ΛΥΜΕΝΑ Β ΘΕΜΑΤΑ

(Λ) Β.2.1 Δίσκος διαγράφει ομαλή κυκλική κίνηση γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Δύο σημεία Α και Β της επιφάνειας του δίσκου έχουν λόγο ακτίνων $R_A/R_B=2/3$.
Αν το σημείο Α έχει ταχύτητα $\upsilon_A=20m/s$ τότε το Β θα έχει:

α. $\upsilon_B=10m/s$ β. $\upsilon_B=20m/s$ γ. $\upsilon_B=20/3\ m/s$ δ. $\upsilon_B=30m/s$

Απάντηση

Και τα δύο σημεία περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα που είναι και η γωνιακή ταχύτητα, ω, του δίσκου. Για τις ταχύτητες των Α και Β ισχύουν οι σχέσεις:

$\upsilon_A= \omega R_A$ (1) και $\upsilon_B=\omega R_B$ (2)

$\frac{\upsilon_A}{\upsilon_B}=\frac{R_A}{R_B} \rightarrow \upsilon_B= \upsilon_A\cdot\frac{R_B}{R_A} \rightarrow$ $\boldsymbol{\upsilon_B=30m/s}$ Σωστό είναι το **(δ)**

(Λ) Β.2.2 Δύο σφαιρίδια διαγράφουν κυκλικές τροχιές ακτίνων $R_1=R$ και $R_2=4R$ με την ίδια συχνότητα f. Αν το ένα έχει κεντρομόλο επιτάχυνση α_1 και το άλλο α_2 τότε η σχέση των μέτρων τους είναι

$\alpha_1=\alpha_2$ β. $\alpha_2=2\alpha_1$ γ. $\alpha_2=4\alpha_1$ δ. $\alpha_2=16\alpha_1$

Απάντηση

Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι $\alpha=\omega^2R$ και η γωνιακή ταχύτητα $\omega=2\pi f$
Τότε: $\alpha=4\pi^2f^2R$. Άρα

$\alpha_1=4\pi^2f^2R_1=4\pi^2f^2R$ (1)

$\alpha_2=4\pi^2f^2R_2=4\pi^2f^24R= 16\pi^2f^2R$ (2)

Από (1)(2)→ $\boldsymbol{\alpha_2=4\alpha_1}$. Σωστό είναι το **(γ)**

(Λ) Β.2.3 Σε ένα ρολόι θέλουμε το άκρο του ωροδείκτη και το άκρο του λεπτοδείκτη να έχουν την ίδια ταχύτητα λόγω περιστροφής (γραμμική ταχύτητα). Αν συμβολίσουμε με L_1 το μήκος του ωροδείκτη και με L_2 το μήκος του λεπτοδείκτη, τότε για το λόγο των μηκών ισχύει :

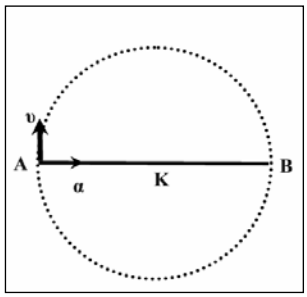
α. $L_1/L_2=12$ β. $L_1/L_2=1/12$, γ. $L_1/L_2=1/24$ δ. $L_1/L_2=24$

Απάντηση

Αν υ_1 είναι η γραμμική ταχύτητα του άκρου του ωροδείκτη με περίοδο $T_1=12h$ και υ_2 η γραμμική ταχύτητα του άκρου του λεπτοδείκτη με περίοδο $T_2=1h$, τότε:

$\upsilon_1=\upsilon_2 \rightarrow \omega_1 L_1=\omega_2 L_2 \rightarrow \frac{2\pi}{T_1} L_1=\frac{2\pi}{T_2} L_2 \rightarrow \frac{L_1}{L_2}=\frac{T_1}{T_2} \rightarrow \mathbf{\frac{L_1}{L_2}=12}$ Σωστό είναι το (**α**)

(Λ) Β.2.4 Σώμα Σ_1 κινείται με σταθερή επιτάχυνση α κατά μήκος της διαμέτρου ΑΚΒ ενός κύκλου με κέντρο Κ, ακτίνας R=22,5m. Τη στιγμή $t_0=0$ που το Σ_1 ξεκινάει από το σημείο Α χωρίς αρχική ταχύτητα, περνάει από το Α ένα άλλο σώμα Σ_2 που κάνει πάνω στον ίδιο κύκλο ομαλή κυκλική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα, ω. Τα δύο σώματα συναντιούνται για πρώτη φορά μετά χρόνο t_1 στο άλλο άκρο της διαμέτρου, Β, με το Σ_2 να περνάει για $2^η$ φορά από το Β μετά τη χρονική στιγμή $t_0=0$. Η σχέση που συνδέει τα μέτρα της επιτάχυνσης α και της γωνιακής ταχύτητας ω είναι:



α. $\omega^2=\alpha$ β. $\omega^2=2\alpha$ γ. $\alpha=2\omega^2$ δ. $\alpha=4\omega^2$

Δίνεται $\pi^2=10$

Απάντηση

Για το Σ_1: Το Σ_1 κάνει ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, άρα $AB=\frac{1}{2}\alpha t_1^2 \rightarrow 2R=\frac{1}{2}\alpha t_1^2$ (1)

Για το Σ_2: Το Σ_2 κάνει ομαλή κυκλική κίνηση και τη χρονική στιγμή t_1 περνάει για δεύτερη φορά από το Β συνεπώς έχει διανύσει 1,5 περιφέρεια, δηλαδή τόξο

$\Delta\theta=2\pi$ rad$+\pi$ rad$=3\pi$ rad. Άρα $\Delta\theta=\omega t_1 \rightarrow 3\pi=\omega t_1 \rightarrow t_1=\frac{3\pi}{\omega}$ (2)

Από (1)(2)$\rightarrow 4R=\alpha t_1^2 \rightarrow 4R=\alpha\frac{9\pi^2}{\omega^2} \rightarrow \mathbf{\alpha=\omega^2}$ Άρα σωστό είναι το **(α)**

(Λ) Β.2.5 Δύο υλικά σημεία (1) και (2) διαγράφουν τον ίδιο κύκλο ξεκινώντας ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο τη χρονική στιγμή $t_0=0$ και κινούμενα προς την ίδια κατεύθυνση. Το (1) με περίοδο $T_1=25s$ και το (2), με $T_2=35s$. Τα δύο σημεία θα συναντηθούν για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή

α. $t_1=40s$ β. $t_1=87,5s$ γ. $t_1=120s$ $t_2=85s$

Απάντηση

Το (1) είναι πιο γρήγορο από το (2). Συνεπώς όταν θα συναντηθούν για πρώτη φορά το (1) θα έχει «ρίξει» έναν κύκλο στο (2), δηλαδή θα έχει κάνει ένα κύκλο (2π rad) παραπάνω από το (2). Αν το (1) έχει διαγράψει τόξο $\theta_1=\omega_1 t$ και το (2), τόξο $\theta_2=\omega_2 t$ θα ισχύει:

$\theta_1-\theta_2=2\pi$ rad$\rightarrow \omega_1 t-\omega_2 t=2\pi\rightarrow \frac{2\pi}{T_1}t-\frac{2\pi}{T_2}t=2\pi\rightarrow\frac{t}{T_1}-\frac{t}{T_2}=1\rightarrow t=\frac{T_1T_2}{T_2-T_1}\rightarrow$ **t= 87,5s**

Σωστό είναι το **(β)**

* Στα 87,5s το (1) θα έχει κάνει $\theta_1=\frac{2\pi}{T_1}t=7\pi$ rad δηλαδή 3,5 κύκλους και το (2)

$\theta_2=\frac{2\pi}{T_2}t=5\pi$ rad δηλαδή 2,5 κύκλους δηλαδή ένα κύκλο λιγότερο.

Παραλλαγή. Ο λεπτοδείκτης με περίοδο $T_\Lambda=1h$ και ο ωροδείκτης με περίοδο $T_\Omega=12h$ ενός ρολογιού με δείκτες ξεκινούν μαζί στις 12:00. Μετά πόσο χρόνο θα γίνει η πρώτη τους συνάντηση;

Με την ίδια λογική καταλήγουμε: $t=\frac{T_\Lambda T_\Omega}{T_\Omega-T_\Lambda}=\frac{1h\cdot 12h}{12h-1h}\rightarrow t=\frac{12}{11}h$, δηλαδή στις 1και 5′ και 27sec περίπου.

(Λ) Β.2.6 Δύο υλικά σημεία (1) και (2) διαγράφουν τον ίδιο κύκλο ακτίνας R=0,6m ξεκινώντας ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο τη χρονική στιγμή $t_0=0$. Το (1) με ταχύτητα $\upsilon_1=2,8\pi$ m/s και το (2), με $\upsilon_2=3,6\pi$ m/s. Θα δύο σημεία θα συναντηθούν και πάλι για πρώτη φορά

I. αν κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση, τη χρονική στιγμή

α. $t_1=2s$ β. $t_1=2,5s$ γ. $t_1=1,2s$ δ. $t_1=1,5s$

II. Αν κινούνται προς την αντίθετη κατεύθυνση, τη χρονική στιγμή

α. $t_2=0,1850s$ β. $t_2=0,1875s$ γ. $t_2=0,2520s$ $t_2=1,2575s$

Απάντηση

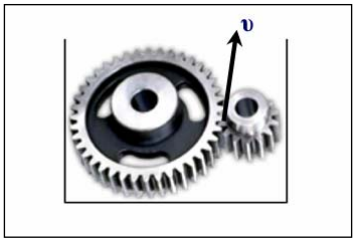
I. Αν κινούνται ομόρροπα θα συναντηθούν σε κάποιο τυχαίο σημείο μετά χρόνο t_1. Μέχρι τότε το (2) που είναι πιο γρήγορο θάχει κάνει ένα κύκλο παραπάνω από το (1) δηλαδή τα τόξα που θα έχουν διαγράψει θα διαφέρουν κατά 2πR

$S_2-S_1=2\pi R \rightarrow \upsilon_2 t_1-\upsilon_1 t_1=2\pi R \rightarrow t_1=\frac{2\pi R}{\upsilon_2-\upsilon_1} \rightarrow t_1=\frac{1{,}2\pi\ m}{0{,}8\pi m/s} \rightarrow \mathbf{t_1=1{,}5s}$ Σωστό είναι το **(δ)**

ΙΙ. Αν κινούνται αντίρροπα θα συναντηθούν και πάλι σε κάποιο άλλο τυχαίο σημείο μετά χρόνο t_2. Μέχρι τότε το καθένα θα έχει διαγράψει τόξο S_1 και S_2 έτσι ώστε το άθροισμα αυτών να κάνει μια περιφέρεια κύκλου δηλαδή $2\pi R$.

Άρα $S_2+S_1=2\pi R \rightarrow \upsilon_2 t_2+\upsilon_1 t_2=2\pi R \rightarrow t_2=\frac{2\pi R}{\upsilon_2+\upsilon_1} \rightarrow \mathbf{t_2=0{,}1875s}$ Σωστό είναι το **(β)**

(Λ) Β.2.7 Δύο οδοντωτοί τροχοί βρίσκονται σε επαφή και έχουν ακτίνες R_1 και R_2 με $R_2=3R_1$. Οι τροχοί περιστρέφονται με γωνιακές ταχύτητες ω_1 και ω_2 αντιστοίχως.



Ι. Ο λόγος των γωνιακών ταχυτήτων είναι:

α. $\frac{\omega_1}{\omega_2}=-3$ β. $\frac{\omega_1}{\omega_2}=-\frac{1}{3}$ γ. $\frac{\omega_1}{\omega_2}=9$

ΙΙ. Ο λόγος των μέτρων των κεντρομόλων επιταχύνσεων των σημείων της περιφέρειας του κάθε τροχού είναι

α. $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=3$ α. $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{1}{3}$ α. $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=9$

Απάντηση

Ι. Το σημείο επαφής των δύο τροχών έχει προφανώς μια κοινή ταχύτητα υ η οποία είναι ίδια κατά μέτρο για κάθε σημείο της περιφέρειας αυτών. Για να συμβαίνει αυτό οι δύο τροχοί μθα πρέπει να κινούνται με αντίθετης φοράς γωνιακές ταχύτητες

$\upsilon=\omega_1 R_1$ (1) και $\upsilon=-\omega_2 R_2$ (2)

Από (1)(2) $\rightarrow \omega_1 R_1=-\omega_2 R_2 \rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2}=-\frac{R_2}{R_1} \rightarrow \boldsymbol{\frac{\omega_1}{\omega_2}=-3}$ Σωστό είναι **το (α)**

ΙΙ. Για τα μέτρα των επιταχύνσεων: $\alpha_1=\frac{\upsilon^2}{R_1}$ (3) και $\alpha_2=\frac{\upsilon^2}{R_2}$ (4)

Από (3)(4)$\rightarrow$ $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{R_2}{R_1} \rightarrow \boldsymbol{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=3}$ Σωστό είναι το **(α)**

(Λ) Β.2.8 Μια ομογενής ρόδα ακτίνας R κυλάει χωρίς να γλιστράει πάνω στο δρόμο. Το μήκος του τόξου που διαγράφει σε χρόνο t ένα σημείο της περιφέρειάς της ισούται με τη μετατόπιση του κέντρου της. Η σχέση της ταχύτητας υ_K του κέντρου και της γωνιακή ταχύτητας, ω του τροχού είναι:

α. $\upsilon_\kappa=\omega R$ β. $\upsilon_\kappa=2\omega R$ γ. $\upsilon_\kappa=0{,}5\omega R$ δ. $\upsilon_\kappa=4\omega R$

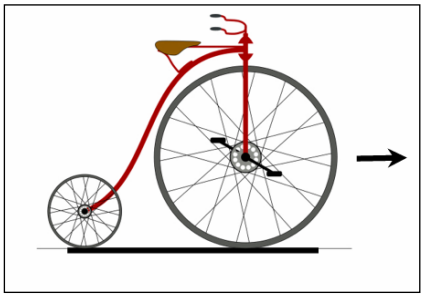
Απάντηση

Η μετατόπιση του κέντρου, K, σε χρόνο t είναι $\Delta x=\upsilon_K t$ (1)

Το μήκος του τόξου που διαγράφει το περιφερειακό σημείο είναι $\Delta s=\upsilon t=\omega R\cdot t$ (2)

Σύμφωνα με την υπόθεση $\Delta x=\Delta s\rightarrow$ $\boldsymbol{\upsilon_K=\omega R}$ Σωστό είναι το **(α)**

(Λ) Β.2.9 Το παλιό ποδήλατο που φαίνεται στο σχήμα κινείται με σταθερή ταχύτητα υ.
Η ακτίνα της μπροστινής ρόδας είναι $R_1=1m$ και της πίσω $R_2=0{,}5m$



I. Αν N_1 και N_2 είναι το πλήθος των περιστροφών που κάνει η κάθε ρόδα τότε ισχύει:

α. $N_1=N_2$ β. $N_1=2N_2$ γ. $N_2=2N_1$

II. Αν η ταχύτητα είναι υ=10m/s τότε πόσες περιστροφές θα έχουν διαγράψει οι ρόδες σε χρονικό διάστημα Δt=20s;
Να θεωρηθεί ότι η ταχύτητα του ποδηλάτου, υ, είναι ίση κατά μέτρο με τις γραμμικές ταχύτητες των περιφερειακών σημείων των δύο τροχών.

Απάντηση

I. Αν είναι ω_1 και ω_2 οι γωνιακές ταχύτητες των δύο τροχών και η ταχύτητα του ποδηλάτου, υ, είναι ίση κατά μέτρο με τις γραμμικές ταχύτητες των περιφερειακών σημείων των δύο τροχών τότε: $\upsilon=\omega_1R_1=\omega_2R_2\rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{R_2}{R_1}=\frac{1}{2}$ (1)

Σε χρόνο Δt η κάθε ρόδα περιστρέφεται κατά $\Delta\theta_1$ και $\Delta\theta_2$ και κάνει N_1 και N_2 περιστροφές αντίστοιχα:

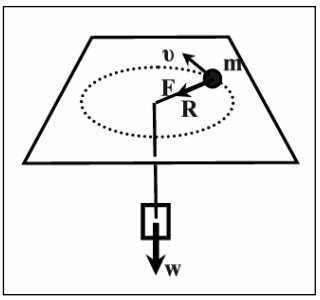
$N_1=\frac{\Delta\theta_1}{2\pi}=\frac{\omega_1\Delta t}{2\pi}$ και $N_2=\frac{\Delta\theta_2}{2\pi}=\frac{\omega_2\Delta t}{2\pi}$

Άρα: $\frac{N_1}{N_2}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{R_2}{R_1}=\frac{1}{2}\rightarrow$ $\mathbf{N_2=2N_1}$ Σωστό είναι το **(γ)**

Η μικρότερη ρόδα κάνει περισσότερες περιστροφές

II. $N_1=\frac{\Delta\theta_1}{2\pi}=\frac{\omega_1\Delta t}{2\pi}=\frac{\upsilon\Delta t}{R_1\cdot 2\pi}\rightarrow \mathbf{N_1=\frac{100}{\pi}}$ **περ.** και $\mathbf{N_2=\frac{200}{\pi}}$ **περ.**

(Λ) Β.2.10 Στο τραπέζι του σχήματος υπάρχει μια τρύπα μέσα από την οποία περνάει νήμα στα άκρα του οποίου είναι δεμένα μια μπίλια μάζας m και ένα βαρίδι βάρους w. Η μπίλια περιστρέφεται πάνω στο τραπέζι χωρίς τριβές, σε κυκλική τροχιά, ενώ το βαρίδι ισορροπεί. Οταν η συχνότητα περιστροφής είναι f_1 και η ακτίνα της τροχιάς R το βαρίδι πρέπει να έχει βάρος w. Αν η συχνότητα γίνει f_2 με την ίδια ακτίνα, τότε το βαρίδι πρέπει να έχει βάρος 4w.
Ο λόγος f_1/f_2 είναι:



α. $f_1/f_2=1/2$ β. $f_1/f_2=2$ γ. $f_1/f_2=4$ δ. $f_1/f_2=1/4$

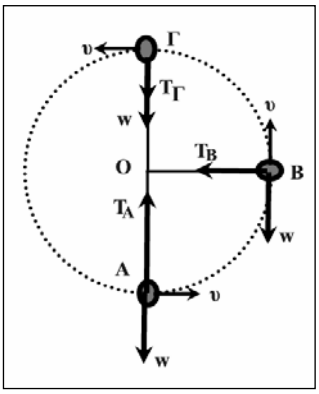
Απάντηση

Η τάση του νήματος που κρατάει τη σφαίρα στην κυκλική τροχιά παίζει το ρόλο της κεντρομόλου ($F=m\omega^2R$). Ταυτόχρονα όμως επειδή το βαρίδι ισορροπεί, η τάση του νήματος ισούται και με το βάρος του ($\Sigma F=0$). Άρα:

$\Sigma F_1=0 \rightarrow F_1-w=0 \rightarrow m\omega_1^2R=w \rightarrow m4\pi f_1^2R=w$ (1)
$\Sigma F_2=0 \rightarrow F_2-4w=0 \rightarrow m\omega_2^2R=4w \rightarrow m4\pi f_2^2R=4w$ (2)

Από (1):(2)$\rightarrow \frac{f_1^2}{f_2^2}=\frac{1}{4} \rightarrow \mathbf{\frac{f_1}{f_2}=\frac{1}{2}}$ Σωστό είναι το **(α)**

(Λ) Β.2.11 Το σώμα μάζας m κάνει ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας R με σταθερή κατά μέτρο ταχύτητα, υ σε κατακόρυφο επίπεδο, δεμένο στο άκρο νήματος μήκους R. Αν στα σημεία Α, Β, Γ η τάση του νήματος έχει μέτρα T_A, T_B και T_Γ αντιστοίχως τότε ισχύει η σχέση:



α. $T_A>T_B>T_\Gamma$ β. $T_B>T_A>T_\Gamma$ γ. $T_\Gamma>T_B>T_\Gamma$

Απάντηση

Σε κάθε σημείο της κυκλικής τροχιάς το σώμα δέχεται την τάση του νήματος Τα και το βάρος του w=mg. Η κεντρομόλος δύναμη ισούται με τη συνισταμένη στην κατεύθυνση της ακτίνας της τροχιάς και είναι $F_K=\Sigma F=m\upsilon^2/R$

Στο σημείο Α η κεντρομόλος δύναμη ισούται με:
$\Sigma F_A=T_A-w \rightarrow T_A=mg+m\upsilon^2/R$ (1)

Στο σημείο Β η κεντρομόλος δύναμη ισούται με:
$\Sigma F_A=T_B \rightarrow T_B=m\upsilon^2/R$ (2)

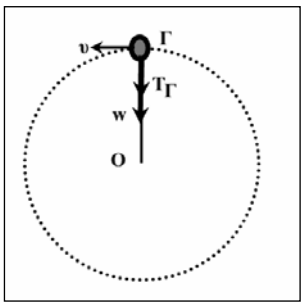
Στο σημείο Γ η κεντρομόλος δύναμη ισούται με:

$\Sigma F_\Gamma=T_\Gamma+w \rightarrow T_\Gamma=m\upsilon^2/R-mg$ (3)

Από (1)(2)(3)$\rightarrow$ $\mathbf{T_A>T_B>T_\Gamma}$ Σωστό είναι το **(α)**

(Λ) Β.2.12 Το σώμα μάζας m κάνει ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας R με σταθερή κατά μέτρο ταχύτητα, υ σε κατακόρυφο επίπεδο, δεμένο στο άκρο νήματος μήκους R. Η πιο μικρή τιμή της ταχύτητας υ στο ανώτερο σημείο της τροχιάς, Γ, ώστε το νήμα να είναι τεντωμένο είναι

α. $\upsilon_{min} = Rg$ β. $\upsilon_{min} = \sqrt{Rg}$ γ. $\upsilon_{min} = 2Rg$ δ. $\upsilon_{min} = \sqrt{2Rg}$



Απάντηση

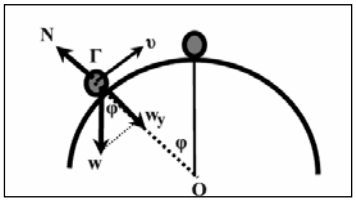
Στο ανώτερο σημείο, Γ, της τροχιάς ισχύει

$\Sigma F_\Gamma = m\alpha_K \rightarrow T_\Gamma + w = m\frac{\upsilon^2}{R} \rightarrow T_\Gamma = m\frac{\upsilon^2}{R} - mg$ (1)

Η πιο μικρή τιμή που μπορεί να έχει η τάση του νήματος είναι $T_{\Gamma min}=0$, μόλις λίγο πριν δηλαδή τσαλακώσει το νήμα.

Αρα (1)→ $m\frac{\upsilon_{min}^2}{R} - mg = 0 \rightarrow$ $\boldsymbol{\upsilon_{min} = \sqrt{Rg}}$ Σωστό είναι το **(β)**

(Λ) Β.2.13 Όχημα κινείται σε γέφυρα ακτίνας καμπυλότητας R. Για να μη χάνουν οι τροχοί του την επαφή τους με το έδαφος θα πρέπει η ταχύτητα του οχήματος να μην υπερβαίνει κάποιο όριο που σχετίζεται με την ακτίνα καμπυλότητας, R, την επιτάχυνση της βαρύτητας, g και τη γωνία φ που σχηματίζει η επιβατική ακτίνα του κινητού με την κατακόρυφο. Οι τιμές της ταχύτητας πρέπει να είναι:



α. $\upsilon < 2\sqrt{Rg\sigma\upsilon\nu\varphi}$ β. $\upsilon < 4\sqrt{Rg\sigma\upsilon\nu\varphi}$ γ. $\upsilon < \sqrt{Rg\sigma\upsilon\nu\varphi}$

Απάντηση

Καθώς το όχημα διαγράφει την καμπύλη ακτίνας R, με σταθερή ταχύτητα, μέτρου υ, δέχεται τις δυνάμεις του βάρους του w και της κάθετης αντίδρασης N από την επιφάνεια της καμπύλης. Στην τυχαία θέση η επιβατική ακτίνα σχηματίζει γωνία φ με την κατακόρυφο που διέρχεται από το κέντρο του νοητού κύκλου. Στη διεύθυνση της ακτίνας ασκούνται η δύναμη N και η συνιστώσα του βάρους $w_y = mg\sigma\upsilon\nu\varphi$. Η συνισταμένη ισούται με την κεντρομόλο δύναμη

$\Sigma F_y = m\alpha_\kappa \rightarrow mg\sigma\upsilon\nu\varphi - N = \frac{m\upsilon^2}{R} \rightarrow N = mg\sigma\upsilon\nu\varphi - \frac{m\upsilon^2}{R}$

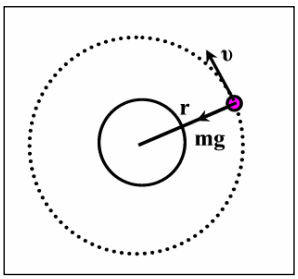
Για να έχουν επαφή οι ρόδες του οχήματος με την επιφάνεια της γέφυρας πρέπει N>0. Άρα

$mg\sigma\upsilon\nu\varphi - \frac{m\upsilon^2}{R} > 0 \rightarrow \upsilon^2 < Rg\sigma\upsilon\nu\varphi \rightarrow \upsilon < \sqrt{Rg\sigma\upsilon\nu\varphi}$ Σωστό είναι το **(γ)**.

* Αν η ταχύτητα γίνει $\upsilon = \sqrt{Rg\sigma\upsilon\nu\varphi}$ τότε γίνεται N=0 και οι τροχοί χάνουν την επαφή τους με την επιφάνεια της γέφυρας.

** Όταν το όχημα φτάσει στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του γίνεται φ=0, άρα συνφ=1 και η ταχύτητα πρέπει να είναι $\upsilon < \sqrt{Rg}$

(Λ) Β.2.14 Δορυφόρος της Γης μάζας m περιστρέφεται γύρω από αυτήν σε τροχιά ακτίνας r με ταχύτητα υ. Αν στην περιοχή που κινείται ο δορυφόρος η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g τότε η περίοδος περιστροφής του είναι:



α. $T= 2\pi\sqrt{\frac{g}{r}}$ β. $T= 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$ γ. $T= 4\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$

Απάντηση

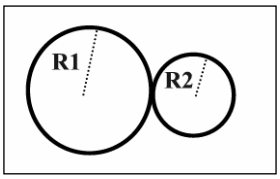
Ο δορυφόρος περιστρέφεται δεχόμενος μόνο τη δύναμη του βάρους του, mg που είναι κάθετη στην ταχύτητα περιστροφής, υ και παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης F_k.

$\Sigma F=mg \rightarrow F_k=mg \rightarrow \frac{m\upsilon^2}{r} = mg \rightarrow \upsilon^2=rg \rightarrow \frac{4\pi r^2}{T^2}=rg \rightarrow \mathbf{T=2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}}$ Σωστό είναι το **(β)**

όπου $\upsilon=\frac{2\pi R}{T}$

Η επιτάχυνση της βαρύτητας σε εκείνο το ύψος, g ισούται με την κεντρομόλο επιτάχυνση.

(Λ) Β.2.15 Δύο κινητά (1) και (2) τρέχουν σε δύο περιφέρειες κύκλων που έχουν ακτίνες R_1=8cm και R_2=4cm αντιστοίχως και εφάπτονται εξωτερικά. Οι γραμμικές ταχύτητες των κινητών είναι υ_1=9cm/s και υ_2=2cm/s. Οι περιστροφές που κάνει κάθε κινητό μεταξύ δύο διαδοχικών συναντήσεων είναι



α. N_1=9, N_2=4 β. N_1=4, N_2=9 γ. N_1=3 N_2=7

Απάντηση

Το σημείο συνάντησης είναι το σημείο επαφής των δύο τροχιών. Στο χρονικό διάστημα Δt μεταξύ δύο διαδοχικών συναντήσεων τα δύο κινητά θα έχουν διαγράψει ακέραιο πλήθος περιστροφών έστω N_1 το (1) και N_2 το (2)

$\Delta\theta_1=\omega_1\Delta t=\frac{\upsilon_1}{R_1}\Delta t$ (1) με $\Delta\theta_1=N_1\cdot 2\pi$ rad

$\Delta\theta_2=\omega_2\Delta t=\frac{\upsilon_2}{R_2}\Delta t$ (2) με $\Delta\theta_2=N_2\cdot 2\pi$ rad

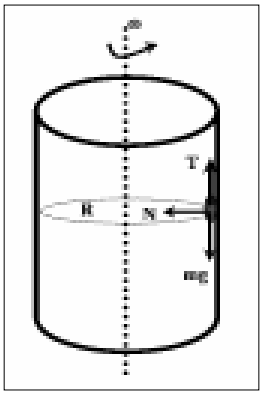
$(1):(2) \rightarrow \frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta_2}=\frac{\upsilon_1 R_2}{\upsilon_2 R_1} \rightarrow \frac{N_1}{N_2}=\frac{\upsilon_1 R_2}{\upsilon_2 R_1} \rightarrow \frac{N_1}{N_2}=\frac{36}{16} \rightarrow \mathbf{\frac{N_1}{N_2}=\frac{9}{4}}$

Άρα το (1) θα κάνει N_1=9 περιστροφές και το (2) N_2=4 περιστροφές.

Σωστό είναι το **(α)**

(Λ) Β.2.16 Κατακόρυφος κύλινδρος ακτίνας R=1m περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του yy′ ώστε μια σταγόνα λαδιού που εφάπτεται πάνω στο κυλινδρικό τοίχωμα αυτού να κρατιέται πάνω σ' αυτό, χωρίς να γλιστράει προς τα κάτω. Μεταξύ σταγόνας και επιφανείας του κυλίνδρου ο συντελεστής μέγιστης στατικής τριβής είναι μ_σ=0,4. Δίνεται το g=10m/s^2.
Η ελάχιστη συχνότητα περιστροφής, ώστε η σταγόνα να μη γλιστράει από το τοίχωμα είναι;

α. f_{min}=0,25π Hz β. f_{min}=π Hz γ. f_{min}= 0,4π Hz



Απάντηση

Η σταγόνα δέχεται τρεις δυνάμεις το βάρος της mg, τη στατική τριβή $T_{στ}$ από το τοίχωμα και την κάθετη αντίδραση N του τοιχώματος. Επειδή το επίπεδο περιστροφής της είναι οριζόντιο δηλαδή κάθετο στον κατακόρυφο άξονα περιστροφής yy′ και η N είναι η μοναδική δύναμη πάνω στην ακτινική διεύθυνση θα παίζει το ρόλο της κεντρομόλου.

$\Sigma F_R = m\alpha_k \rightarrow N = m\omega^2 R \rightarrow N = m4\pi^2 f^2 R$ (1)

Αφού η σταγόνα δεν ολισθαίνει η τριβή δεν υπερβαίνει τη μέγιστη τιμή της στατικής δηλαδή είναι $T \le T_{στ} \rightarrow T \le \mu_\sigma N$ (2)

Η σταγόνα ισορροπεί οπότε στον άξονα y ισχύει:

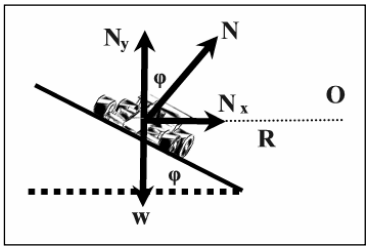
$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow T - mg = 0 \rightarrow T = mg \xrightarrow{(2)} mg \le \mu_\sigma N \xrightarrow{(1)} mg \le \mu_\sigma \cdot m4\pi^2 f^2 R \rightarrow f^2 \ge \frac{g}{4\pi^2 \mu_\sigma R} \rightarrow f \ge \sqrt{\frac{g}{4\pi^2 \mu_\sigma R}}$$

$\rightarrow f \ge 0{,}25\pi$ Hz$\rightarrow$ **f_{min}=0,25π Hz** Αρα σωστό είναι το **(α)**

(Λ) Β.2.17 Αυτοκίνητο εισέρχεται σε κυκλική στροφή δρόμου ακτίνας R και γωνίας κλίσης φ ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Ο δρόμος έχει πιάσει πάγο έτσι ώστε η τριβή μεταξύ του πάγου και των ελαστικών του αυτοκινήτου να είναι μηδενική. Η μέγιστη επιτρεπόμενη ταχύτητα του αυτοκινήτου ώστε να διαγράφει με ασφάλεια την κυκλική τροχιά είναι:

α. $\upsilon_{max} = \sqrt{Rg \cdot ημφ}$ β. $\upsilon_{max} = \sqrt{Rg \cdot συνφ}$ γ. $\upsilon_{max} = \sqrt{Rg \cdot εφφ}$

Απάντηση



Το αυτοκίνητο διαγράφει την κυκλική τροχιά νοητής ακτίνας R με ταχύτητα, υ. Οι δυνάμεις που δέχεται είναι το βάρος του w και την κάθετη αντίδραση N του κεκλιμένου δρόμου. Αυτή αναλύεται σε δύο ορθογώνιες συνιστώσες N_x=Νημφ και N_y=Νσυνφ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

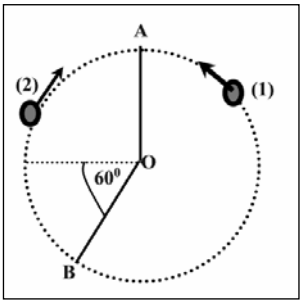
$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N_y - w = 0 \rightarrow N_y = w = mg \rightarrow N\sigma\upsilon\nu\varphi = mg$ (1)

Η συνιστώσα N_x έχει την κατεύθυνση της ακτίνας και συνεπώς παίζει το ρόλο της κεντρομόλου. Άρα στην περίπτωση της μέγιστης ταχύτητας,

$\Sigma F_x = m\alpha_\kappa \rightarrow N_x = \frac{m\upsilon_{max}^2}{R} \rightarrow N\eta\mu\varphi = \frac{m\upsilon_{max}^2}{R}$ (2)

Από (2):(1)$\rightarrow$ εφφ$=\frac{gR}{\upsilon_{max}^2} \rightarrow$ **$\upsilon_{max} = \sqrt{Rg \cdot εφφ}$** Σωστό είναι το **(γ)**

(Λ) Β.2.18 Δύο υλικά σημεία (1) και (2) εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση στην ίδια κυκλική τροχιά με αντίθετη φορά και με ταχύτητες μέτρου υ_1 και υ_2 αντιστοίχως. Το σημείο (2) κινείται σύμφωνα με τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Τα δύο υλικά σημεία συναντώνται για πρώτη φορά στο σημείο Α και για δεύτερη φορά στο σημείο Β όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα μέτρα των ταχυτήτων ικανοποιούν τη σχέση:



α. $\upsilon_1=\frac{2}{3}\upsilon_2$ β. $\upsilon_2=\frac{5}{7}\upsilon_1$ γ. $\upsilon_2=\frac{7}{5}\upsilon_1$ δ. $\upsilon_2=5\upsilon_1$

Απάντηση

Όταν θα συναντηθούν για δεύτερη φορά στο Β κινούμενα σε αντίθετες κατευθύνσεις θα έχουν διαγράψει τόξα $\Delta s_1=\upsilon_1\Delta t$ και $\Delta s_2=\upsilon_2\Delta t$.

Η επιβατική ακτίνα του κινητού (1) θα έχει διαγράψει γωνία $\theta_1=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$ rad άρα το (1) θα έχει διαγράψει τόξο: $\Delta s_1=R\cdot\theta_1 \rightarrow \Delta s_1=\frac{5\pi}{6}\cdot R$

Η επιβατική ακτίνα του κινητού (2) θα έχει διαγράψει γωνία $\theta_2=2\pi-\frac{5\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$ rad άρα το (2) θα έχει διαγράψει τόξο: $\Delta s_2=R\cdot\theta_2 \rightarrow \Delta s_2=\frac{7\pi}{6}\cdot R$

Άρα: $\frac{5\pi}{6}\cdot R=\upsilon_1\cdot\Delta t$ (1)

και $\frac{7\pi}{6}\cdot R=\upsilon_2\cdot\Delta t$ (2)

Από (1)(2)$\rightarrow \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}=\frac{5}{7} \rightarrow \boldsymbol{\upsilon_2=\frac{7}{5}\upsilon_1}$ Σωστό είναι το **(γ)**

ΛΥΜΕΝΑ Γ ΘΕΜΑΤΑ

(Λ) Γ.2.1 Τροχός με ακτίνα R=0,4m περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από τον κατακόρυφο άξονά του και κάνει N=60 περιστροφές κάθε 1min. Να υπολογιστούν:
Α. Η συχνότητα και η περίοδος του τροχού.
Β. Το μέτρο της γραμμικής και της γωνιακή ταχύτητας όλων των σημείων του τροχού που βρίσκονται στην περιφέρεια του.
Γ. Η γωνία, το μήκος του τόξου και το πλήθος των περιστροφών που διαγράφουν σημεία του τροχού που απέχουν r=0,2m από τον άξονα περιστροφής, σε χρονικό διάστημα Δt=10s.
Δ. Σε σημείο που απέχει απόσταση r=0,5m από το κέντρο τοποθετείται ένα κέρμα. Για ποιες τιμές του συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ δίσκου και κέρματος, το κέρμα δεν ολισθαίνει πάνω στο δίσκο;
Δίνονται $g=10m/s^2$ και $\pi^2=10$

Λύση

Α. Από τον ορισμό της συχνότητας: $f=\frac{N}{\Delta t}=\frac{60\pi\epsilon\rho}{60s}\rightarrow$ **f=1Hz** Άρα $T=\frac{1}{f}\rightarrow$ **T=1s**

Β. Η γωνιακή ταχύτητα είναι κοινή για όλα τα σημεία του δίσκου και είναι:

$$\omega=2\pi f\rightarrow \boldsymbol{\omega=2\pi\ rad/s}$$

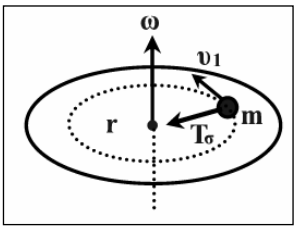
Η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας είναι:

$$\upsilon=\omega R\rightarrow \upsilon=2\pi\cdot 0,4\ m/s\rightarrow \boldsymbol{\upsilon=0,8\pi\ m/s}$$

Γ. Η γωνιακή ταχύτητα των εσωτερικών αυτών σημείων είναι ίδια με αυτή των περιφερειακών ω=2π rad/s ενώ η γραμμική ταχύτητα είναι τώρα $\upsilon_1=\omega r\rightarrow$ $\boldsymbol{\upsilon_1=0,4\pi\ m/s}$

Η γωνία του τόξου είναι $\Delta\theta=\omega\cdot\Delta t=(2\pi\ rad/s)\cdot 10s\rightarrow$ $\boldsymbol{\Delta\theta=20\pi\ rad}$.
Οι περιστροφές, $N_1=\frac{\Delta\theta}{2\pi}\rightarrow$ **N_1=10 περιστροφές**
Το μήκος τόξου: $\Delta s=\upsilon_1\cdot\Delta t=(0,4\pi\ m/s)\cdot 10s\rightarrow$ $\boldsymbol{\Delta s=4\pi\ m}$

Δ. Η μόνη δύναμη που δέχεται το κέρμα στην κατεύθυνση της ακτίνας είναι η στατική τριβή και συνεπώς αυτή θα έχει το ρόλο της κεντρομόλου



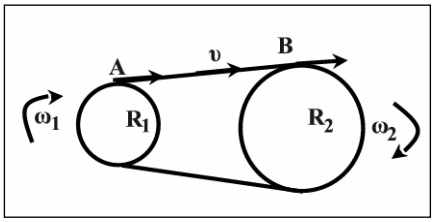
$\Sigma F_R=m\alpha_\kappa\rightarrow T_\sigma=m\frac{\upsilon_1^2}{r}$ (1)

Στον κατακόρυφο άξονα το κέρμα ισορροπεί συνεπώς
$\Sigma F_y=0\rightarrow N-mg=0\rightarrow N=mg$ (2)

Για να μην ολισθαίνει το κέρμα πρέπει η στατική τριβή να μην υπερβαίνει την οριακή (μέγιστη) τιμή της, δηλαδή $T_\sigma\le T_{o\rho}\rightarrow T_\sigma\le\mu_\sigma N\rightarrow T_\sigma\le\mu_\sigma mg$ (3)

$$\text{Από (1)(3)}\rightarrow m\frac{\upsilon_1^2}{r}\le\mu_\sigma mg\rightarrow \mu_\sigma\ge\frac{\upsilon_1^2}{rg}\rightarrow \boldsymbol{\mu_\sigma\ge 0,8}$$

(Λ) Γ.2.2 Στο σύστημα των δύο τροχών με μη ελαστικό ιμάντα οι ακτίνες είναι R_1=0,2m και R_2=0,4m. Η περίοδος περιστροφής του τροχού (2) είναι T_2=0,05π s.



Α. Πόσο είναι η περίοδος περιστροφής του τροχού (1);
Β. Πόση είναι η ταχύτητα των σημείων Α και Β;
Γ. Ποιος είναι ο λόγος των κεντρομόλων επιταχύνσεων α_1/α_2 των σημείων Α και Β αντιστοίχως;
Δ. Αν ο τροχός (2) κάνει N_2=10 περιστροφές πόσες περιστροφές κάνει ο τροχός (1) στο ίδιο χρονικό διάστημα;

Λύση

Α. Επειδή όλα τα σημεία του ιμάντα πρέπει να έχουν την ίδια γραμμική ταχύτητα, άρα και τα περιφερειακά σημεία Α και Β των δύο τροχών που εφάπτονται σε αυτόν έχουν την ίδια ταχύτητα, υ. Αν οι τροχοί περιφέρονται με γωνιακές ταχύτητες ω_1 και ω_2 ισχύουν:

$$\upsilon=\omega_1 R_1=\omega_2 R_2 \rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{R_2}{R_1}\rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2}=2\rightarrow \frac{2\pi/T_1}{2\pi/T_2}=2\rightarrow \frac{T_2}{T_1}=2\rightarrow \mathbf{T_1=0{,}025\pi\ s}$$

Β. Οι ταχύτητες των Α και Β είναι: $\upsilon_A=\upsilon_B=\omega_1 R_1=\frac{2\pi}{T_1}\cdot R_1\rightarrow \mathbf{\upsilon_A=\upsilon_B=16m/s}$

Γ. Ο λόγος των κεντρομόλων επιταχύνσεων:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{\omega_1^2 R_1}{\omega_2^2 R_2}=\frac{R_2^2\cdot R_1}{R_1^2\cdot R_2}=\frac{R_2}{R_1}\rightarrow \boldsymbol{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=2}$$

Δ. Αν σε χρόνο Δt ο κάθε τροχός διαγράφει γωνίες $\Delta\theta_1$ και $\Delta\theta_2$ αντιστοίχως ισχύουν

$$\Delta\theta_1=\omega_1\Delta t \quad \text{και} \quad \Delta\theta_2=\omega_2\Delta t$$

Οι περιστροφές θα είναι $N_1=\Delta\theta_1/2\pi$ και $N_2=\Delta\theta_2/2\pi$ αντιστοίχως. Υπολογίζω το λόγο N_1/N_2:

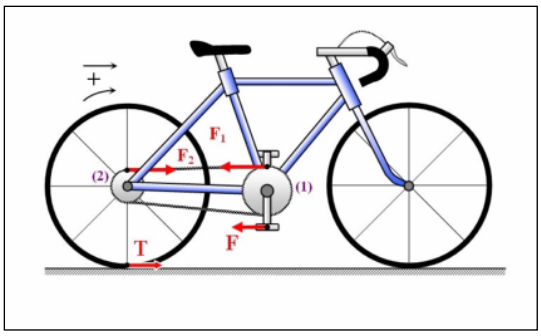
$$\frac{N_1}{N_2}=\frac{\Delta\theta_1/2\pi}{\Delta\theta_2/2\pi}=\frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta}=\frac{\omega_1\Delta t}{\omega_2\Delta t}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{T_2}{T_1}=\frac{0{,}05\pi s}{0{,}025\pi s}=2\rightarrow N_1=2N_2\rightarrow \mathbf{N_1=20\ \text{περιστροφές}}$$

(Λ) Γ.2.3 Σε ποδήλατο η αλυσίδα γυρίζει γύρω από δύο δίσκους. Ο μπροστινός δίσκος είναι ακτίνας R_1=9cm ενώ ο πίσω δίσκος ακτίνας R_2=3cm. Οι ρόδες έχουν ακτίνας R=20cm και το πεντάλ περιστρέφεται με συχνότητα f=3Hz. Να βρεθούν

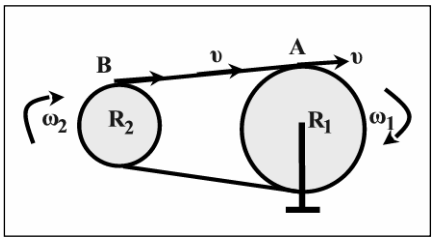
Α. Η περίοδος περιστροφής των τροχών.

Β. Η ταχύτητα του ποδηλάτου.

Γ. Αν το ποδήλατο διανύει απόσταση Δx=360π m σε χρόνο Δt, πόσες περιστροφές κάνει ο μπροστινός δίσκος στον ίδιο χρόνο;



Λύση



Α. Όπως φαίνεται και στα σχήματα ο πίσω δίσκος συνδέεται με τον πίσω τροχό που είναι και ο κινητήριος τροχός του ποδηλάτου. Συνεπώς θα περιστρέφονται με την ίδια συχνότητα f_2. Η συχνότητα περιστροφής του πεντάλ που δίνεται είναι η συχνότητα περιστροφής του μπροστινού δίσκου f_1=3Hz.

Επειδή όλα τα σημεία της αλυσίδας πρέπει να έχουν την ίδια γραμμική ταχύτητα, άρα και τα περιφερειακά σημεία Α και Β των δύο δίσκων που εφάπτονται σε αυτόν έχουν την ίδια ταχύτητα, υ. Αν οι δίσκοι περιφέρονται με γωνιακές ταχύτητες ω_1 και ω_2 ισχύουν:

$$\upsilon=\omega_1 R_1=\omega_2 R_2 \rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{R_2}{R_1} \rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{3cm}{9cm} \rightarrow \frac{2\pi f_1}{2\pi f_2}=\frac{1}{3} \rightarrow f_2=3f_1=9Hz \rightarrow \mathbf{T_2=1/9\ s}$$

Β. Άρα η πίσω ρόδα ακτίνας R=20cm περιστρέφεται με συχνότητα f_2=9Hz και η γραμμική ταχύτητα των περιφερειακών της σημείων θα είναι

$\upsilon=\omega_2 R \rightarrow \upsilon= 2\pi f_2 R_2 \rightarrow$ **υ=3,6π m/s**$\rightarrow$ υ=11,30m/s.

Όταν μια ρόδα κυλάει η ταχύτητα του κέντρου μάζας της είναι ίση με τη γραμμική ταχύτητα των περιφερειακών της σημείων συνεπώς η ταχύτητα της ρόδας και του ποδηλάτου είναι 11,30m/s.

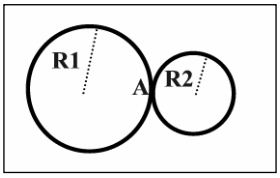
Γ. Από τον ορισμό της ταχύτητας του ποδήλατου υπολογίζω το χρόνο της μετατόπισης:

$$\upsilon=\frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \Delta t=\frac{\Delta x}{\upsilon}=\frac{360\pi\ m}{3{,}6\pi m/s} \rightarrow \Delta t=100s$$

Στο χρόνο αυτό ο μπροστινός δίσκος που περιστρέφεται με συχνότητα f_1=3Hz θα διαγράφει

$$f_1=\frac{N_1}{\Delta t} \rightarrow N_1=f_1\cdot \Delta t \rightarrow N_1=300 \text{ περιστροφές}$$

(Λ) Γ.2.4 Δύο κινητά K_1 και K_2 τρέχουν ομαλά σε δύο περιφέρειες κύκλων που έχουν ακτίνες R_1 και R_2 αντιστοίχως και εφάπτονται εξωτερικά. Το K_1 διαγράφει τον κύκλο του σε 2s και το K_2 σε 3s.



Α. Να υπολογιστεί ο λόγος των συχνοτήτων f_1/f_2.

Β. Αν ο λόγος των ακτίνων των δύο κύκλων είναι $R_1/R_2=3/2$, να υπολογιστεί ο λόγος των γραμμικών ταχυτήτων.

Γ. Κάποια στιγμή $t_0=0$ περνάνε μαζί από το σημείο, επαφής Α, των δύο κύκλων. Πόσες περιστροφές πρέπει να κάνει το καθένα ώστε να ξαναπεράσουν για $1^η$ φορά από το σημείο Α;

Δ. Σε πόσο χρόνο θα περάσουν ταυτόχρονα για $2^η$ φορά από το σημείο Α;

<u>Λύση</u>

Α. Με περιόδους $T_1=2s$ και $T_2=3s$ ο λόγος των συχνοτήτων είναι $\mathbf{\frac{f_1}{f_2}=\frac{T_2}{T_1}=\frac{3}{2}}$

Β. Ο λόγος των ταχυτήτων: $\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}=\frac{2\pi f_1R_1}{2\pi f_2R_2}=\frac{f_1R_1}{f_2R_2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\rightarrow \mathbf{\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}=\frac{9}{4}}$

Γ. Το σημείο συνάντησης είναι το σημείο επαφής των δύο τροχιών. Στο χρονικό διάστημα Δt=t μεταξύ δύο διαδοχικών συναντήσεων τα δύο κινητά θα έχουν διαγράψει ακέραιο πλήθος περιστροφών έστω N_1 το (1) και N_2 το (2)

Οι αριθμοί των περιστροφών είναι: $N_1=\frac{\Delta\theta_1}{2\pi}=\frac{\omega_1 t}{2\pi}$ και $N_2=\frac{\Delta\theta_2}{2\pi}=\frac{\omega_2 t}{2\pi}$

$\frac{N_1}{N_2}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{2\pi f_1}{2\pi f_2}=\frac{f_1}{f_2}=\frac{3}{2}\rightarrow\frac{N_1}{N_2}=\frac{3}{2}$ Άρα $\mathbf{N_1=3}$ **περ** και $\mathbf{N_2=2}$ **περ**.

Δ. Τη δεύτερη φορά που θα συναντηθούν και πάλι στο κοινό σημείο ο λόγος των περιφορών θα είναι

$\frac{N_1'}{N_2'}=\frac{6}{4}$ οπότε το κινητό K_1 θάχει κάνει $N_1'=6$ περιφορές δηλαδή θα έχει διαγράψει γωνία

$\theta_1=6\cdot 2\pi rad=12\pi\ rad\rightarrow \omega_1 t=12\pi\rightarrow 2\pi f_1 t=12\pi\rightarrow t=6/f_1\rightarrow t=6T_1\rightarrow$ **t=12s**

ΛΥΜΕΝΑ Δ ΘΕΜΑΤΑ

(Λ) Δ.2.1 Σφαίρα μάζας m=0,2kg διαγράφει κατακόρυφο κύκλο με σταθερή κατά μέτρο ταχύτητα, υ_0, δεμένη στο άκρο νήματος μήκους L που είναι εξαρτημένο από ακλόνητο σημείο Ο. Το Ο απέχει από το οριζόντιο επίπεδο (ε) απόσταση H=1,25m. Όταν η σφαίρα περνάει από το σημείο Α η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι $\alpha_\kappa=20m/s^2$. Δίνεται $g=10m/s^2$.

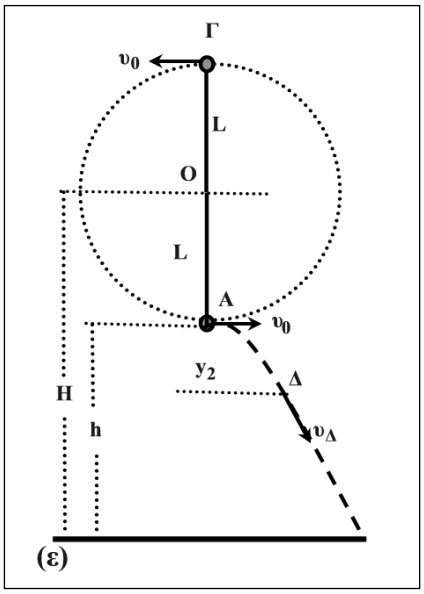
Α. Πόση είναι η τάση του νήματος όταν η σφαίρα βρίσκεται στο κατώτερο και στο ανώτερο σημείο της κυκλικής τροχιάς της;

Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ και ενώ η σφαίρα περνάει από το σημείο Α, κόβεται το νήμα. Η σφαίρα κάνει οριζόντια βολή στο κενό και χρειάζεται $t_1=0,3s$ για να φτάσει στο επίπεδο (ε).

Β. Σε πόση οριζόντια απόσταση από το Α προσγειώνεται;

Γ. Πόση δυναμική και πόση κινητική ενέργεια έχει ως προς το επίπεδο (ε), τη χρονική στιγμή $t_2=0,2s$ μετά το κόψιμο του νήματος; Πόση μηχανική ενέργεια έχει όταν φτάνει στο (ε);

Δ. Πόσες περιστροφές έκανε σε χρονικό διάστημα Δt=10s ενώ ήταν ακόμα δεμένη στο νήμα;



Λύση

Α. Στο σημείο Α: $\Sigma F_A=m\alpha_\kappa \rightarrow T_A-mg=m\alpha_\kappa \rightarrow T_A=mg+m\alpha_\kappa \rightarrow$ **T_A=6N**

Στο σημείο Γ: $\Sigma F_\Gamma=m\alpha_\kappa \rightarrow T_\Gamma+mg=m\alpha_\kappa \rightarrow T_\Gamma= m\alpha_\kappa- mg \rightarrow$ **T_Γ=2N**

Β. Η σφαίρα πέφτει στο επίπεδο (ε), από ύψος: $h= ½gt_1^2 \rightarrow h=0,45m$

Άρα το μήκος του νήματος είναι: $L=H-h=1,25m-0,45m \rightarrow L=0,8m$

$\alpha_\kappa=\frac{\upsilon_0^2}{L} \rightarrow \upsilon_0=\sqrt{\alpha_\kappa L} \rightarrow \upsilon_0=\sqrt{20m/s^2\cdot 0,8m} \rightarrow \upsilon_0=4m/s$

Άρα η οριζόντια απόσταση είναι $x=\upsilon_0 t_1 \rightarrow$ **x=1,2m**

Γ. Τη χρονική στιγμή $t_2=0,2s$ η σφαίρα φτάνει σε σημείο Δ στο οποίο έχει πέσει από το Α κατά απόσταση, y_2:

$y_2= ½gt_2^2 \rightarrow y_2=0,2m$. Άρα απέχει από το επίπεδο (ε) απόσταση $(h-y_2)=0,45m-0,2m=0,25m$. Στη θέση αυτή θα έχει δυναμική ενέργεια

$U_\Delta=mg(h-y_2) \rightarrow$ **U_Δ=0,5J**

Η ταχύτητα στο Δ θα είναι: $\upsilon_\Delta=\sqrt{\upsilon_0^2+(gt_2)^2} \rightarrow \upsilon_\Delta=5m/s$.

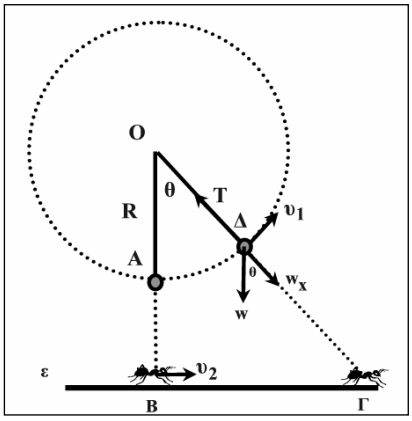
Άρα η κινητική ενέργεια είναι $K_\Delta= ½m\upsilon_\Delta^2 \rightarrow$ **K_Δ=2,5J**

Λόγω διατήρησης μηχανικής ενέργειας στη βολή, στο (ε) θα έχει: $E_\varepsilon=E_\Delta=K_\Delta+U_\Delta=3J \rightarrow$ **E_ε=3J**

Δ. Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής είναι: $\omega=\frac{\upsilon_0}{L} \rightarrow \omega=5rad/s$

Οι περιστροφές θα είναι: $N=\frac{\Delta\theta}{2\pi}=\frac{\omega\Delta t}{2\pi} \rightarrow$ **N=25/π περιστροφές**

(Λ) Δ.2.2 Σφαίρα μάζας m=0,1kg είναι δεμένη στο άκρο νήματος μήκους R=2m και ισορροπεί στο σημείο Α. Κάτω από το Α και σε απόσταση ΑΒ=0,5m περιμένει ένα μυρμήγκι. Σφαίρα και μυρμήγκι ξεκινάνε μαζί τη χρονική στιγμή t_0=0 και τη χρονική στιγμή t_1=25s βρίσκονται το μεν μυρμήγκι στο σημείο Γ η δε σφαίρα στο σημείο Δ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η σφαίρα κάνει ομαλή κυκλική κίνηση και τη χρονική στιγμή t_1 περνάει για $2^η$ φορά από το Δ ενώ ξεκίνησε από το Α κινούμενη προς τα δεξιά. Το μυρμήγκι κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με $υ_2$=0,1m/s.



Α Πόση είναι η γωνία θ που σχηματίζει το νήμα με την κατακόρυφο, που περνάει από το Ο, τη χρονική στιγμή t_1.

Β. Πόση είναι η συχνότητα περιστροφής της σφαίρα και πόση η κεντρομόλος επιτάχυνση αυτής;

Γ. Πόση είναι η τάση του νήματος όταν η σφαίρα περνάει από το σημείο Δ;

Δ. Πόση είναι η μηχανική ενέργεια της σφαίρας κάποια στιγμή που περνάει κινούμενη από το σημείο Α. Να υπολογιστεί σε σχέση με το οριζόντιο επίπεδο ε.

Διατηρείται η μηχανική ενέργεια της σφαίρας;

Δίνονται g=10m/s^2, $π^2$=10 και $\sqrt{2}$=1,4

Λύση

Α. Το μυρμήγκι διανύει την απόσταση: (ΒΓ)=$Δx_2$=$υ_2t_1$=2,5m.

(ΟΒ) = R+(ΑΒ)→ (ΟΒ)=2,5m

Από το τρίγωνο (ΟΒΓ) → $εφθ=\frac{ΒΓ}{ΟΒ}$ → εφθ=1→ **θ=45^0 ή θ=π/4rad**

Β. Επειδή σε χρόνο t=25s περνάει για $2^η$ φορά από το Δ έχει διαγράψει γωνία φ=2π+π/4 φ=9π/4 rad

$ω_1=\frac{Δφ}{Δt}=\frac{9π/4rad}{25s}$ → $ω_1$=0,09π rad/s. Άρα η συχνότητα είναι $f_1=\frac{ω_1}{2π}$ → **f=0,045Hz**

Η κεντρομόλος επιτάχυνση: $α_1=ω_1^2R$→ **$α_1$=0,162m/s^2**

Γ. Στη διεύθυνση του νήματος, η σφαίρα δέχεται το βάρος w και την τάση Τ του. Η συνισταμένη τους ισούται με την κεντρομόλο. Στο σημείο Δ αναλύω το βάρος, w, πάνω στη διεύθυνση της ακτίνας R=ΟΔ, οπότε

$ΣF_R=mα_κ$→ T – w_x= $mα_κ$→ T=mgσυνθ+ $mα_κ$ =0,7N + 0,0162N→ **T=0,7162N**

Δ. Η ταχύτητα περιστροφής είναι $υ_1=ω_1R$→ $υ_1$=0,18π m/s

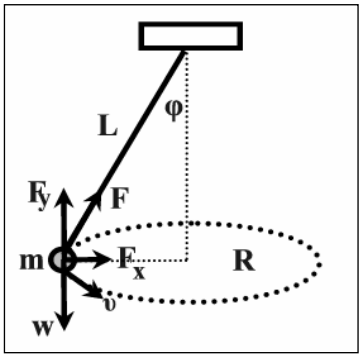
Στο σημείο Α η κινητική ενέργεια είναι: K= ½ $mυ_1^2$→ K=0,0162J

Η δυναμική ενέργεια στο Α ως προς το (ε): U=mg(ΑΒ)→U=0,5J

Η μηχανική ενέργεια στο Α: E=K+U→ **E_A=0, 5162J**

*Στο σημείο Δ έχει την ίδια κινητική (ομαλή κυκλική κίνηση) αλλά μεγαλύτερη δυναμική (πιο ψηλά). Συνεπώς η μηχανική ενέργεια δεν διατηρείται διότι κάποια άγνωστη δύναμη φροντίζει να διατηρεί σταθερό το μέτρο της ταχύτητας. Αλλιώς πως θα έκανε ομαλή κυκλική κίνηση;

(Λ) Δ.2.3 Σφαίρα μάζας m=0,2kg δένεται από το άκρο νήματος μήκους L=2,4m το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε σταθερό σημείο, το σώμα διαγράφει στο κενό οριζόντιο κύκλο με σταθερή ταχύτητα έτσι ώστε το νήμα να σχηματίζει γωνία $\varphi = 60^0$ με την κατακόρυφο που περνάει από το σημείο εξαρτήσεως. Να υπολογιστούν:



Α. Η γραμμική ταχύτητα περιστροφής του σφαίρας.
Β. Η τάση του νήματος F.
Γ. Κάποια στιγμή το νήμα σπάει και η σφαίρα αμέσως μετά ολισθαίνει πάνω σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς να αναπηδήσει, μέχρι να σταματήσει λόγω τριβών με αυτό. Αν ο συντελεστής τριβής της σφαίρας με το επίπεδο είναι μ=0,6 πόσο διάστημα διανύει μέχρι να σταματήσει;
Δ. Πόση είναι η θερμότητα που εκλύεται λόγω τριβών;
Δίνεται $g=10m/s^2$.

Λύση

Α. Η τάση του νήματος F αναλύεται σε δύο συνιστώσες $F_x=F\eta\mu\varphi$ και $F_y=F\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi$

Στον άξονα y η σφαίρα ισορροπεί: $\Sigma F_y=0 \rightarrow F_y-mg=0 \rightarrow F\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi=mg$ (1)

Η συνιστώσα F_x παίζει το ρόλο της κεντρομόλου αφού είναι η μοναδική δύναμη με κατεύθυνση προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς, ακτίνας $R=L\eta\mu\varphi$.

$$\Sigma F_x=m\alpha_\kappa \rightarrow F\eta\mu\varphi=\frac{m\upsilon^2}{R} \rightarrow F\eta\mu\varphi=\frac{m\upsilon^2}{L\eta\mu\varphi} \qquad (2)$$

$$\text{Από (2):(1)} \rightarrow \varepsilon\varphi\varphi=\frac{\upsilon^2}{Lg\eta\mu\varphi} \rightarrow \upsilon=\sqrt{\frac{Lg\eta\mu^2\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi}} \rightarrow \mathbf{\upsilon=6m/s}$$

Β. Από (1)$\rightarrow F=\dfrac{mg}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \rightarrow$ **F=4N**

Γ. Μόλις σπάει το νήμα η σφαίρα κάνει ευθύγραμμη κίνηση κατ΄ εφαπτομένη της κυκλικής τροχιάς της με αρχική ταχύτητα υ=6m/s. Αμέσως μπαίνει σε οριζόντιο επίπεδο όπου ολισθαίνει υπό την επίδραση της τριβής $T=\mu N=\mu mg$ και σταματάει αφού διανύσει απόσταση Δx. Υπολογίζουμε τη μετατόπιση με τη χρήση του ΘΜΚΕ:

$$\Sigma W=K_\tau-K_\alpha \rightarrow W_T=K_\tau-K_\alpha \rightarrow -\mu mg\Delta x=-\tfrac{1}{2}m\upsilon^2 \rightarrow \Delta x=\frac{\upsilon^2}{2\mu g} \rightarrow \mathbf{\Delta x=3m}$$

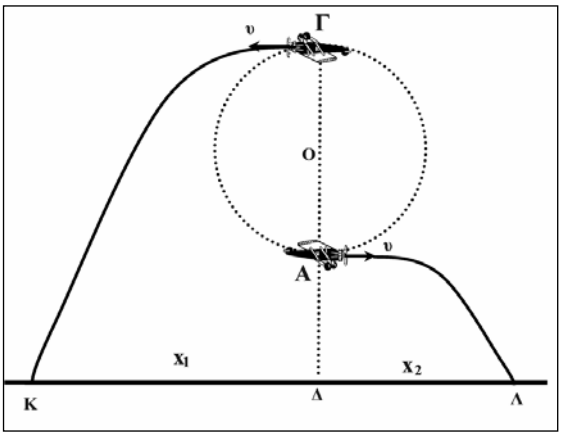
Δ. Η θερμότητα λόγω τριβών είναι ίση με την απόλυτη τιμή του έργου της τριβής. Άρα:

$Q_T=|W_T|=T\cdot\Delta x=\mu mg\cdot\Delta x \rightarrow$ $\mathbf{Q_T=3,6J}$

(Λ) Δ.2.4 Αεροπλάνο διαγράφει κατακόρυφη κυκλική τροχιά ακτίνας ΟΑ=R=800m (ανακύκλωση) με ταχύτητα σταθερού μέτρου υ=720km/h.

Α. Πόση είναι η δύναμη που δέχεται ο πιλότος από το κάθισμα τη στιγμή που το αεροπλάνο βρίσκεται στο κατώτερο, (Α) και στο ανώτερο, (Γ), σημείο της τροχιάς του.

Ο πιλότος αφήνει από ένα όμοιο δέμα όταν περνάει από το σημείο Α και το σημείο Γ. Αν ο χρόνος που απαιτείται για να πέσει το δέμα (1) από το σημείο Γ στο έδαφος είναι t_1=20s. Να υπολογιστούν:



Β. Το ύψος ΑΔ από το έδαφος.

Γ. Η απόσταση ΚΛ μεταξύ των σημείων Κ και Λ που πέφτουν τα δέματα στο έδαφος.

Δ. Ο λόγος των κινητικών ενεργειών των δύο δεμάτων όταν προσγειώνονται

Δίνεται η μάζα του πιλότου m=70kg και το g=10m/s^2. Τα δέματα δεν δέχονται τριβές από τον αέρα.

Λύση

Α. Ο πιλότος κάνει ομαλή κυκλική κίνηση δεχόμενος το βάρους του mg και τη δύναμη F από το κάθισμα, στο οποίο είναι δεμένος με ζώνη ασφαλείας.

Στη θέση Α: $\Sigma F_y = m\alpha_\kappa \rightarrow F_A - mg = \frac{m\upsilon^2}{R} \rightarrow F_A = mg + \frac{m\upsilon^2}{R} \rightarrow \mathbf{F_A = 4200N}$

Αν αναλογιστούμε ότι το βάρος του είναι μόνο 700N, είναι φανερό ότι η πρόσθετη δύναμη που δέχεται από το κάθισμα είναι 5πλάσια του βάρους του. Αυτό απαιτεί πολύ μεγάλη αντοχή.

Στη θέση Γ: $\Sigma F_y = m\alpha_\kappa \rightarrow F_\Gamma + mg = \frac{m\upsilon^2}{R} \rightarrow F_\Gamma = \frac{m\upsilon^2}{R} - mg \rightarrow \mathbf{F_\Gamma = 2800N}$

Β. Το δέμα που φεύγει από το σημείο Γ έχει ταχύτητα υ=720km/h=200m/s, δηλαδή την ταχύτητα του αεροπλάνου. Προφανώς κάνει οριζόντια βολή από ύψος h_1=(ΑΔ)+2R όπου $h_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 \rightarrow h_1$=2000m. Άρα (ΑΔ)= h_1−2R→ **(ΑΔ)=400m**

Γ. Το δεύτερο δέμα αφήνεται από ύψος h_1=(ΑΔ)=400m και χρειάζεται χρόνο t_2 για να πέσει στο έδαφος:

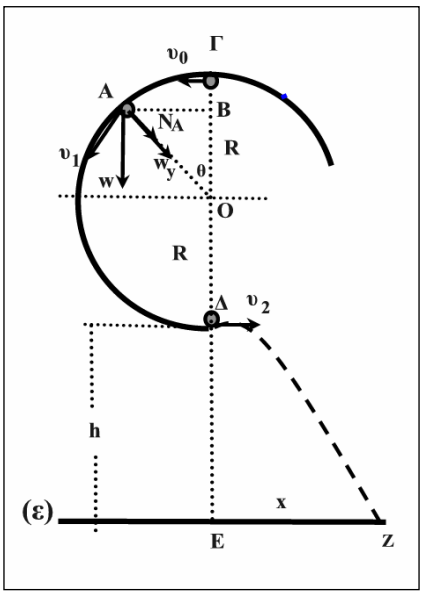
$h_2 = \frac{1}{2}gt_2^2 \rightarrow t_2 = \sqrt{2h_2/g} \rightarrow t_2 = \sqrt{80}$m/s=8,95s

Τα δέματα κινούνται ευθύγραμμα και ομαλά στον οριζόντιο άξονα
$x_1 = \upsilon t_1$ και $x_2 = \upsilon t_2$. ‘Αρα
$K\Lambda = x_1 + x_2 = \upsilon(t_1 + t_2)$=200m/s·28,95s→ **(ΚΛ)= 5790m**

Δ. Τα δέματα προσγειώνονται με ταχύτητες που έχουν μέτρα $\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon^2 + (gt_1)^2}$ και $\upsilon_2 = \sqrt{\upsilon^2 + (gt_2)^2}$

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\upsilon_1^2}{\upsilon_2^2} = \frac{\upsilon^2 + (gt_1)^2}{\upsilon^2 + (gt_2)^2} = \frac{2 \cdot 200^2}{200^2 + 8000} = \frac{80000}{48000} = \frac{80}{48} \rightarrow \mathbf{\frac{K_1}{K_2} = \frac{5}{3}}$$

Δ.2.5 Κατακόρυφη ημικυλινδρική στεφάνη (λούκι) έχει ακτίνα R=1,6m και το κατώτερο σημείο της απέχει από οριζόντιο επίπεδο (ε) κατακόρυφη απόσταση h=0,8m. Από το ανώτερο σημείο Γ της στεφάνης βάλουμε οριζόντια σφαίρα μάζας m=0,2kg με αρχική ταχύτητα υ_0 με στόχο να διατρέξει χωρίς τριβές το εσωτερικό λούκι της στεφάνης.



Α. Για ποιες τιμές της ταχύτητα υ_0 είναι δυνατό να γίνει αυτό;

Η σφαίρα διαγράφει το τόξο ΓΔ που φαίνεται στο σχήμα και μετά κάνει οριζόντια βολή και προσγειώνεται στο σημείο Ζ του επιπέδου (ε) που απέχει από το Ε απόσταση $x=3,2\sqrt{2}$m.

Β. Πόση είναι η κεντρομόλος δύναμη που δέχεται στο σημείο Δ πριν εγκαταλείψει τη στεφάνη;

Γ. Πόση είναι η αρχική ταχύτητα υ_0.;

Δ. Πόση είναι η δύναμη που δέχεται από τη στεφάνη στη θέση εκείνη Α στην οποία θα έχει κατέβει κατακόρυφη απόσταση ΓΒ=0,4m

Δίνεται $g=10m/s^2$

Λύση

Α. Στο σημείο Γ και ενώ αρχίζει να διαγράφει κυκλική τροχιά, η σφαίρα δέχεται δύο κατακόρυφες δυνάμεις το βάρος w και τη δύναμη N_Γ από τη στεφάνη. Η συνισταμένη τους ισούται με την κεντρομόλο δύναμη:

$$N_\Gamma+mg=\frac{m\upsilon_0^2}{R} \rightarrow N_\Gamma=\frac{m\upsilon_0^2}{R}-mg. \qquad (1)$$

Για να κάνει κυκλική κίνηση πρέπει να έχει επαφή με τη στεφάνη συνεπώς πρέπει η δύναμη να είναι,

$$N_\Gamma\geq 0 \rightarrow \frac{m\upsilon_0^2}{R}-mg\geq 0 \rightarrow \upsilon_0\geq\sqrt{Rg} \rightarrow \mathbf{\upsilon_0\geq 4m/s.}$$

Β. Πάμε πρώτα στη βολή για να βρούμε την ταχύτητα υ_2 με την οποία φτάνει η σφαίρα στο σημείο Δ και αρχίζει τη βολή της από ύψος h.

$h=\frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t=0,4s$

$x=\upsilon_2 t \rightarrow \upsilon_2=\frac{x}{t} \rightarrow \upsilon_2=8\sqrt{2}m/s$

Άρα η κεντρομόλος δύναμη στο Δ είναι $\Sigma F_\Delta=\frac{m\upsilon_\Delta^2}{R}=\mathbf{16N}$

Γ. Γράφουμε ΑΔΜΕ από το Γ έως το Δ με στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας βαρύτητας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το Δ.

$$mg2R+\frac{1}{2}m\upsilon_0^2=\frac{1}{2}m\upsilon_\Delta^2 \rightarrow \upsilon_0=\sqrt{\upsilon_\Delta^2-4gR} \rightarrow \upsilon_0=8m/s$$

Δ. Στο σημείο Α η ταχύτητα είναι υ_A. Υπολογίζεται από την ΑΔΜΕ από το Γ στο Α με στάθμη U=0 το οριζόντιο επίπεδο που περνάει από το Α:

$$mg(\Gamma B)+\frac{1}{2}m\upsilon_0^2=\frac{1}{2}m\upsilon_A^2 \rightarrow \upsilon_A=\sqrt{2g(\Gamma B)+\upsilon_0^2} \rightarrow \upsilon_A=\sqrt{72}m/s$$

$$\text{συν}\theta=\frac{OB}{R}=\frac{R-(\Gamma B)}{R}=\frac{1,2}{1,6}\rightarrow \text{συν}\theta=3/4$$

Η κεντρομόλος στο σημείο Α είναι:

$$\Sigma F_A=N_A+mg\text{συν}\theta=m\frac{\upsilon_A^2}{R}\rightarrow N_A=m\frac{\upsilon_A^2}{R}-mg\text{συν}\theta\rightarrow \mathbf{N_A=7,5N}$$