k_2 d = 0 \rightarrow Mg \sin \varphi = (k_1 + k_2) d \quad (1)$$

Σε τυχαία θετική απομάκρυνση x οι δυνάμεις των ελατηρίων έχουν γίνει $F_1'=k_1(d+x)$ και $F_2=k_2(d+x)$.

$$\Sigma F_x = Mg \sin \varphi - F_1' - F_2' = Mg \sin \varphi - k_1(d+x) - F_2 = k_2(d+x) \xrightarrow{(1)} \Sigma F_x = -(k_1 + k_2)x,$$

Άρα κάνει ΑΑΤ με σταθερά επαναφοράς $D=k_1+k_2$. Σωστό είναι το (α).

II. Για την ΑΑΤ του συστήματος των δύο σωμάτων με γωνιακή συχνότητα ω , η σταθερά επαναφοράς ισχύει

$$D=(m+M)\omega^2 \rightarrow k_1+k_2=(m+M)\omega^2 \quad (2)$$

Για την ΑΑΤ μόνο του Σ_2 , μάζας m η σταθερά είναι:

$$D_2=m\omega^2 \quad (3)$$

$$\text{Από (2) και (3) έχουμε: } \frac{m+M}{k_1+k_2} = \frac{m}{D_2} \rightarrow D_2 = \frac{m(k_1+k_2)}{m+M} \quad (4)$$

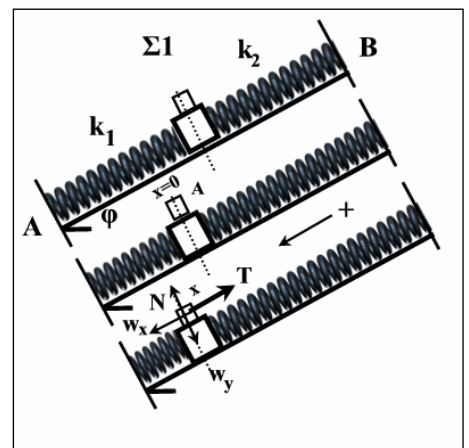
Το m+M ισορροπεί πιο χαμηλά από την αρχική θέση των φυσικών μηκών κατά $x=A$ που είναι και το πλάτος της ΑΑΤ

$$\text{του συστήματος: } \Sigma F_x=0 \rightarrow (M+m)g \sin \varphi - k_1 A - k_2 A = 0 \rightarrow A = \frac{(M+m)g \sin \varphi}{k_1+k_2} \quad (5)$$

Το m κάνει ΑΑΤ υπό την επίδραση των δυνάμεων $w_x=mg \sin \varphi$ και της στατικής τριβής, T. Άρα $\Sigma F_2 = -D_2 x$

$$\Sigma F_2 = mg \sin \varphi - T \rightarrow -D_2 x = mg \sin \varphi - T \rightarrow T = mg \sin \varphi + D_2 x \xrightarrow{x=A} T_{\max} = mg \sin \varphi + D_2 A \xrightarrow{(4),(5)} T_{\max} = 2mg \sin \varphi \quad (6)$$

Όμως για να μην ολισθαίνει πρέπει $T_{\max} \leq T_{\text{op}} \rightarrow T_{\max} \leq \mu_{\sigma} N \rightarrow 2mg \sin \varphi \leq \mu_{\sigma} mg \cos \varphi \rightarrow \mu_{\sigma} \geq 2 \tan \varphi$



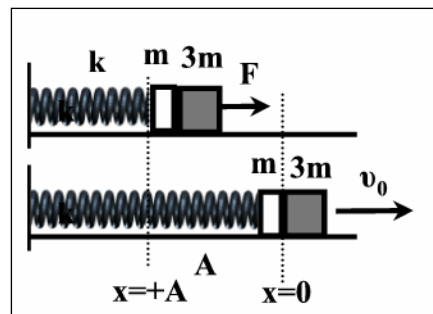
B.1.26 Τα δύο σώματα με μάζες $m_1=m$ και $m_2=3m$ εφάπτονται χωρίς να είναι συνδεδεμένα, αλλά το m_1 είναι δεμένο στο ελατήριο σταθεράς k . Συσπειρώνουμε όλο το σύστημα κατά $x=A$ από τη θέση ισορροπίας και το αφήνουμε ελεύθερο να κάνει ΑΑΤ.

I. Το σώμα m_2 αποχωρίζεται από το σώμα m_1 στη θέση:

α. $x=+A$ β. $x=0$ γ. $x=-A$ δ. $x=A/3$

II. Μετά τον αποχωρισμό το σώμα m_1 κάνει νέες ΑΑΤ με πλάτος:

α. $A'=A$ β. $A'=A/2$ γ. $A'=2A$



Απάντηση:

I. Το σύστημα ελατηρίου και δύο σωμάτων κάνει ΑΑΤ με σταθερά k και γωνιακή συχνότητα, ω . Το σώμα $m_2=3m$, μέχρι να αποχωριστεί από το m_1 , κάνει ΑΑΤ με σταθερά επαναφοράς D_2 και ίδια συχνότητα, ω .

$$k=(m_1+m_2)\omega^2 \rightarrow k=4m\omega^2$$

$$D_2=m_2\omega^2 \rightarrow D_2=3m\omega^2 \quad \text{Άρα } D_2=3k/4$$

Το σώμα m_2 δέχεται τη δύναμη επαφής F από το m . Αυτή παίζει και το ρόλο της δύναμης $\Sigma F=-D_2x \rightarrow F=-D_2x \rightarrow F=-3kx/4$.

Όταν τα σώματα αποχωριστούν η δύναμη F μηδενίζεται άρα $3kx/4=0 \rightarrow x=0$. Συνεπώς ο αποχωρισμός γίνεται στη θέση $x=0$ και σωστό είναι το **(β)**.

II. Το σύστημα m_1+m_2 φτάνει στη θέση $x=0$ με ταχύτητα: $v_0=A\omega=A\sqrt{k/4m}=\frac{A}{2}\sqrt{k/m}$ (1)

Μετά τον αποχωρισμό στη θέση $x=0$ η ταχύτητα του m_1 θα είναι ίδια αλλά το πλάτος θα είναι A' και η γωνιακή συχνότητα, ω' .

$$v_0=A'\omega'=A'\sqrt{k/m} \quad (2) \quad \text{Από (1) και (2)} \rightarrow A'=A/2 \quad \text{και σωστό είναι το (β).}$$

B.1.27 Υλικό σημείο κάνει ΑΑΤ με πλάτος A και σταθερά επαναφοράς D . Η απόλυτη μέγιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι

α. $|dK/dt|_{\max}=\frac{DA^2\omega}{8}$

β. $|dK/dt|_{\max}=\frac{DA^2\omega}{2}$

γ. $|dK/dt|_{\max}=\frac{DA^2\omega}{4}$

Απάντηση:

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας ισούται με την ισχύ της δύναμης επαναφοράς, $\Sigma F=-Dx$.

$$\frac{dK}{dt}=\frac{d\Sigma W}{dt}=\frac{\Sigma F \cdot dx}{dt}=\Sigma F \cdot v=-Dxv=-DA\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \cdot A\omega\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_0) \rightarrow$$

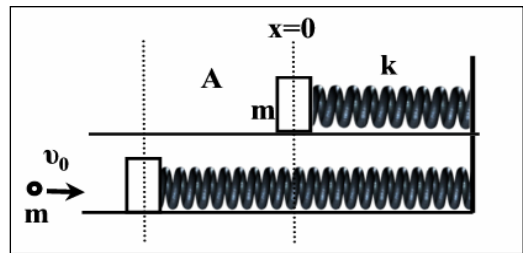
$$\frac{dK}{dt}=-\frac{1}{2}DA^2\omega \cdot 2\eta\mu(\omega t+\varphi_0)\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_0) \rightarrow \frac{dK}{dt}=-\frac{1}{2}DA^2\omega \cdot \eta\mu 2(\omega t+\varphi_0)$$

Άρα: $\left|\frac{dK}{dt}\right|_{\max}=\frac{DA^2\omega}{2}$ Σωστό το **(β)**

Όταν $|\eta\mu 2(\omega t+\varphi_0)|=1 \rightarrow 2(\omega t+\varphi_0)=\kappa\pi+\pi/2 \rightarrow (\omega t+\varphi_0)=\kappa\pi/2+\pi/4$

$$x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0)=A\eta\mu(\kappa\pi/2+\pi/4)=\pm A\sigma\upsilon\nu\pi/4 \rightarrow x=\pm A\sqrt{2}/2$$

B.1.28 Οριζόντιο ελατήριο σταθεράς k φέρει στο ελεύθερο άκρο του σώμα μάζας $m_1=m$ και κάνει αμείωτες ΑΑΤ σε λείο οριζόντιο επίπεδο με περίοδο, T , πλάτος, A , και μέγιστη ταχύτητα v_0 . Κάποια στιγμή που φτάνει στη μέγιστη θετική απομάκρυνση σφηνώνεται μέσα του άλλο σώμα μάζας $m_2=m$ με ταχύτητα μέτρου v_0 το οποίο κινείται οριζόντια και με φορά προς της θέση ισορροπίας του m_1 . Μετά την πλαστική κρούση το συσσωμάτωμα κάνει νέες ΑΑΤ. Το πλάτος της νέας ταλάντωσης είναι:



α. A

β. $A/2$

γ. $A\sqrt{3}/2$

δ. $A\sqrt{3}$

Απάντηση:

Όταν το σώμα m_1 φτάνει στη μέγιστη απομάκρυνση έχει μηδενική ταχύτητα. Γράφω την ΑΔΟ για την πλαστική κρούση:

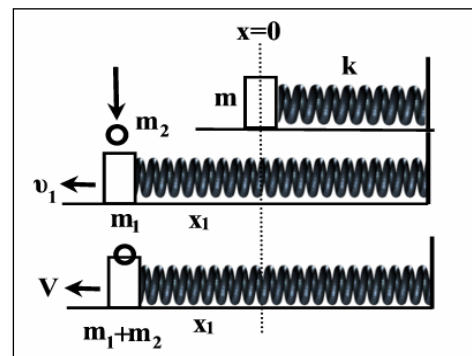
$$m_2 v_0 = (m_1 + m_2) V \rightarrow V = \frac{1}{2} v_0 = \frac{1}{2} A \omega = \frac{1}{2} A \sqrt{k/m}$$

Γράφω την ΑΔΕ ταλαντωτή μετά τη κρούση, όπου το συσσωμάτωμα $2m$ έχει ταχύτητα V και απομάκρυνση από την ίδια θέση ισορροπίας $x=A$. Η νέα ταλάντωση θα έχει πλάτος A' .

$$E_1 = E_2 \rightarrow \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} 2m V^2 = \frac{1}{2} k A'^2 \rightarrow \frac{1}{2} k A^2 + m \frac{k A^2}{4m} = \frac{1}{2} k A'^2 \rightarrow \frac{3}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k A'^2 \rightarrow A' = A\sqrt{3}$$

Άρα σωστό είναι το (δ).

B.1.29 Οριζόντιο ελατήριο σταθεράς k φέρει στο ελεύθερο άκρο του σώμα μάζας $m_1=m$ και κάνει αμείωτες ΑΑΤ σε λείο οριζόντιο επίπεδο με μέγιστη ταχύτητα, v_0 , και ενέργεια, E . Κάποια στιγμή που περνάει από τη θέση εκείνη στην οποία το μέτρο της ταχύτητας είναι ίσο με $v_1=v_0/2$ πέφτει πάνω του κατακόρυφα δεύτερο σώμα μάζας $m_2=m/2$ και ενσωματώνεται με το πρώτο. Μετά την πλαστική κρούση το συσσωμάτωμα κάνει νέες ταλαντώσεις με ενέργεια E' . Η νέα ενέργεια είναι:



α. $E' = E/3$

β. $E' = 11E/12$,

γ. $E' = 3E/4$,

δ. $E' = 11E/24$

Απάντηση:

Στη θέση x_1 , το σώμα m_1 έχει ταχύτητα $v_1=v_0/2$ και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα m_2 που πέφτει κατακόρυφα πάνω του. Γράφουμε την ΑΔΟ στον άξονα x κατά την κρούση για να υπολογίσουμε την ταχύτητα V του συσσωματώματος μετά την κρούση:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V \rightarrow m \frac{v_0}{2} = \frac{3m}{2} V \rightarrow V = v_0/3 \quad (1)$$

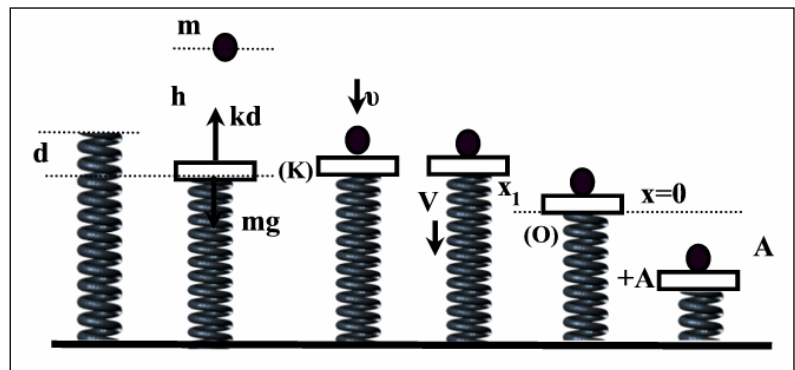
Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα συνεχίζει τις ΑΑΤ με ενέργεια E' . Γράφουμε την ΑΔΕ ταλαντωτή για την κάθε ταλάντωση με την προϋπόθεση ότι μόλις πριν και αμέσως μετά την κρούση ο ταλαντωτής βρίσκεται στην ίδια απομάκρυνση, x_1 :

$$\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 = E \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}\frac{3m}{2}\left(\frac{v_0}{3}\right)^2 = E' \quad (3) \quad \text{Από (2)(3)} \rightarrow E - E' = \frac{mv_0^2}{24} \rightarrow E - E' = \frac{E}{12} \rightarrow E' = \frac{11E}{12} \quad \text{Σωστό το (β)}$$

B.1.30 Δίσκος μάζας $m_1 = m$ είναι συνδεδεμένος με κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k και ισορροπεί. Πάνω από το δίσκο και σε ύψος $h = mg/k$ αφήνουμε σώμα μάζας $m_2 = m$ να πέσει στο δίσκο. Η κρούση είναι πλαστική και το συσσωμάτωμα εκτελεί ΑΑΤ με πλάτος A που είναι:

- α. $A = h$ β. $A = 2h$
 γ. $A = 4h$ δ. $A = h\sqrt{2}$



Απάντηση:

Το m_1 πέφτει από ύψος h και φτάνει στο δίσκο με ταχύτητα v . Από ΑΔΜΕ:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

Το m_1 κάνει κρούση πλαστική με το m_2 . Γράφουμε την ΑΔΟ:

$$m_1v = (m_1 + m_2)V \rightarrow V = \frac{v}{2} = \frac{\sqrt{2gh}}{2} \quad (2)$$

Ο δίσκος m_2 ισορροπεί στη θέση (K) όπου το ελατήριο έχει συσπείρωση d . Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα $m_1 + m_2$ κάνει ΑΑΤ με θέση ισορροπίας την (O) που είναι χαμηλότερα από τη θέση (K) κατά x_1 . Γράφω συνθήκες ισορροπίας στα (K) και (O) και βρίσκω τα d και x_1 .

$$\Sigma F_{(K)} = 0 \rightarrow m_2g - kd = 0 \rightarrow d = mg/k \quad (3)$$

$$\Sigma F_{(O)} = 0 \rightarrow (m_1 + m_2)g - k(d + x_1) = 0 \rightarrow x_1 = mg/k \rightarrow x_1 = h \quad (4)$$

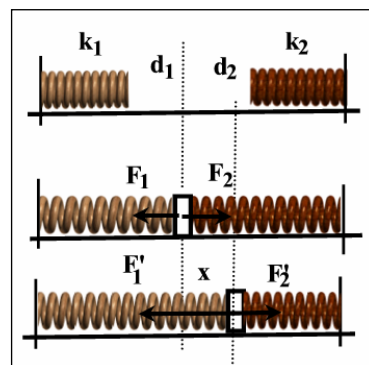
Γράφω ΑΔΕ για τις ΑΑΤ του συστήματος $(m_1 + m_2)$ – ελατήριο, k .

$$K + U = E \rightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kA^2 \rightarrow mgh + kh^2 = kA^2 \rightarrow 2kh^2 = kA^2 \rightarrow A = h\sqrt{2}$$

Σωστό (δ)

B.1.31 Δύο ελατήρια με σταθερές k_1 , k_2 είναι οριζόντια και στερεωμένα σε ακλόνητα σημεία. Επιμηκύνουμε τα ελατήρια και συνδέουμε μεταξύ τους σώμα Σ που μπορεί να κινείται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές. Το σύστημα αρχικά ισορροπεί. Απομακρύνουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας και το αφήνουμε ελεύθερο να ταλαντωθεί. Δείξτε ότι οι ταλαντώσεις είναι απλές αρμονικές και η σταθερά επαναφοράς, D , ίση με

α. $D=k_1+k_2$ β. $D=|k_1-k_2|$ γ. $D=\frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}$



Απάντηση

Το σώμα ισορροπεί με τα ελατήρια να είναι ανοιγμένα κατά d_1 και d_2 αντίστοιχα. Το σώμα δέχεται δύο αντίθετες δυνάμεις από τα ελατήρια, τις $F_1=k_1 d_1$ και $F_2=k_2 d_2$.

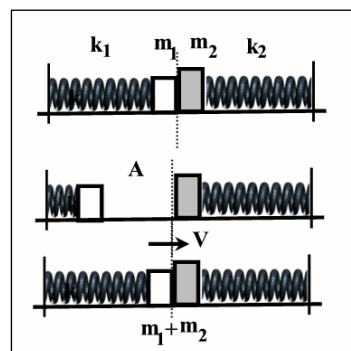
$$\Sigma F=0 \rightarrow F_2-F_1=0 \rightarrow k_2 d_2=k_1 d_1 \quad (1)$$

Θεωρούμε ως θετική τη φορά προς τα δεξιά. Σε μια τυχαία θετική απομάκρυνση, x , ($x < d_2$) το σώμα δέχεται από τα ελατήρια τις δυνάμεις F_1' και F_2' . Και τα δύο ελατήρια είναι ανοιγμένα. Το k_1 είναι ανοιγμένο προς τα δεξιά κατά d_1+x και ασκεί δύναμη προς τα αριστερά, μέτρου $F_1'=k_1(d_1+x)$. Το ελατήριο k_2 είναι ανοιγμένο προς τα αριστερά κατά d_2-x και ασκεί δύναμη προς τα δεξιά μέτρου $F_2'=k_2(d_2-x)$.

$$\Sigma F = F_2' - F_1' = k_2(d_2-x) - k_1(d_1+x) = k_2 d_2 - k_2 x - k_1 d_1 - k_1 x \xrightarrow{(1)} \Sigma F = -(k_1+k_2)x \rightarrow D=k_1+k_2. \quad (\alpha)$$

B1.32 Το σύστημα των δύο ελατηρίων που φαίνεται στο σχήμα έχει σταθερές k_1, k_2 με $k_2=3k_1$. Το κάθε ελατήριο φέρει δεμένο σώμα μάζας m_1 και m_2 με $m_2=3m_1$. Το σύστημα αρχικά ισορροπεί με τα ελατήρια να είναι στα φυσικά τους μήκη. Απομακρύνουμε το m_1 προς τα αριστερά κατά A από τη θέση ισορροπίας και το αφήνουμε ελεύθερο. Το m_1 συγκρούεται με το m_2 πλαστικά και μετά την κρούση το συσσωμάτωμα κάνει νέες ΑΑΤ με πλάτος A' . Η σχέση των πλατών είναι:

α. $A'=A$ β. $A'=A/2$ γ. $A'=A/3$ δ. $A'=A/4$



Απάντηση

Το σύστημα (k_1 , m_1) φτάνει στη θέση ισορροπίας με ταχύτητα $v_1=A\omega_1=A\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ (1)

Μετά την πλαστική κρούση το συσσωμάτωμα έχει ταχύτητα V που υπολογίζεται από την Α.Δ.Ο.

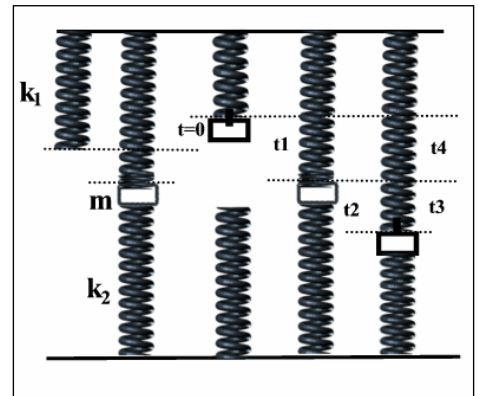
$$p_{\text{προ}}=p_{\text{μετα}} \rightarrow m_1 v_1=(m_1+m_2)V \rightarrow V=\frac{v_1}{4} \quad (2)$$

Η θέση ισορροπίας του (m_1+m_2) είναι η ίδια, η σταθερά επαναφοράς των ΑΑΤ είναι k_1+k_2 και η ταχύτητα V γίνεται η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης αυτού:

$$V=A'\omega_2=A'\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m_1+m_2}}=A'\sqrt{\frac{4k_1}{4m_1}} \rightarrow V=A'\sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \quad (3)$$

Από (1)(2)(3) $\rightarrow A'=A/4$ **Σωστό είναι το (δ)**

B.1.33 Ένα σώμα μάζας $m=2\text{kg}$, είναι δεμένο στο άκρο ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k_1=200\text{N/m}$. Κάτω από το σώμα υπάρχει άλλο κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k_2=600\text{N/m}$ η άκρη του οποίου εφάπτεται στη βάση του σώματος χωρίς όμως να είναι συνδεδεμένη με αυτή. Απομακρύνουμε το σώμα κατακόρυφα προς τα πάνω από τη θέση ισορροπίας του μέχρι το ελατήριο k_1 να συσπειρωθεί κατά $0,1\text{m}$ από το φυσικό του μήκος. Αφήνουμε το σώμα ελεύθερο τη χρονική στιγμή $t_0=0$ χωρίς ταχύτητα. Όταν το σώμα συναντά το άκρο του ελατηρίου k_2 , δεν παρατηρούνται απώλειες ενέργειας και το σώμα δεν συνδέεται στο ελατήριο αυτό. Το σώμα θα επανέλθει στην αρχική θέση που ήταν τη χρονική στιγμή $t_0=0$, μετά από χρονικό διάστημα



α. $\Delta t=0,2\pi\text{s}$

β. $\Delta t=0,25\pi\text{s}$

γ. $\Delta t=0,4\pi\text{s}$

δ. $\Delta t=0,15\pi\text{s}$

Απάντηση:

Στη θέση ισορροπίας το ελατήριο k_1 είναι ανοιγμένο κατά $d_1=mg/k_1=0,1\text{m}$. προκαλώντας συσπίρωση κατά $0,1\text{m}$ από το φυσικό μήκος το πλάτος της ΑΑΤ γίνεται $A=0,2\text{m}$. Όταν επανέρχεται στη θέση ισορροπία έχει παρέλθει χρόνος:

$$t_1=\frac{T_1}{4}=\frac{2\pi\sqrt{m/k_1}}{4}=\frac{\pi}{20}\text{s}$$

Στη συνέχεια το σώμα κάνει νέα ΑΑΤ με σταθερά επαναφοράς $D=k_1+k_2=800\text{N/m}$ και περίοδο $T_2=2\pi\sqrt{m/D}=\frac{\pi}{10}\text{s}$

Μέχρι να σταματήσει εκ νέου έχει παρέλθει χρόνος $t_2=\frac{T}{4}=\frac{\pi}{40}\text{s}$

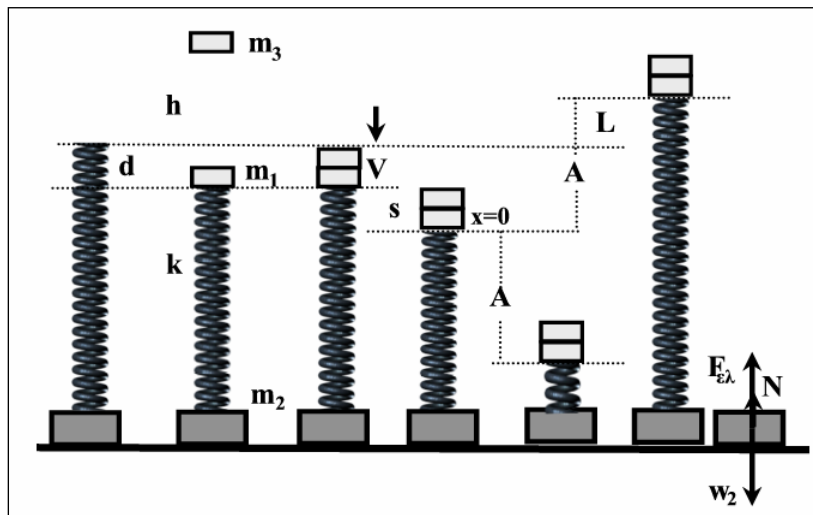
Στην επιστροφή και μέχρι να φτάσει πάλι στην αρχική θέση ισορροπίας ο χρόνος που χρειάζεται είναι και πάλι $t_3=t_2=\frac{\pi}{40}\text{s}$

Τέλος, για να επανέλθει στο σημείο που ξεκίνησε χρειάζεται χρόνο: $t_4=t_1=\frac{T_1}{4}=\frac{\pi}{20}\text{s}$

Ο συνολικός χρόνος κίνησης είναι $t=t_1+t_2+t_3+t_4=(\frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{40} + \frac{\pi}{40} + \frac{\pi}{20})\text{s}=\frac{6\pi}{40}\text{s}\rightarrow t=0,15\text{s}$

Σωστό είναι το (δ)

B.1.34 Δύο σώματα με μάζες $m_1=m_2=m$ είναι καλά συνδεδεμένα στα άκρα ελατηρίου σταθεράς k και το σύστημα ηρεμεί σε κατακόρυφη θέση με το σώμα m_2 να είναι σε επαφή με το ακλόνητο έδαφος. Από ύψος h πάνω από το σώμα m_1 αφήνουμε ένα τρίτο σώμα μάζας $m_3=m$ που πέφτει και κάνει πλαστική κρούση με το m_1 . Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα m_1+m_3 κάνει κατακόρυφες ΑΑΤ.



I. Οι τιμές του πλάτους A της ΑΑΤ για να μη χάνει το σώμα m_2 την επαφή του με το έδαφος είναι:

α. $A \geq mg/k$

β. $A \geq 2mg/k$

γ. $A \geq 3mg/k$

II. Οι τιμές του ύψους h για να μη χάνει το σώμα m_2 την επαφή του με το έδαφος είναι:

α. $h \geq 3mg/k$

β. $h \geq 5mg/k$

γ. $h \geq 10mg/k$

Απάντηση

I. Το σώμα m_3 πέφτει από ύψος h και φτάνει στο m_1 με ταχύτητα, v : $m_3gh = \frac{1}{2}m_3v^2 \rightarrow v = \sqrt{2gh}$ (1)

Η κρούση που ακολουθεί είναι πλαστική οπότε από την ΑΔΟ:

$$m_3v = (m_1+m_3)V \rightarrow V = v/2 \quad (2)$$

Η αρχική συσπείρωση του ελατηρίου είναι d : $\Sigma F = 0 \rightarrow m_1g = kd \rightarrow d = mg/k$ (3)

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα κάνει ΑΑΤ με θέση ισορροπίας ($x=0$) χαμηλότερα κατά $x=s$ από το σημείο κρούσης: $\Sigma F' = 0 \rightarrow (m_1+m_3)g - k(d+s) = 0 \rightarrow 2mg = k(d+s) \xrightarrow{(3)} s = mg/k$ (4)

Για να χάσει το σώμα m_2 την επαφή του με το έδαφος πρέπει στην επαναφορά η επιμήκυνση του ελατηρίου, L , να είναι τέτοια ώστε η δύναμη του ελατηρίου $F_{ελ}$ να είναι ικανή να σηκώσει το σώμα από το έδαφος. Επειδή και το m_2 ισορροπεί:

$$\Sigma F_2 = 0 \rightarrow N_2 + F_{ελ} - w_2 = 0 \rightarrow N_2 = w_2 - F_{ελ}$$

Για να εγκαταλείψει το έδαφος πρέπει: $N_2 \leq 0 \rightarrow m_2g \leq kL \rightarrow L \geq m_2g/k \rightarrow L \geq mg/k$ (5)

Άλλα το πλάτος της ταλάντωσης, A , όπως φαίνεται στο σχήμα είναι:

$$A = d + s + L \xrightarrow{(3,4,5)} A \geq (mg/k + mg/k + mg/k) \rightarrow A \geq 3mg/k \quad (6) \quad \text{Σωστό είναι το (γ)}$$

II. Από την ΑΔΕτ για την ΑΑΤ, μετά την κρούση έχουμε:

$$E = K + U \rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}ks^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_3)V^2 \rightarrow kA^2 = ks^2 + \frac{2mv^2}{4} \xrightarrow{(1,4)} mgh = kA^2 + \frac{m^2g^2}{k} \rightarrow$$

$$h = \frac{kA^2 + m^2g^2/k}{mg} \xrightarrow{(6)} h \geq \frac{10m^2g^2}{kmg} \rightarrow h \geq 10mg/k \quad \text{Σωστό είναι το (γ)}$$

