

Λυμένα παραδείγματα Κινήσεων

Παράδειγμα 1

Ένα αρχικά ακίνητο σώμα ξεκινά να επιταχύνει σταθερά και μετά από 3 δευτερόλεπτα έχει αναπτύξει ταχύτητα **12m/s**.

1. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σώματος.
2. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος μετά από 10 δευτερόλεπτα.
3. Να υπολογίσετε το διάστημα που διένυσε το σώμα στο 10^ο δευτερόλεπτο της κίνησής του.
4. Να γίνουν τα διαγράμματα επιτάχυνσης – χρόνου, ταχύτητας – χρόνου και μετατόπισης χρόνου για τα 10 πρώτα δευτερόλεπτα της κίνησης του σώματος.

Λύση

1. Από την εκφώνηση της άσκησης βλέπουμε ότι η αρχική ταχύτητα του σώματος θα είναι μηδέν, δηλαδή:

$$v_0 = 0$$

Η επιτάχυνση του σώματος μπορεί να υπολογιστεί από τον ορισμό της. Δηλαδή:

$$\alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{12 - 0}{3 - 0} = \frac{12}{3} \Rightarrow \boxed{\alpha = 4m/s}$$

Οι εξισώσεις, λοιπόν, που θα περιγράψουν την κίνηση του σώματος θα είναι:

$$v = v_0 + \alpha \cdot t$$

$$\begin{matrix} v_0=0 \\ \Rightarrow \\ \alpha=4 \end{matrix}$$

$$\boxed{v = 4 \cdot t}$$

$$\Delta x = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$$

$$\begin{matrix} v_0=0 \\ \Rightarrow \\ \alpha=4 \end{matrix}$$

$$\boxed{\Delta x = 2 \cdot t^2}$$

2. Η ταχύτητα του σώματος μετά από 10 δευτερόλεπτα θα είναι:

$$v = 4 \cdot t = 4 \cdot 10 \Rightarrow \boxed{v = 40m/s}$$

3. Το 10^ο δευτερόλεπτο της κίνησης του σώματος είναι μεταξύ 9 και 10 s. Το διάστημα που θα διανύσει το σώμα κατά τότε θα είναι η διαφορά της μετατόπισής του στα 10s μείον την μετατόπιση στα 9s. Άρα:

$$\Delta x_9 = 2 \cdot t^2 = 2 \cdot 9^2 = 2 \cdot 81 = 162m$$

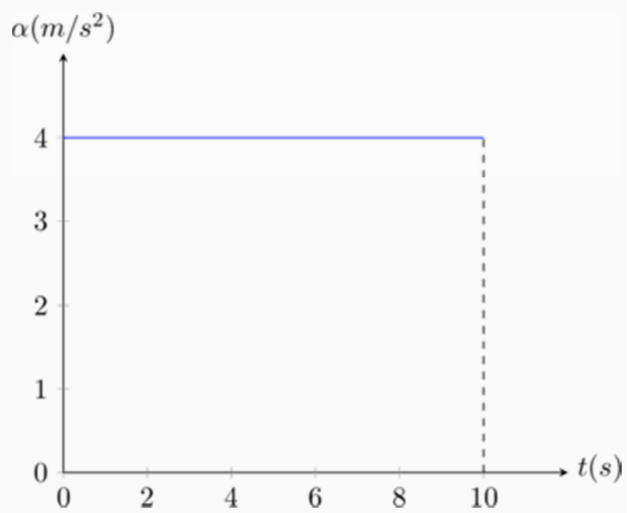
$$\Delta x_{10} = 2 \cdot t^2 = 2 \cdot 10^2 = 2 \cdot 100 = 200m$$

Άρα:

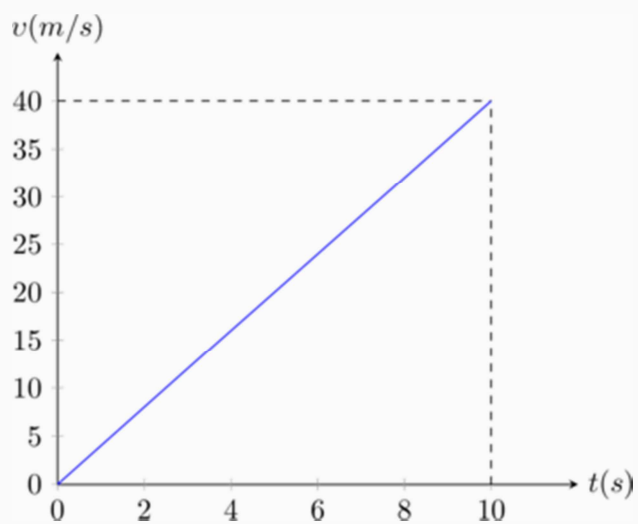
$$\Delta x_{(9-10)} = \Delta x_{10} - \Delta x_9 = 200 - 162 \Rightarrow \boxed{\Delta x_{(9-10)} = 38m}$$

4.

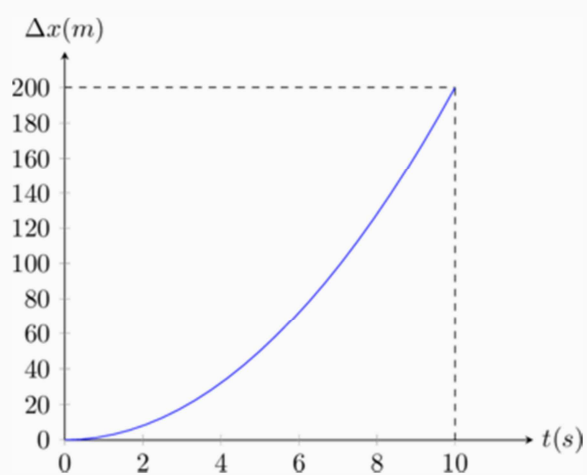
Διάγραμμα επιτάχυνσης – χρόνου



Διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου



Διάγραμμα μετατόπισης – χρόνου



Παράδειγμα 2

Η θέση ενός σώματος που κινείται ευθύγραμμα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$x = 80 \cdot t - 2 \cdot t^2$$

1. Να βρεθεί η επιτάχυνση και η αρχική ταχύτητα του σώματος και να γραφεί η εξίσωση της ταχύτητας.
2. Να υπολογίσετε ποια χρονική στιγμή θα σταματήσει στιγμιαία το σώμα.
3. Να υπολογίσετε το διάστημα που θα διανύσει το σώμα μέχρι να σταματήσει.
4. Να γίνουν τα διαγράμματα επιτάχυνσης – χρόνου, ταχύτητας – χρόνου και θέσης χρόνου μέχρι να σταματήσει το σώμα.

Λύση

1. Παρατηρούμε ότι η σχέση που μας δίνεται για τη θέση του σώματος είναι της μορφής

$$x = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$$

Άρα το σώμα κάνει ευθύγραμμα ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Συγκρίνοντας τη σχέση που μας δίνεται με την σχέση της θέσης για την επιβραδυνόμενη κίνηση βγάζουμε ότι:

$$v_0 = 80 \text{ m/s}$$

και

$$\frac{1}{2} \cdot \alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 4 \text{ m/s}^2$$

Συνεπώς η εξίσωση που θα δίνει την ταχύτητα του σώματος θα είναι:

$$v = v_0 - \alpha \cdot t \Rightarrow v = 80 - 4 \cdot t$$

2. Όταν το σώμα σταματήσει, η ταχύτητά του θα είναι μηδέν. Άρα:

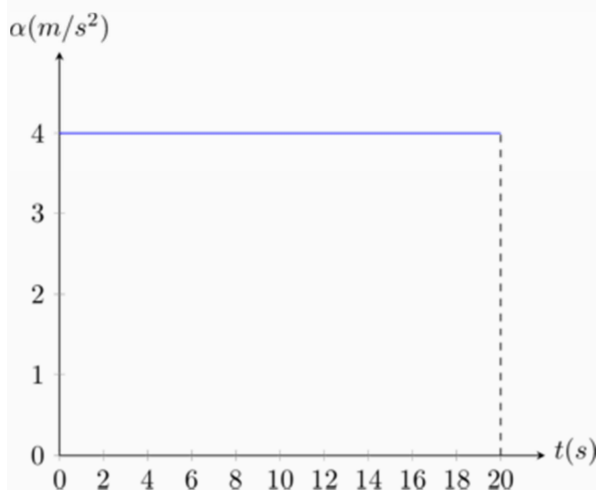
$$0 = 80 - 4 \cdot t \Leftrightarrow 4 \cdot t = 80 \Rightarrow \frac{4 \cdot t}{4} = \frac{80}{4} \Rightarrow t = 20 \text{ s}$$

3. Το διάστημα που θα διανύσει το σώμα μέχρι να σταματήσει ($t=20\text{s}$) θα είναι το ίδιο με την θέση του εκείνη την στιγμή (καθώς η αρχική του θέση είναι μηδέν). Άρα:

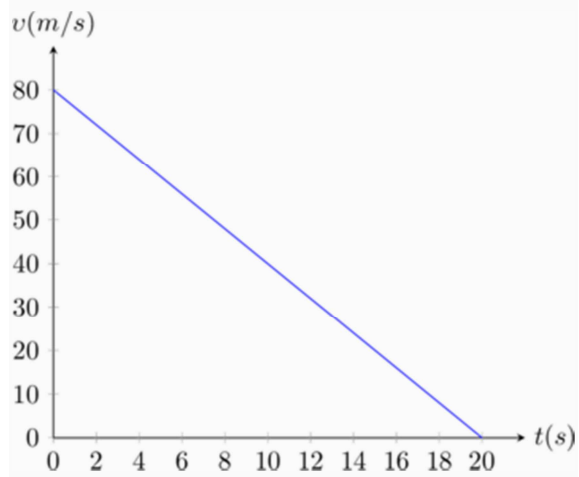
$$s = x = 80 \cdot t - 2 \cdot t^2 = 80 \cdot 20 - 2 \cdot 20^2 = 1600 - 800 \Rightarrow s = 800 \text{ m}$$

4.

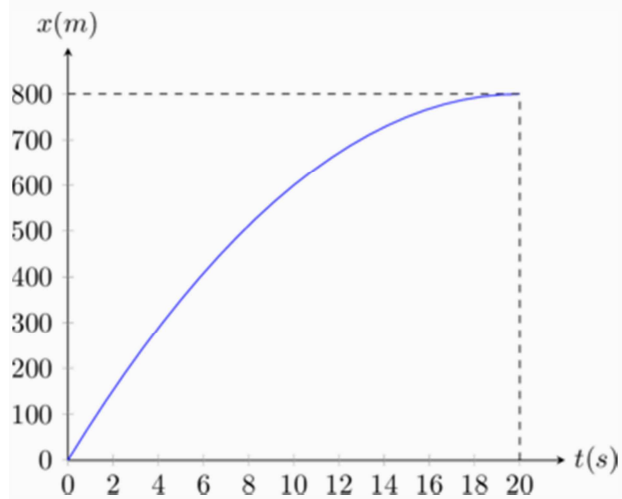
Διάγραμμα επιτάχυνσης – χρόνου



Διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου

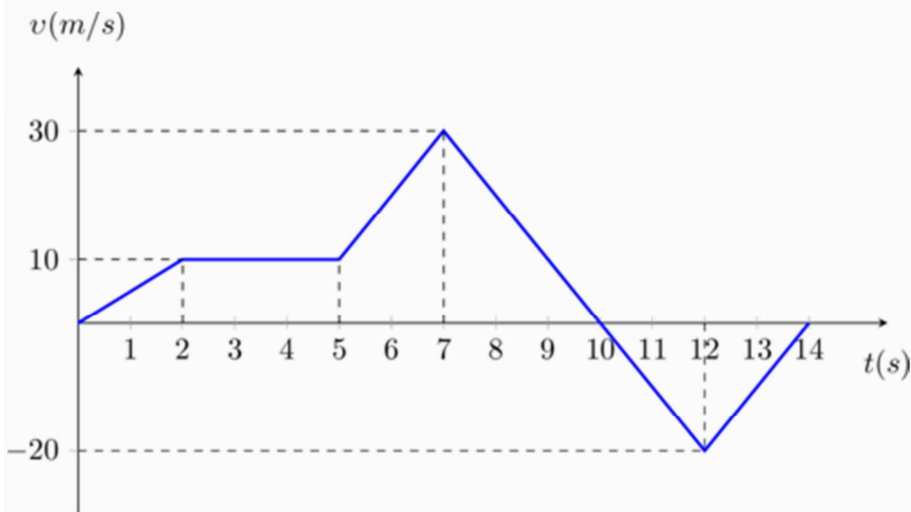


Διάγραμμα θέσης – χρόνου



Παράδειγμα 3

Ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα και η ταχύτητά του δίνεται από το παρακάτω διάγραμμα.



1. Να προσδιορίσετε το είδος των κινήσεων του σώματος.
2. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση και την μετατόπιση του σώματος σε κάθε κίνηση.
3. Να υπολογίσετε την συνολική του μετατόπιση καθώς και το διάστημα το οποίο διένυσε.
4. Να υπολογίσετε την μέση ταχύτητα του σώματος.
5. Να γίνουν τα διαγράμματα επιτάχυνσης – χρόνου, διαστήματος – χρόνου και θέσης – χρόνου.

Λύση

1. και 2. Για κάθε κίνηση μπορούμε να υπολογίσουμε την επιτάχυνση από την κλίση της ευθείας ενώ την μετατόπιση από το εμβαδόν του διαγράμματος με τον άξονα των χρόνων.

(0s – 2s): Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση

$$\alpha_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_0}{t_2 - t_0} = \frac{10 - 0}{2 - 0} = \frac{10}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 5 \text{ m/s}^2}$$

$$\Delta x_1 = E_{\tau\rho\iota\gamma.} = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot v = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10 \Rightarrow \boxed{\Delta x_1 = 10 \text{ m}}$$

(2s – 5s): Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση

$$\alpha_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_5 - v_2}{t_5 - t_2} = \frac{10 - 10}{5 - 2} = \frac{0}{3} \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = 0 \text{ m/s}^2}$$

$$\Delta x_2 = E_{\pi\alpha\rho.} = \beta \cdot v = (5 - 2) \cdot 10 = 3 \cdot 10 \Rightarrow \boxed{\Delta x_2 = 30 \text{ m}}$$

(5s – 7s): Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση

$$\alpha_3 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_7 - v_5}{t_7 - t_5} = \frac{30 - 10}{7 - 5} = \frac{20}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha_3 = 10 \text{ m/s}^2}$$

$$\Delta x_3 = E_{\tau\rho\alpha\pi.} = \frac{(B + \beta) \cdot v}{2} = \frac{(30 + 10) \cdot (7 - 5)}{2} = \frac{40 \cdot 2}{2} \Rightarrow \boxed{\Delta x_3 = 40m}$$

(7s – 10s): Ευθύγραμμη Ομαλά Επιβραδυνόμενη Κίνηση (μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά του)

$$\alpha_4 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{10} - v_7}{t_{10} - t_7} = \frac{0 - 30}{10 - 7 - 0} = \frac{-30}{3} \Rightarrow \boxed{\alpha_4 = -10m/s^2}$$

$$\Delta x_4 = E_{\tau\rho\iota\gamma.} = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot v = \frac{1}{2} \cdot (10 - 7) \cdot 30 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 30 \Rightarrow \boxed{\Delta x_4 = 45m}$$

(10s – 12s): Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση (με αρνητική φορά)

Από τη στιγμή που η ταχύτητα του σώματος έχει μηδενιστεί, δεν γίνεται να επιβραδύνει άλλο. Άρα επιταχύνεται προς την αρνητική φορά.

$$\alpha_5 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{12} - v_{10}}{t_{12} - t_{10}} = \frac{-20 - 0}{12 - 10} = \frac{-20}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha_5 = -10m/s^2}$$

$$\Delta x_5 = E_{\tau\rho\iota\gamma.} = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot v = \frac{1}{2} \cdot (12 - 10) \cdot (-20) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-20) \Rightarrow \boxed{\Delta x_5 = -20m}$$

(12s – 14s): Ευθύγραμμη Ομαλά Επιβραδυνόμενη Κίνηση (με αρνητική φορά)

$$\alpha_6 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{14} - v_{12}}{t_{14} - t_{12}} = \frac{0 - (-20)}{14 - 12} = \frac{20}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha_6 = 10m/s^2}$$

$$\Delta x_6 = E_{\tau\rho\iota\gamma.} = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot v = \frac{1}{2} \cdot (14 - 12) \cdot (-20) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-20) \Rightarrow \boxed{\Delta x_6 = -20m}$$

3. Η συνολική μετατόπιση του σώματος θα ισούται με το άθροισμα των επιμέρους μετατοπίσεων. δηλαδή:

$$\Delta x_{ολ.} = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 + \Delta x_5 + \Delta x_6 \Rightarrow$$

$$\Delta x_{ολ.} = 10 + 30 + 40 + 45 + (-20) + (-20) \Rightarrow \boxed{\Delta x_{ολ.} = 85m}$$

Το συνολικό διάστημα που θα διένυσε το σώμα θα ισούται με το άθροισμα των απολύτων τιμών των επιμέρους μετατοπίσεων. δηλαδή:

$$s = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| + |\Delta x_4| + |\Delta x_5| + |\Delta x_6| \Rightarrow$$

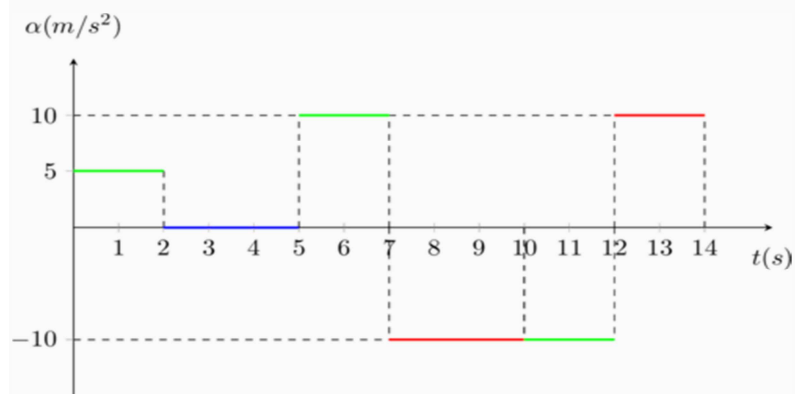
$$s = 10 + 30 + 40 + 45 + 20 + 20 \Rightarrow \boxed{s = 165m}$$

4. Η μέση ταχύτητα του σώματος θα είναι:

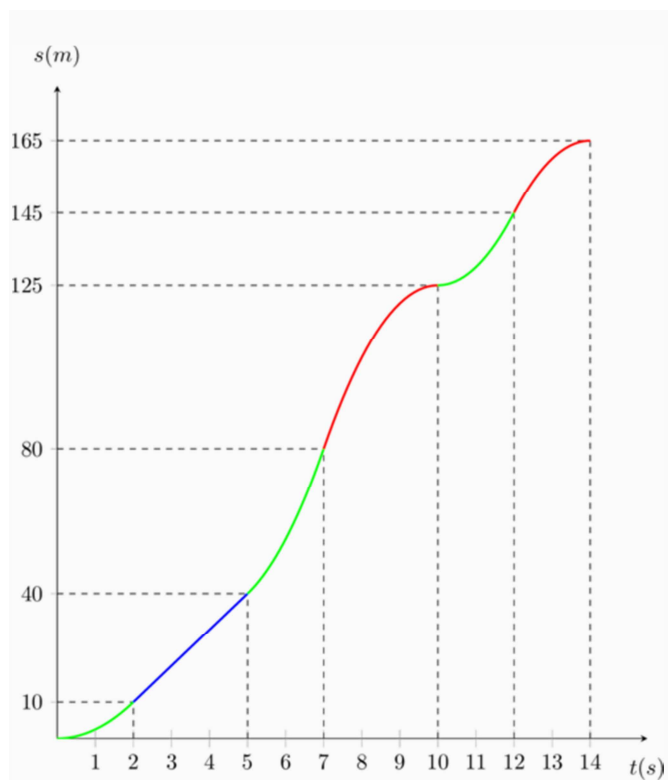
7 Νοεμβρίου 2020

$$v_{\mu} = \frac{s}{t} = \frac{165}{14} \Rightarrow \boxed{v_{\mu} \simeq 11.79 \text{ m/s}}$$

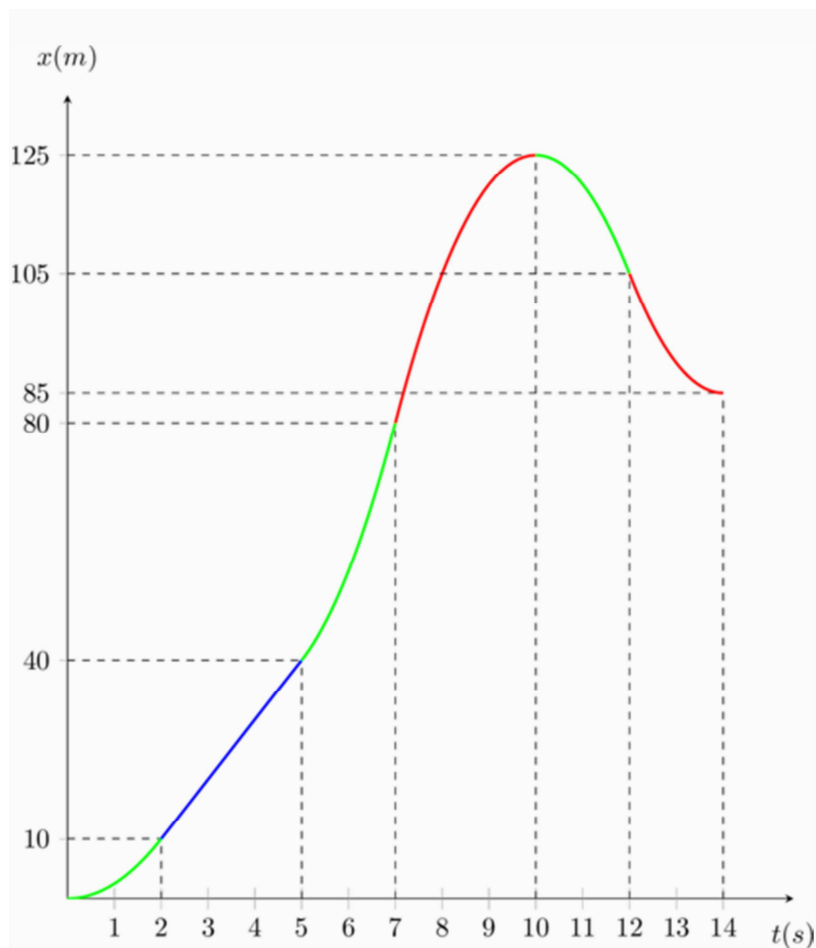
5. Το διάγραμμα **επιτάχυνσης – χρόνου** θα είναι:



Το διάγραμμα **διαστήματος – χρόνου** θα είναι:



Το διάγραμμα **θέσης – χρόνου** θα είναι:



Παρατηρούμε ότι τα δύο διαγράμματα διαφέρουν μετά τα **10s** γιατί το σώμα κινείται προς τα πίσω οπότε η θέση του μειώνεται ενώ το διάστημα συνεχίζει να αυξάνει.

Παράδειγμα 4

Ένα αυτοκίνητο και μία μηχανή κινούνται σε ευθύγραμμο δρόμο. Τη χρονική στιγμή μηδέν, η μηχανή βρίσκεται σε απόσταση **$d=200m$** πίσω από το αυτοκίνητο και κινείται με ταχύτητα **$50m/s$** , πατάει φρένο κι αρχίζει να επιβραδύνει με επιβράδυνση **$a_{\mu}= 2m/s^2$** . Το αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα **$20m/s$** .

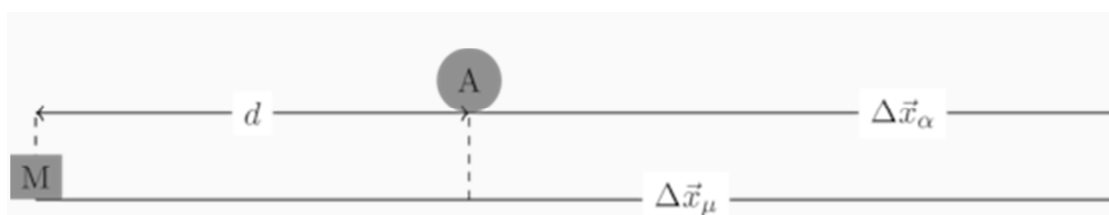
1. Ποια χρονική στιγμή τα δύο οχήματα έχουν την ίδια ταχύτητα;
2. Ναδειχθεί ότι τα οχήματα θα συναντηθούν δύο φορές.
3. Ποια θα είναι η ταχύτητα της μηχανής όταν συναντήσει το αυτοκίνητο;
4. Ποια η μετατόπιση των δύο οχημάτων όταν συναντιούνται;
5. Να γίνουν τα διαγράμματα ταχύτητας – χρόνου, μετατόπισης – χρόνου και θέσης – χρόνου για τα δύο οχήματα σε κοινό σύστημα αξόνων.

Λύση

Γράφουμε τις σχέσεις που περιγράφουν την κίνηση των σωμάτων:

	Αυτοκίνητο	Μηχανή
Είδος κίνησης	Ε.Ο.Κ.	Ε.Ο.Επιβ.Κ.
Ταχύτητα	$v_{\alpha} = 20 \text{ m/s}$	$v_{\mu} = 50 - 2 \cdot t$
Μετατόπιση	$\Delta x_{\alpha} = 20 \cdot t$	$\Delta x_{\mu} = 50 \cdot t - t^2$

Στη συνέχεια κάνουμε σχήμα με τα σώματα στην αρχική και τελική τους θέση και σημειώνουμε τις μετατοπίσεις τους και τις αποστάσεις που δίνονται και ζητούνται.



1. Όταν τα σώματα έχουν την ίδια ταχύτητα ισχύει:

$$v_{\alpha} = v_{\mu} \Rightarrow$$

$$20 = 50 - 2 \cdot t \Leftrightarrow 2t = 50 - 20 \Rightarrow$$

$$2 \cdot t = 30 \Rightarrow \frac{2 \cdot t}{2} = \frac{30}{2} \Rightarrow \boxed{t = 15 \text{ s}}$$

2. Όταν τα σώματα συναντιούνται ισχύει (από το σχήμα):

$$\Delta x_{\mu} = d + \Delta x_{\alpha} \Rightarrow$$

$$50 \cdot t - t^2 = 200 + 20 \cdot t \Leftrightarrow t^2 + 20 \cdot t - 50 \cdot t + 200 = 0 \Rightarrow$$

$$t^2 - 30 \cdot t + 200 = 0$$

Λύνουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση:

$$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma = (-30)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 200 = 900 - 800 = 100 > 0$$

Άρα έχουμε δύο λύσεις:

$$t_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \alpha} = \frac{-(-30) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{30 \pm 10}{2} = \begin{cases} t_1 = \frac{20}{2} \Rightarrow \boxed{t_1 = 10 \text{ s}} \\ t_2 = \frac{40}{2} \Rightarrow \boxed{t_2 = 20 \text{ s}} \end{cases}$$

Επειδή και οι δύο λύσεις είναι θετικές τις δεχόμαστε, άρα τα οχήματα θα συναντηθούν δύο φορές μία τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$ και ξανά μετά τη χρονική στιγμή $t_2 = 20 \text{ s}$.

3. Η ταχύτητα της μηχανής όταν συναντήσει το αυτοκίνητο θα είναι:

$$\underline{t_1 = 10s : v_{\mu_1} = 50 - 2 \cdot t = 50 - 2 \cdot 10 = 50 - 20 \Rightarrow v_{\mu_1} = 30m/s}$$

$$\underline{t_2 = 20s : v_{\mu_2} = 50 - 2 \cdot t = 50 - 2 \cdot 20 = 50 - 40 \Rightarrow v_{\mu_2} = 10m/s}$$

4.

Οι μετατοπίσεις των οχημάτων όταν συναντιούνται θα είναι:

$$\underline{t_1 = 10s :}$$

$$\Delta x_{\alpha_1} = 20 \cdot t = 20 \cdot 10 \Rightarrow \Delta x_{\alpha_1} = 200m$$

$$\Delta x_{\mu_1} = 50 \cdot t - t^2 = 50 \cdot 10 - 10^2 = 500 - 100 \Rightarrow \Delta x_{\mu_1} = 400m$$

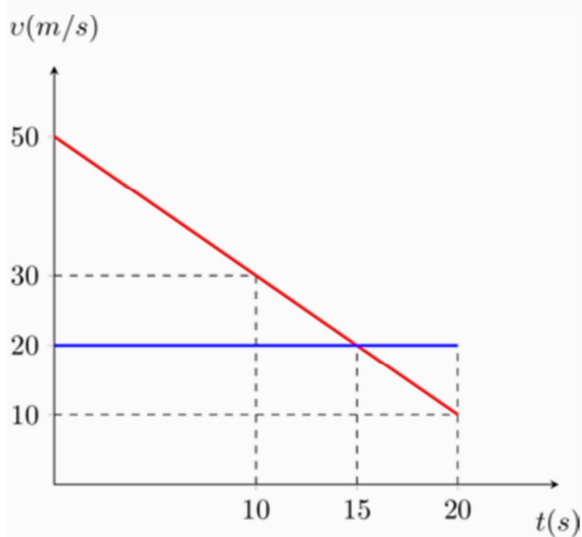
$$\underline{t_2 = 20s :}$$

$$\Delta x_{\alpha_2} = 20 \cdot t = 20 \cdot 20 \Rightarrow \Delta x_{\alpha_2} = 400m$$

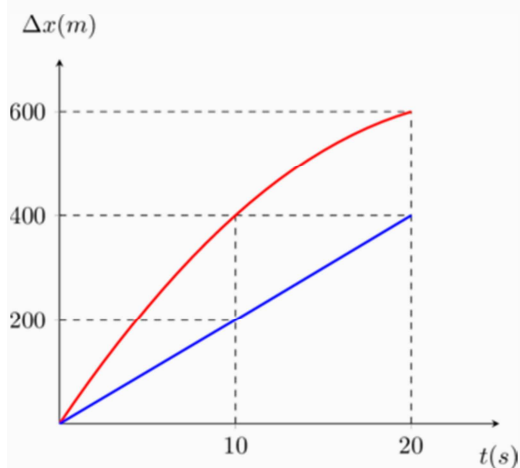
$$\Delta x_{\mu_2} = 50 \cdot t - t^2 = 50 \cdot 20 - 20^2 = 1000 - 400 \Rightarrow \Delta x_{\mu_2} = 600m$$

5.

Διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου

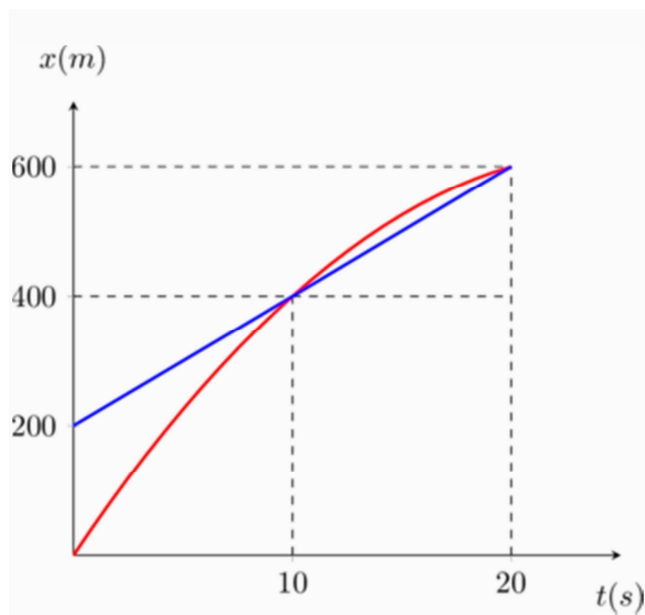


Διάγραμμα μετατόπισης – χρόνου



Διάγραμμα θέσης – χρόνου

7 Νοεμβρίου 2020



Στο διάγραμμα θέσης – χρόνου φαίνεται καθαρά ότι τα δύο σώματα συναντιούνται δύο φορές (στα σημεία τομής των δύο γραμμών).

Πηγή : Science & Education <https://blogs.sch.gr/koutenp>