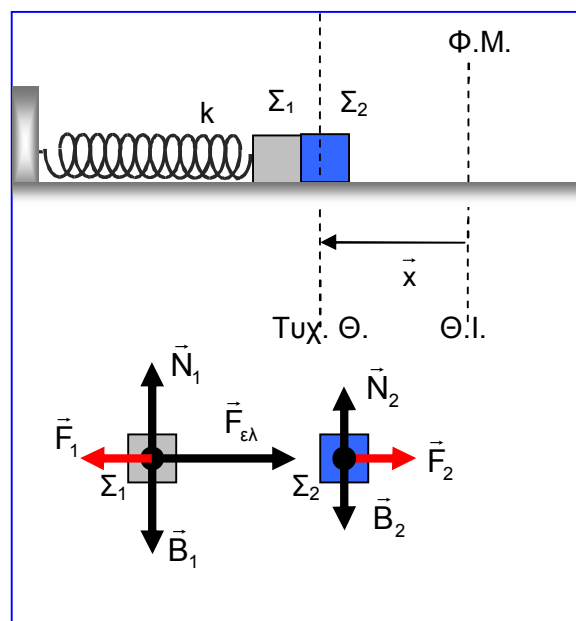


## Χάσιμο επαφής

**A)** Έστω σύστημα δύο σωμάτων  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$ , με μάζες  $m_1$  και  $m_2$ , που βρίσκονται σε επαφή πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Το  $\Sigma_1$  είναι δεμένο στο άκρο οριζώντιου ελατηρίου (όπως στο σχήμα) σταθεράς  $k$  ενώ το  $\Sigma_2$  δεν είναι κολλημένο με το  $\Sigma_1$ . Μετακινούμε το σύστημα συμπιέζοντας το ελατήριο και το αφήνουμε ελεύθερο, οπότε εκτελεί α.α.τ. Θα μελετήσουμε την κίνηση του  $\Sigma_2$ , το οποίο έχει την ίδια γωνιακή συχνότητα με το  $\Sigma_1$ , αλλά σταθερά επαναφοράς  $D_2$ , ώστε

$$k = (m_1 + m_2)\omega^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} D_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot k \\ D_2 = m_2\omega^2 \end{array} \right.$$

$\Sigma F = -D_2 \cdot x \Leftrightarrow F_2 = -D_2 \cdot x$ . Η επαφή χάνεται αν  $F_2 = 0 \Leftrightarrow x_{\text{crit}} = 0$ , δηλαδή στη θέση Φ.Μ.



### Παρατηρήσεις

1. Το σύστημα των σωμάτων θα περάσει υποχρεωτικά από τη ΘΦΜ (αφού είναι η ΘΙ) οπότε η επαφή θα χαθεί οπωσδήποτε.
2. Μπορούμε να προβλέψουμε την απώλεια επαφής στη ΘΦΜ αφού μετά απ' αυτήν το μέτρο της ταχύτητας του  $\Sigma_1$  θα αρχίσει να μειώνεται λόγω της δράσης της δύναμης από το ελατήριο ενώ το  $\Sigma_2$  δεν δέχεται οριζόντιες δυνάμεις που μπορούν να μειώσουν το μέτρο της ταχύτητάς του και θα συνεχίσει κάνοντας Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση με ταχύτητα τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης.
3. Μετά την απώλεια επαφής το σώμα  $\Sigma_1$ , καθώς παραμένει δεμένο στο ελατήριο, θα κάνει νέα Απλή Αρμονική Ταλάντωση η οποία λόγω αλλαγής μάζας θα έχει:

- την ίδια Θέση Ισορροπίας
- σταθερά ταλάντωσης  $D_1 = k$
- διαφορετική γωνιακή συχνότητα  $\omega'$ , αφού  $k = m_1\omega'^2$
- ίδια μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης
- διαφορετικό πλάτος αφού  $u_{\text{max},1} = u'_{\text{max},1} \Leftrightarrow \omega \cdot A = \omega' \cdot A'$

**B)** Έστω σύστημα δύο σωμάτων  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$ , με μάζες  $m_1$  και  $m_2$ , που βρίσκονται επαφή. Το  $\Sigma_1$  είναι δεμένο στο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου (όπως στο σχήμα) σταθεράς  $k$  ενώ το  $\Sigma_2$  δεν είναι κολλημένο με το  $\Sigma_1$ . Μετακινούμε το σύστημα συμπιέζοντας το ελατήριο κατά  $A$  και το αφήνουμε ελεύθερο, οπότε εκτελεί α.α.τ.

Θα μελετήσουμε την κίνηση του  $\Sigma_2$ , το οποίο έχει την ίδια γωνιακή συχνότητα με το  $\Sigma_1$ , αλλά σταθερά επαναφοράς  $D_2$ , ώστε

$$k = (m_1 + m_2)\omega^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} D_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot k \\ D_2 = m_2\omega^2 \end{array} \right.$$

**Θ.Ι.συστήματος**  $\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F_{ελ} + B_{ολ} = 0 \Leftrightarrow -k \cdot \Delta l_0 - (m_1 + m_2)g$   
 $= 0 \Leftrightarrow \Delta l_0 = -\frac{(m_1 + m_2)g}{k}$

**Τυχ. Θ.  $\Sigma_2$**   $\Sigma F = -D_2 \cdot x \Leftrightarrow F_2 + B_2 = -D_2 \cdot x \Leftrightarrow F_2 - m_2g = -D_2 \cdot x$   
 $\Leftrightarrow$

$$F_2 = m_2g - D_2 \cdot x, \quad -A \leq x \leq A$$

- Όταν  $-A \leq x \leq 0$  (κάτω από τη Θ.Ι.)  $F_2 > 0 \rightarrow$  δεν χάνεται η επαφή.
- Όταν  $0 < x \leq A$  (πάνω από τη Θ.Ι.) η  $F_2$  μπορεί να μηδενιστεί αν

$$F_2 = 0 \Leftrightarrow m_2g - D_2 \cdot x_{\text{crit}} = 0 \Leftrightarrow x_{\text{crit}} = \frac{m_2g}{D_2} \Leftrightarrow x_{\text{crit}} = \frac{m_2g}{m_2\omega^2} \Leftrightarrow x_{\text{crit}} = \frac{g}{\omega^2}$$

Με δεδομένο  $\omega$ , το μέγιστο επιτρεπόμενο πλάτος για να μη χαθεί η επαφή είναι

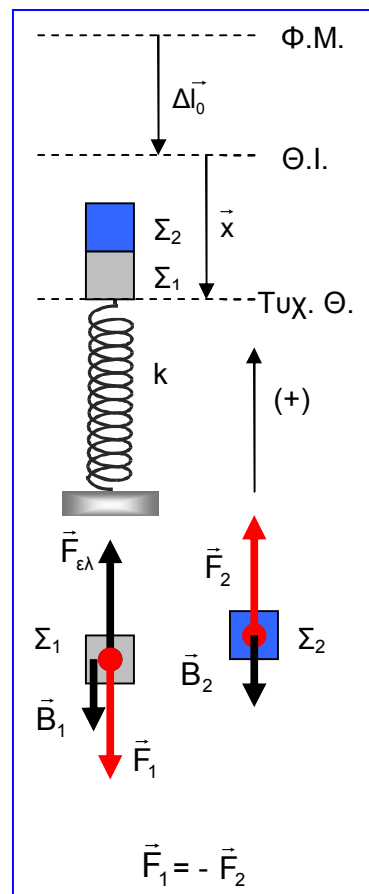
$$A = \frac{g}{\omega^2}$$

Αν θέσουμε  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$ , βρίσκουμε  $x_{\text{crit}} = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} = |\Delta l_0|$ , δηλαδή η επαφή

χάνεται στη θέση Φ.Μ.

### Παρατηρήσεις

1. Το σύστημα των σωμάτων δεν περνά υποχρεωτικά από τη θέση Φ.Μ οπότε δεν είναι βέβαιο ότι η επαφή θα χαθεί. Αυτό εξαρτάται από το πλάτος της ταλάντωσης. Η επαφή χάνεται μόνο αν ισχύει  $A > |\Delta l_0|$ .
2. Μπορούμε να προβλέψουμε την απώλεια επαφής στη θέση Φ.Μ. μια και στη θέση



αυτή το βάρος προσδίδει σε κάθε σώμα επιτάχυνση  $g$ , αλλά το σώμα που είναι δεμένο στο ελατήριο θα έχει επιπλέον επιτάχυνση με φορά προς τα κάτω λόγω της δύναμης που δέχεται από το ελατήριο.

3. Μετά την απώλεια επαφής (εφόσον υπάρξει) το σώμα  $\Sigma_2$ , θα κάνει κατακόρυφη βολή με αρχική ταχύτητα της οποίας το μέτρο (έστω  $u_2$ ) μπορεί να προσδιοριστεί με εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας της ταλάντωσης του συστήματος των δύο σωμάτων:  $\frac{1}{2} m_2 u_2^2 + \frac{1}{2} D_2 x_{\text{crit}}^2 = \frac{1}{2} k A^2$

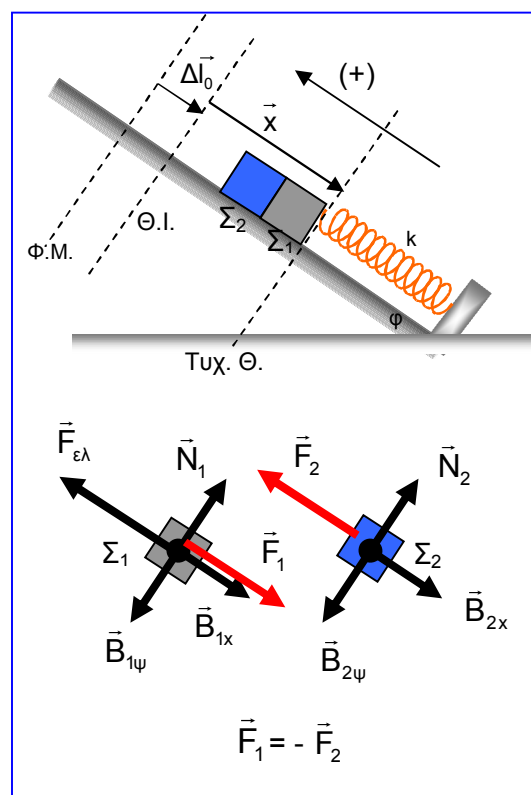
4. Μετά την απώλεια επαφής (εφόσον υπάρξει) το σώμα  $\Sigma_1$ , καθώς παραμένει δεμένο στο ελατήριο, θα κάνει νέα Απλή Αρμονική Ταλάντωση η οποία λόγω αλλαγής μάζας θα έχει:

- διαφορετική Θέση Ισορροπίας
- σταθερά ταλάντωσης  $D_1 = k$
- διαφορετική γωνιακή συχνότητα  $\omega'$ , αφού  $k = m_1 \omega'^2$
- πλάτος ταλάντωσης  $A'$  που υπολογίζεται με εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας της ταλάντωσης, για την νέα ταλάντωση του  $\Sigma_1$ . Εννοείται πως πρέπει να απομακρυνθεί με κάποιον τρόπο το σώμα  $\Sigma_2$  ώστε να μην έχουμε κρούση των δύο σωμάτων κατά την κάθοδό του.

Γ) Έστω σύστημα δύο σωμάτων  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$ , με μάζες  $m_1$  και  $m_2$ , που βρίσκονται επαφή πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης  $\phi$ . Το  $\Sigma_1$  είναι δεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς  $k$  (όπως στο σχήμα), ενώ το  $\Sigma_2$  δεν είναι κολλημένο με το  $\Sigma_1$ . Μετακινούμε το σύστημα συμπιέζοντας το ελατήριο κατά  $A$  και το αφήνουμε ελεύθερο, οπότε εκτελεί α.α.τ.

Θα μελετήσουμε την κίνηση του  $\Sigma_2$ , το οποίο έχει την ίδια γωνιακή συχνότητα με το  $\Sigma_1$ , αλλά σταθερά επαναφοράς  $D_2$ , ώστε

$$\left. \begin{aligned} k &= (m_1 + m_2) \omega^2 \\ D_2 &= m_2 \omega^2 \end{aligned} \right\} D_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot k$$



Θ.Ι.συστήματος  $\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F_{\varepsilon\lambda} + B_{o\lambda,x} = 0 \Leftrightarrow -k \cdot \Delta l_0 - (m_1 + m_2) g \eta \mu \phi = 0 \Leftrightarrow$

$$\Delta l_0 = -\frac{(m_1 + m_2)g\eta\mu\phi}{k}$$

$$\boxed{\text{Τυχ. Θ. } \Sigma_2} \quad \Sigma F_x = -D_2 \cdot x \Leftrightarrow F_2 + B_{2,x} = -D_2 \cdot x \Leftrightarrow F_2 - m_2 g \eta \mu \phi = -D_2 \cdot x \Leftrightarrow$$

$$F_2 = m_2 g \eta \mu \phi - D_2 \cdot x, \quad -A \leq x \leq A$$

- Όταν  $-A \leq x \leq 0$  (κάτω από τη Θ.Ι.)  $F_2 > 0 \rightarrow$  δεν χάνεται η επαφή.
- Όταν  $0 < x \leq A$  (πάνω από τη Θ.Ι.) η  $F_2$  μπορεί να μηδενιστεί αν

$$F_2 = 0 \Leftrightarrow m_2 g \eta \mu \phi - D_2 x_{\text{crit}} = 0 \Leftrightarrow x_{\text{crit}} = \frac{m_2 g \eta \mu \phi}{D_2} \Leftrightarrow x_{\text{crit}} = \frac{m_2 g \eta \mu \phi}{m_2 \omega^2} \Leftrightarrow$$

$$x_{\text{crit}} = \frac{g \eta \mu \phi}{\omega^2}$$

Με δεδομένο  $\omega$ , το μέγιστο επιτρεπόμενο πλάτος για να μη χαθεί η επαφή είναι

$$A = \frac{g \eta \mu \phi}{\omega^2}$$

Αν θέσουμε  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$ , βρίσκουμε  $x_{\text{crit}} = \frac{(m_1 + m_2)g\eta\mu\phi}{k} = |\Delta l_0|$ , δηλαδή η

επαφή χάνεται στη θέση Φ.Μ.

### Παρατηρήσεις

1. Το σύστημα των σωμάτων δεν περνά υποχρεωτικά από τη θέση Φ.Μ. οπότε δεν είναι βέβαιο ότι η επαφή θα χαθεί. Αυτό εξαρτάται από το πλάτος της ταλάντωσης. Η επαφή χάνεται μόνο αν ισχύει  $A > |\Delta l_0|$ .
2. Μπορούμε να προβλέψουμε την απώλεια επαφής στη θέση Φ.Μ. μια και στη θέση αυτή η συνιστώσα  $B_x$  του βάρους προσδίδει σε κάθε σώμα επιτάχυνση  $g\eta\mu\phi$ , αλλά το σώμα που είναι δεμένο στο ελατήριο θα έχει επιπλέον επιτάχυνση με φορά προς τα κάτω λόγω της δύναμης που δέχεται από το ελατήριο.
3. Μετά την απώλεια επαφής (εφόσον υπάρξει) το σώμα  $\Sigma_2$ , θα κάνει ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα της οποίας το μέτρο (έστω  $u_2$ ) μπορεί να προσδιοριστεί με εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας της ταλάντωσης του συστήματος των δύο σωμάτων:  $\frac{1}{2} m_2 u_2^2 + \frac{1}{2} D_2 x_{\text{crit}}^2 = \frac{1}{2} k A^2$
4. Μετά την απώλεια επαφής (εφόσον υπάρξει) το σώμα  $\Sigma_1$ , καθώς παραμένει δεμένο στο ελατήριο, θα κάνει νέα Απλή Αρμονική Ταλάντωση η οποία θα έχει:
  - διαφορετική Θέση Ισορροπίας
  - σταθερά ταλάντωσης  $D_1 = k$
  - διαφορετική γωνιακή συχνότητα  $\omega'$ , αφού  $k = m_1 \omega'^2$
  - πλάτος ταλάντωσης  $A'$  που υπολογίζεται με εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας της ταλάντωσης, για την νέα ταλάντωση του  $\Sigma_1$ . Εννοείται πως πρέπει να απομακρυνθεί με κάποιον τρόπο το σώμα  $\Sigma_2$  ώστε να μην έχουμε κρούση των δύο σωμάτων κατά την κάθοδό του.

**Δ)** Έστω σύστημα δύο σωμάτων  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$ , με μάζες  $m_1$  και  $m_2$ , που βρίσκονται σε επαφή πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Το  $\Sigma_1$  είναι δεμένο στο άκρο οριζώντιου ελατηρίου (όπως στο σχήμα) σταθεράς  $k$  ενώ το  $\Sigma_2$  βρίσκεται πάνω στο  $\Sigma_1$ , είναι κολλημένο με το  $\Sigma_1$  και παρουσιάζει συντελεστή στατικής τριβής  $\mu_\sigma$ . Μετακινούμε το σύστημα συμπιέζοντας το ελατήριο και το αφήνουμε ελεύθερο, οπότε εκτελεί α.α.τ.

Θα μελετήσουμε την κίνηση του  $\Sigma_2$ , το οποίο έχει την ίδια γωνιακή συχνότητα με το  $\Sigma_1$ , αλλά σταθερά επαναφοράς  $D_2$ , ώστε

$$k = (m_1 + m_2)\omega^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} D_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot k \\ D_2 = m_2\omega^2 \end{array} \right.$$

Τυχ. Θ.  $\Sigma_2$   $\Sigma F_x = -D_2 \cdot x \Leftrightarrow T_\sigma = -D_2 \cdot x, -A \leq x \leq A$

**Δ1)** Με δεδομένο πλάτος  $A$

Στις ακραίες θέσεις απαιτείται το μεγαλύτερο μέτρο της στατικής τριβής, που είναι  $|T_{\sigma, \max}| = D_2 \cdot A$

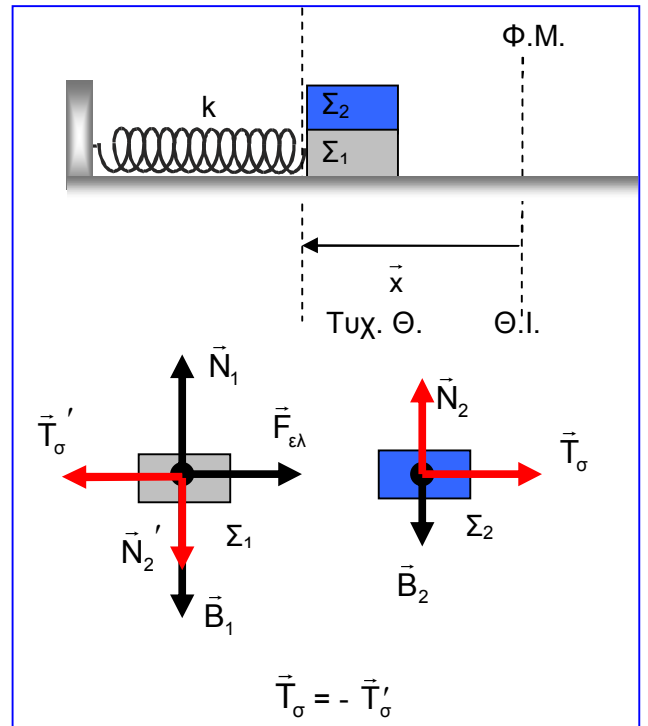
Για να μη χάνεται η επαφή  $|T_{\sigma, \max}| \leq T_{op} \Leftrightarrow D_2 \cdot A \leq \mu_\sigma m_2 g \Leftrightarrow \mu_\sigma \geq \frac{D_2 A}{m_2 g} \Leftrightarrow \mu_{\sigma, \min} =$

$$\frac{m_2 \omega^2 A}{m_2 g} \Leftrightarrow \mu_{\sigma, \min} = \frac{\omega^2 A}{g}$$

**Δ2)** Με δεδομένο συντελεστή στατικής τριβής  $\mu_\sigma$

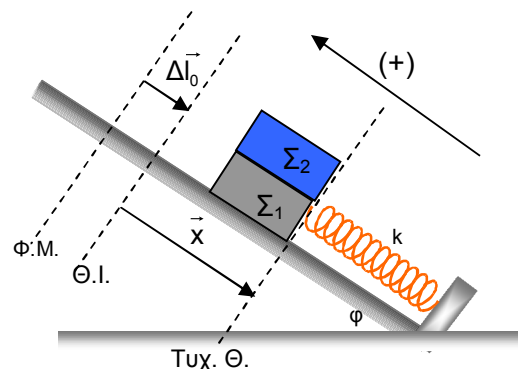
$$|T_{\sigma, \max}| \leq T_{op} \Leftrightarrow D_2 \cdot A \leq \mu_\sigma m_2 g \Leftrightarrow A \leq \frac{\mu_\sigma g}{\omega^2} \Leftrightarrow A_{\max} = \frac{\mu_\sigma g}{\omega^2}$$

**Ε)** Έστω σύστημα δύο σωμάτων  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$ , με μάζες  $m_1$  και  $m_2$ , που βρίσκονται σε επαφή πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης  $\varphi$ . Το  $\Sigma_1$  είναι δεμένο στο άκρο οριζώντιου ελατηρίου (όπως στο σχήμα) σταθεράς  $k$  ενώ το  $\Sigma_2$  βρίσκεται πάνω στο  $\Sigma_1$ , είναι κολλημένο με το  $\Sigma_1$  και παρουσιάζει συντελεστή στατικής τριβής  $\mu_\sigma$ . Το σύστημα αρχικά ισορροπεί. Μετακινούμε το σύστημα συμπιέζοντας το ελατήριο και το αφήνουμε ελεύθερο, οπότε εκτελεί α.α.τ.



Θα μελετήσουμε την κίνηση του  $\Sigma_2$ , το οποίο έχει την ίδια γωνιακή συχνότητα με το  $\Sigma_1$ , αλλά σταθερά επαναφοράς  $D_2$ , ώστε

$$\left. \begin{aligned} k &= (m_1 + m_2)\omega^2 \\ D_2 &= m_2\omega^2 \end{aligned} \right\} D_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot k$$



Θ.Ι. συστήματος  $\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F_{ελ} + B_{ολ,x} = 0 \Leftrightarrow$

$$-k \cdot \Delta l_0 - (m_1 + m_2)g \eta \mu \varphi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Delta l_0 = -\frac{(m_1 + m_2)g \eta \mu \varphi}{k}$$

Τυχ. Θ.  $\Sigma_2$   $\Sigma F_x = -D_2 \cdot x \Leftrightarrow T_\sigma + B_{2,x} = -D_2 \cdot x \Leftrightarrow$

$$T_\sigma - m_2 g \eta \mu \varphi = -D_2 \cdot x \Leftrightarrow T_\sigma = m_2 g \eta \mu \varphi - D_2 \cdot x$$

**E1) Με δεδομένο πλάτος A**

Στην κάτω ακραία θέση  $x = -A$  απαιτείται το μεγαλύτερο μέτρο της στατικής τριβής, που είναι  $|T_{\sigma, \max}| = m_2 g \eta \mu \varphi + D_2 \cdot A$

$$\text{Για να μη χάνεται η επαφή } |T_{\sigma, \max}| \leq T_{op} \Leftrightarrow m_2 g \eta \mu \varphi + D_2 \cdot A \leq \mu_\sigma m_2 g \sigma \nu \varphi \Leftrightarrow$$

$$\mu_\sigma \geq \frac{m_2 g \eta \mu \varphi + D_2 A}{m_2 g \sigma \nu \varphi} \Leftrightarrow \mu_{\sigma, \min} = \frac{m_2 g \eta \mu \varphi + m_2 \omega^2 A}{m_2 g \sigma \nu \varphi} \Leftrightarrow \mu_{\sigma, \min} = \frac{g \eta \mu \varphi + \omega^2 A}{g \sigma \nu \varphi}$$

**E2) Με δεδομένο συντελεστή στατικής τριβής  $\mu_\sigma$**

$$|T_{\sigma, \max}| \leq T_{op} \Leftrightarrow m_2 g \eta \mu \varphi + D_2 \cdot A \leq \mu_\sigma m_2 g \sigma \nu \varphi \Leftrightarrow A \leq \frac{m_2 g (\mu_\sigma \sigma \nu \varphi - \eta \mu \varphi)}{m_2 \omega^2} \Leftrightarrow$$

$$A_{\max} = \frac{g (\mu_\sigma \sigma \nu \varphi - \eta \mu \varphi)}{\omega^2}$$

