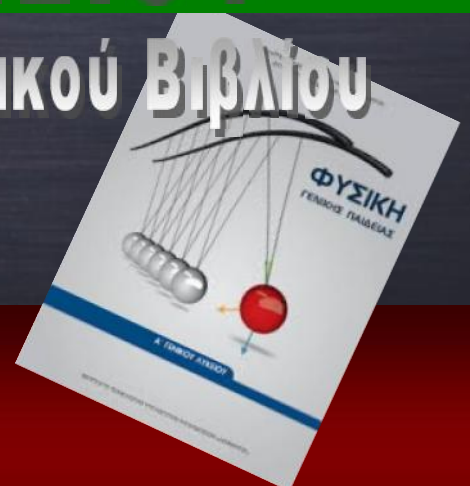




ΦΥΣΙΚΗ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Λύσεις των ασκήσεων του Σχολικού Βιβλίου



Επιμέλεια:
Άγης Παπαδάτος-Γιγάντες
Φυσικός MSc

1.1

Ευθύγραμμη κίνηση

(Λύσεις των ασκήσεων του σχολικού βιβλίου)

Επιμέλεια: Άγης Παπαδάτος –Φυσικός

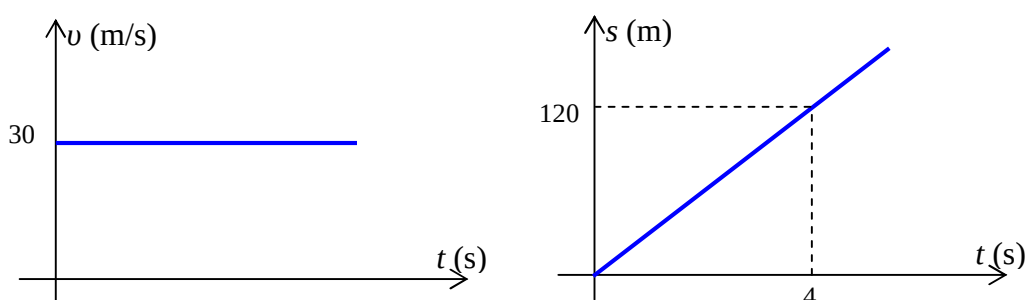
1. Ένα αυτοκίνητο διανύει απόσταση 120m σε χρόνο 4s με σταθερή ταχύτητα. Να υπολογίσετε την τιμή της ταχύτητας του αυτοκινήτου και να κάνετε τα διαγράμματα ταχύτητας - χρόνου και διαστήματος - χρόνου.

Απάντηση:

Από τα δεδομένα έχουμε $s = 120\text{m}$ όταν $\Delta t = 4\text{s}$

Επειδή η ταχύτητα είναι σταθερή:

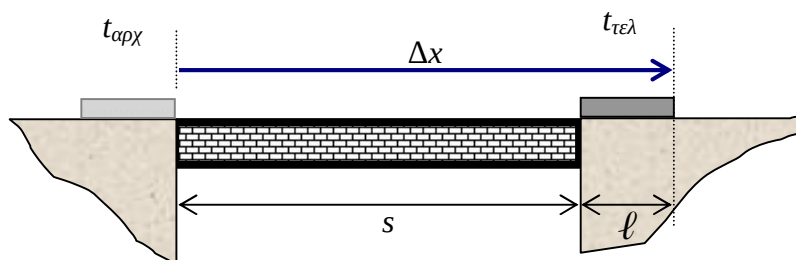
$$u = \frac{s}{\Delta t} = \frac{120\text{m}}{4\text{s}} = 30\text{m/s}$$



2. Μια ατμομηχανή έχει μήκος $\ell = 20\text{m}$, κινείται με ταχύτητα $u = 10\text{m/s}$ και περνά μια γέφυρα μήκους $s = 1.980\text{ m}$. Για πόσο χρόνο θα βρίσκεται τμήμα της ατμομηχανής πάνω στη γέφυρα;

Απάντηση:

Σχεδιάζουμε σχήμα όπου φαίνεται η αρχική θέση της ατμομηχανής (την στιγμή $t_{\text{αρχ}}$ που αρχίζει να πατάει τη γέφυρα) και η τελική της θέση (την στιγμή $t_{\text{τελ}}$ που το πίσω μέρος της παύει να πατάει τη γέφυρα).



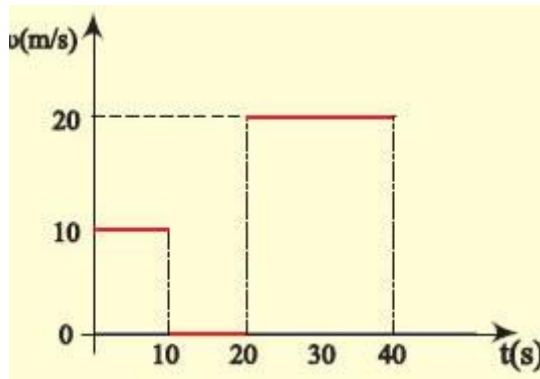
Η μετατόπισή της μετρημένη από το ίδιο της σημείο (π.χ. το μπροστινό της) είναι όπως βλέπουμε στο σχήμα :

$$\Delta x = s + \ell = 1980\text{m} + 20\text{m} = 2000\text{m}$$

Όμως επειδή κινείται με σταθερή ταχύτητα:

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Leftrightarrow u \cdot \Delta t = \Delta x \Leftrightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{u} \quad \text{Άρα:} \quad \Delta t = \frac{2000\text{m}}{10\text{m/s}} = 200\text{s}$$

3. Όχημα κάνει ευθύγραμμη κίνηση και το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου φαίνεται στην εικόνα.



- A. Να βρεθεί το συνολικό διάστημα που διανύει το όχημα.
 B. Ποια είναι η τιμή της μέσης ταχύτητας του οχήματος;
 Γ. Να γίνει το διάγραμμα διαστήματος - χρόνου.

Απάντηση:

A. Όπως βλέπουμε από το διάγραμμα το όχημα....

- Από 0s έως 10s ($\Delta t_1 = 10s - 0s = 10s$) έχει σταθερή ταχύτητα $u_1 = 10m/s$ άρα διανύει διάστημα:

$$s_1 = u_1 \cdot \Delta t_1 = 10 \frac{m}{s} \cdot 10s = 100m$$

- από 10s έως 20s ($\Delta t_2 = 20s - 10s = 10s$) είναι ακίνητο (αφού η ταχύτητά του είναι μηδέν) άρα δεν διανύει επιπλέον διάστημα: $s_2 = 0$
- από 20s έως 40s ($\Delta t_3 = 40s - 20s = 20s$) έχει σταθερή ταχύτητα $u_3 = 20m/s$ άρα διανύει διάστημα:

$$s_3 = u_3 \cdot \Delta t_3 = 20 \frac{m}{s} \cdot 20s = 400m$$

Άρα $s_{o1} = s_1 + s_2 + s_3 = 100m + 0 + 400m = 500m$

Το συνολικό διάστημα μπορεί να βρεθεί πιο εύκολα από το εμβαδόν στο διάγραμμα $v-t$, είτε τμηματικά είτε συνολικά. π.χ.:

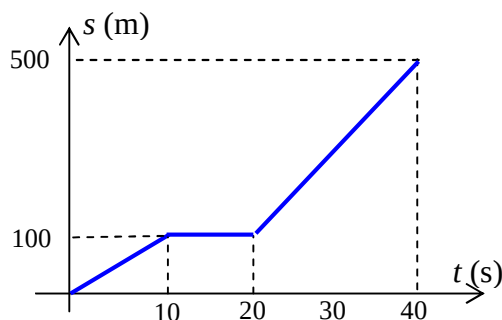
$$s_{o1} = s_1 + s_2 + s_3 = (E_1 + E_2 + E_3) = 10s \cdot 10m/s + 0 + 20s \cdot 20m/s = 100m + 400m = 500m$$

Επειδή εδώ χρειάζεται στο ερώτημα Γ να γνωρίζουμε τα είδη των κινήσεων και τα επιμέρους διαστήματα ώστε να κάνουμε την γραφική παράσταση του διαστήματος επιλέξαμε την προτεινόμενη λύση.

B. $u_m = \frac{s_{o1}}{\Delta t_{o1}} = \frac{500m}{40s} = 12,5 \frac{m}{s}$

Γ. Με βάση τις προηγούμενες απαντήσεις έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

χρονική στιγμή	t (s)	0	10	20	40
διάστημα που έχει διανυθεί από 0 έως t	$s_{ολ}$ (m)	0	100	100	500



4. Δύο αυτοκίνητα ξεκινάνε ταυτόχρονα από τα σημεία A και B μιας ευθύγραμμης διαδρομής κινούμενα αντίθετα με σταθερές ταχύτητες $u_1 = 36\text{ km/h}$ και $u_2 = 54\text{ km/h}$ αντίστοιχα.

A. Να βρεθεί μετά από πόσο χρόνο και σε ποιο σημείο θα συναντηθούν τα αυτοκίνητα, αν είναι $AB = 1\text{ km}$.

B. Να γίνουν τα διαγράμματα ταχύτητας χρόνου και διαστήματος χρόνου και για τα δύο κινητά σε κοινά συστήματα αξόνων.

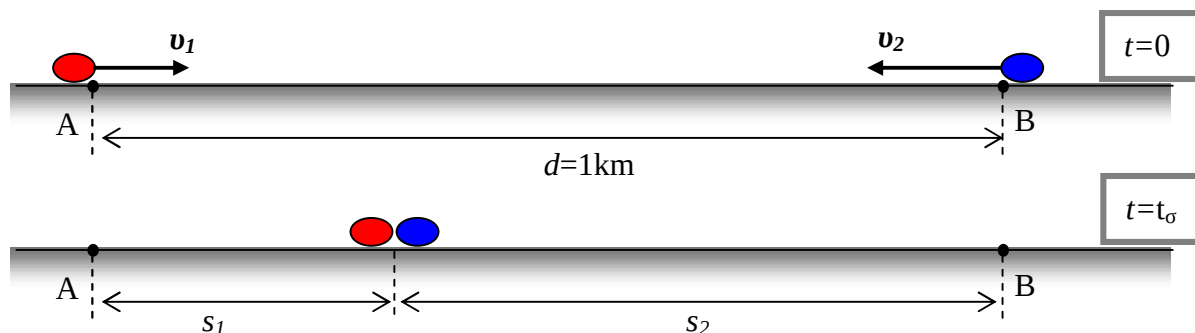
Απάντηση:

Κάνουμε τις μετατροπές στο S.I.

$$d = 1\text{ km} = 1000\text{ m}$$

$$u_1 = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 36 \frac{1000\text{ m}}{3600\text{ s}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$u_2 = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 54 \frac{1000\text{ m}}{3600\text{ s}} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



A. (1^{ος} τρόπος : Με διαστήματα)

Έστω τα δύο αυτοκίνητα συναντήθηκαν την χρ. στιγμή t_s .

Στο χρονικό διάστημα από 0 έως t_s έχουν διανύσει το καθένα διαστήματα:

$$s_1 = u_1 \cdot t_s \quad (1)$$

$$s_2 = u_2 \cdot t_s \quad (2)$$

Όπως βλέπουμε από το σχήμα την στιγμή της συνάντησης : $s_1 + s_2 = d$
και διαδοχικά έχουμε:

$$s_1 + s_2 = d \Leftrightarrow u_1 \cdot t_s + u_2 \cdot t_s = d \Leftrightarrow (u_1 + u_2) \cdot t_s = d \Leftrightarrow t_s = \frac{d}{u_1 + u_2}$$

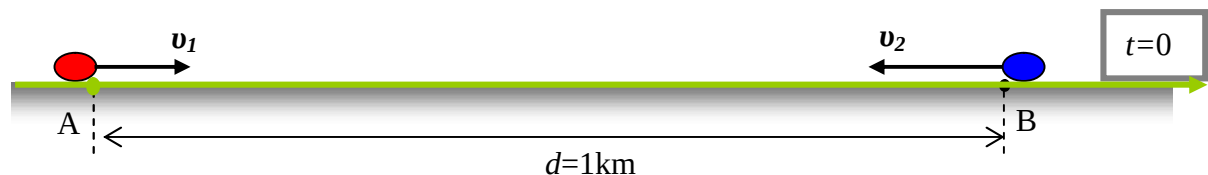
$$\text{Άρα : } t_s = \frac{1000\text{m}}{10\text{m/s} + 15\text{m/s}} = \frac{1000}{25}\text{s} = 40\text{s}$$

Την στιγμή εκείνη το 1^ο αυτοκίνητο έχει διανύσει :

$$(1) \Rightarrow s_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 40\text{s} = 400\text{m}$$

Άρα η συνάντηση γίνεται 400m δεξιά του Α.

(2^{ος} τρόπος : Με εξισώσεις κίνησης)



Θεωρούμε άξονα $x'x$ με αρχή το σημείο Α και θετική φορά προς το Β.

Οι αρχικές θέσεις των αυτοκινήτων είναι : $x_{0,1} = 0$ και $x_{0,2} = 1000\text{m}$.

Η εξίσωση κίνησης για κάθε αυτοκίνητο είναι:

$$x_1 = x_{0,1} + u_1 t \Leftrightarrow x_1 = 0 + 10t \Leftrightarrow x_1 = 10t \quad (\text{S.I.}) \quad (1)$$

$$x_2 = x_{0,2} + u_2 t \Leftrightarrow x_2 = 1000 + (-15)t \Leftrightarrow x_2 = 1000 - 15t \quad (\text{S.I.}) \quad (2)$$

Στις εξισώσεις κίνησης χρησιμοποιούμε τις αλγεβρικές τιμές των διανυσμάτων δηλαδή με πρόσημο που δείχνει την φορά τους: $u_1 = +10\text{m/s}$ και $u_2 = -15\text{m/s}$

Την στιγμή της συνάντησης τα αυτοκίνητα βρίσκονται στην ίδια θέση. Άρα θα ισχύει:

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow 10t = 1000 - 15t \Leftrightarrow 10t + 15t = 1000 \Leftrightarrow 25t = 1000 \Leftrightarrow t = \frac{1000}{25} \Leftrightarrow t = 40\text{s}$$

Από την (1) ή την (2) βρίσκουμε την θέση συνάντησης:

$$(1) \Rightarrow x_1 = 10 \cdot 40 = 400\text{m}$$

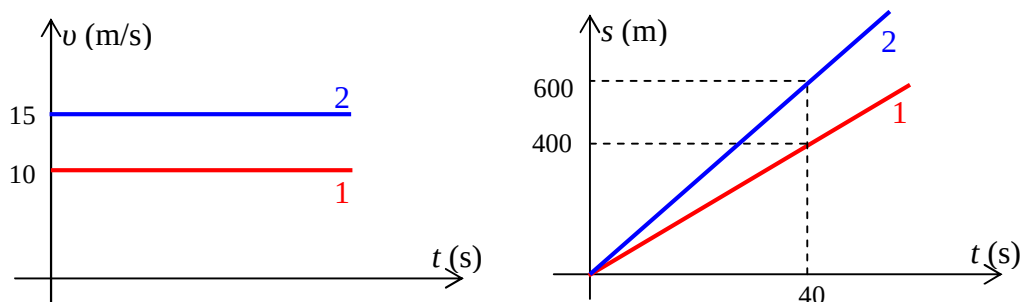
B.

Τα μέτρα των ταχυτήτων είναι σταθερά: $u_1 = 10\text{m/s}$ και $u_2 = 15\text{m/s}$

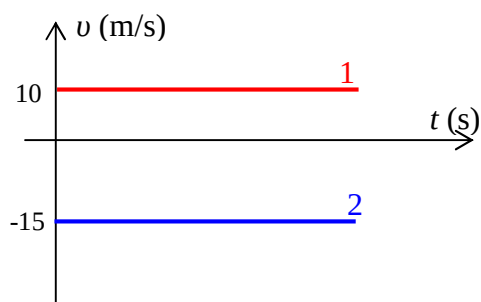
και οι εξισώσεις των διαστημάτων σαν συνάρτηση του χρόνου είναι

$$s_1 = u_1 \cdot t \Leftrightarrow s_1 = 10 \cdot t \quad (\text{S.I.})$$

$$s_2 = u_2 \cdot t \Leftrightarrow s_2 = 15 \cdot t \quad (\text{S.I.})$$



Τις περισσότερες φορές κάνουμε την γραφική παράσταση των αλγεβρικών τιμών των ταχυτήτων : $u_1 = +10\text{m/s}$ και $u_2 = -15\text{m/s}$ ώστε να φαίνεται η φορά κίνησης:

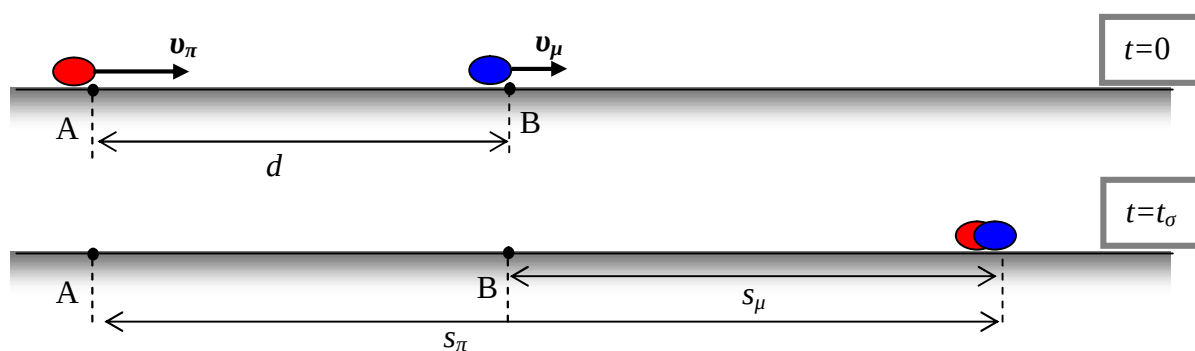


5. Περιπολικό αρχίζει να καταδιώκει μοτοσικλετιστή που βρίσκεται σε απόσταση $d = 500\text{m}$ μπροστά από το περιπολικό. Το περιπολικό έχει σταθερή ταχύτητα $u_\pi = 30\text{m/s}$, ενώ ο μοτοσικλετιστής κινείται με σταθερή ταχύτητα $u_\mu = 20\text{m/s}$.

Να βρεθούν:

- A. Ο χρόνος t που απαιτείται για να φτάσει το περιπολικό τον μοτοσικλετιστή.
B. Το διάστημα που θα διανύσει το περιπολικό στο χρόνο αυτό.

Απάντηση:



A. (1^{ος} τρόπος : Με διαστήματα)

Έστω τα δύο κινητά συναντήθηκαν την χρ. στιγμή t_σ (χρόνος συνάντησης). Στο χρονικό διάστημα από 0 έως t_σ έχουν διανύσει το καθένα διαστήματα:

$$s_p = u_p \cdot t_s \quad (1)$$

$$s_m = u_m \cdot t_s \quad (2)$$

Όπως βλέπουμε από το σχήμα την στιγμή της συνάντησης : $s_p - s_m = d$

και διαδοχικά έχουμε:

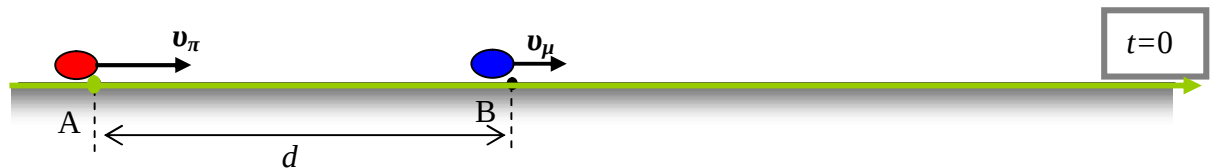
$$s_p - s_m = d \Leftrightarrow u_p \cdot t_s - u_m \cdot t_s = d \Leftrightarrow (u_p - u_m) \cdot t_s = d \Leftrightarrow t_s = \frac{d}{u_p - u_m}$$

$$\text{άρα : } t_s = \frac{500\text{m}}{30\text{m/s} - 20\text{m/s}} = \frac{500}{10}\text{s} = 50\text{s}$$

B.

Την στιγμή εκείνη το περιπολικό έχει διανύσει : $(1) \Rightarrow s_p = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 50\text{s} = 1500\text{m}$

(2^{ος} τρόπος : Με εξισώσεις κίνησης)



Θεωρούμε άξονα $x'x$ με αρχή το σημείο A και θετική φορά προς το B.

Οι αρχικές θέσεις των αυτοκινήτων είναι : $x_{0,p} = 0$ και $x_{0,m} = 500\text{m}$.

Η εξίσωση κίνησης για κάθε αυτοκίνητο είναι:

$$x_p = x_{0,p} + u_p t \Leftrightarrow x_p = 0 + 30t \Leftrightarrow x_p = 30t \quad (\text{S.I.}) \quad (1)$$

$$x_m = x_{0,m} + u_m t \Leftrightarrow x_m = 500 + 20t \quad (\text{S.I.}) \quad (2)$$

Στις εξισώσεις κίνησης χρησιμοποιούμε τις αλγεβρικές τιμές των διανυσμάτων δηλαδή με πρόσημο που δείχνει την φορά τους: $u_p = +30\text{m/s}$ και $u_m = +20\text{m/s}$

Την στιγμή της συνάντησης τα αυτοκίνητα βρίσκονται στην ίδια θέση. Άρα θα ισχύει:

$$x_p = x_m \Leftrightarrow 30t = 500 + 20t \Leftrightarrow 30t - 20t = 500 \Leftrightarrow 10t = 500 \Leftrightarrow t = \frac{500}{10} \Leftrightarrow t = 50\text{s}$$

Από την (1) βρίσκουμε την θέση του περιπολικού την στιγμή της συνάντησης.

$$(1) \Rightarrow x_p = 30 \cdot 50 = 1500\text{m}$$

Άρα έχει διανύσει διάστημα 1500m.

6. Η εξίσωση κίνησης ενός ποδηλάτη που κινείται σε ευθύγραμμη τροχιά είναι:

$$x = 10t \quad (x \text{ σε m, } t \text{ σε s}).$$

A. Να γίνει το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου για την κίνηση αυτή, από $t = 0$ μέχρι $t = 5\text{s}$.

B. Να υπολογίσετε το διάστημα που διάνυσε ο ποδηλάτης σε 5s.

Απάντηση:

Η γενική εξίσωση κίνησης της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης είναι :

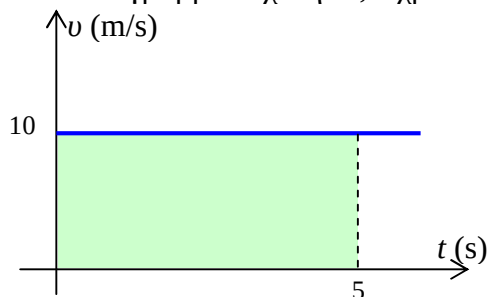
$$x = x_0 + ut$$

Συγκρίνοντας με την δοσμένη: $x = 10t$ συμπεραίνουμε ότι:

$$x_0 = 0 \text{ και } u = 10\text{m/s}$$

Δηλαδή ο ποδηλάτης κινείται με σταθερή ταχύτητα $u = 10\text{m/s}$ και την χρονική στιγμή μηδέν βρίσκεται στην αρχή του άξονα.

Έτσι το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου θα είναι:



Το διάστημα που διανύθηκε υπολογίζεται με διάφορους τρόπους :

- ♦ από το εμβαδόν στο προηγούμενο διάγραμμα:
 $s = (\text{εμβαδόν}) = (5s) \cdot (10\text{m/s}) = 50\text{m}$
- ♦ από την εξίσωση κίνησης βρίσκουμε την τελική θέση την στιγμή $t_1 = 5s$ αντικαθιστώντας όπου t το $5s$:
 $x_1 = (10 \cdot 5)\text{m} = 50\text{m}$
 οπότε:
 $s = |\Delta x| = |x_1 - x_0| = |(50\text{m}) - 0| = 50\text{m}$

7. Ένας μοτοσικλετιστής ξεκινά από την ηρεμία και κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο με σταθερή επιτάχυνση 2m/s^2 .

Να υπολογιστούν:

A. Η ταχύτητά του μετά από $15s$.

B. Η απόσταση που διάνυσε στο χρόνο αυτό.

Απάντηση:

Για την ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα έχουμε για την ταχύτητα και το διάστημα:

$$u = at \quad (1) \quad \text{και} \quad s = \frac{1}{2}at^2 \quad (2)$$

A.

$$(1) \Rightarrow u = a \cdot t = 2\text{m/s}^2 \cdot 15s = 30\text{m/s}$$

B.

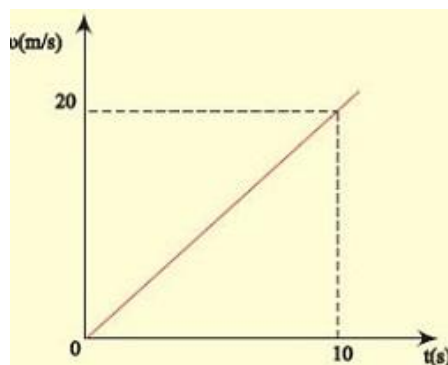
$$(2) \Rightarrow s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}2\text{m/s}^2(15s)^2 = 225\text{m}$$

8. Στην εικόνα φαίνεται το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου για ένα κινητό που κάνει ευθύγραμμη κίνηση.

Να υπολογίσετε:

A. Το διάστημα που διάνυσε το κινητό σε χρόνο $10s$.

B. Το διάστημα που διάνυσε το κινητό στο 2° δευτερόλεπτο της κίνησής του.



Απάντηση:**(1^{ος} τρόπος: Με τις εξισώσεις της κίνησης)**

Α. Όπως βλέπουμε από το διάγραμμα το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα. Σε αυτό το είδος κίνησης ισχύουν:

$$u = at \quad (1) \quad \text{και} \quad s = \frac{1}{2}at^2 \quad (2)$$

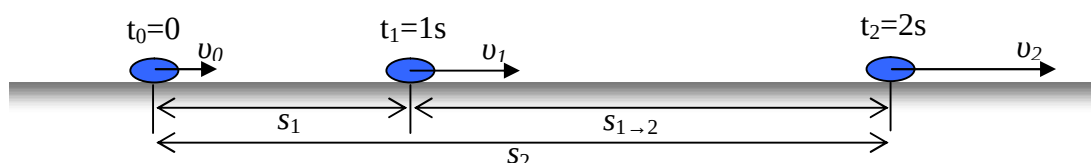
Όπως βλέπουμε από το διάγραμμα την χρονική στιγμή $t = 10\text{s}$ η ταχύτητα έχει μέτρο $u = 20\text{m/s}$.

$$(1) \Rightarrow u = at \Leftrightarrow a = \frac{u}{t} \quad \text{Άρα:} \quad a = \frac{20\text{m/s}}{10\text{s}} \Leftrightarrow a = 2\text{m/s}^2$$

Έτσι :

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}2\text{m/s}^2(10\text{s})^2 = 100\text{m}$$

Το 2^ο δευτερόλεπτο διαρκεί από $t_1 = 1\text{s}$ έως $t_2 = 2\text{s}$.



Ο τύπος $s = \frac{1}{2}at^2$ δίνει το διάστημα από $t_0 = 0\text{s}$ έως την χρονική στιγμή t

Για να βρούμε το διάστημα που διανύθηκε στο χρονικό διάστημα από $t_1 = 1\text{s}$ έως $t_2 = 2\text{s}$ πρέπει να βρούμε το διάστημα s_1 που έχει διανύσει από 0s έως 1s και να αφαιρέσουμε από το διάστημα s_2 που έχει διανυθεί από 0s έως 2s .

$$\text{Μέχρι την στιγμή } t_1 = 1\text{s} \text{ έχει διανυθεί: } s_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{1}{2}2\text{m/s}^2(1\text{s})^2 = 1\text{m}$$

$$\text{Μέχρι την στιγμή } t_2 = 2\text{s} \text{ έχει διανυθεί: } s_2 = \frac{1}{2}at_2^2 = \frac{1}{2}2\text{m/s}^2(2\text{s})^2 = 4\text{m}$$

$$\text{Άρα από } t_1 = 1\text{s} \text{ έως } t_2 = 2\text{s}: \quad s_{1 \rightarrow 2} = s_2 - s_1 = 4\text{m} - 1\text{m} = 3\text{m}$$

Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε και απευθείας το ζητούμενο διάστημα, από τον τύπο της επιταχυνόμενης με αρχική ταχύτητα, θεωρώντας ως αρχική στιγμή την $t_1 = 1\text{s}$. Τότε το σώμα την στιγμή t_1 έχει αρχική ταχύτητα $u_1 = a \cdot t_1 = 2\text{m/s}^2 \cdot 1\text{s} = 2\text{m/s}$

Οπότε για $\Delta t = t_2 - t_1 = 2\text{s} - 1\text{s} = 1\text{s}$ έχουμε:

$$s_{1 \rightarrow 2} = u_1 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2 = 2\text{m/s} \cdot 1\text{s} + \frac{1}{2} \cdot 2\text{m/s}^2 \cdot (1\text{s})^2 = 2\text{m} + 1\text{m} = 3\text{m}$$

(2^{ος} τρόπος: Με χρήση του διαγράμματος)

A.

Το διάστημα υπολογίζεται από το εμβαδόν στο διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου.

$$s = (\text{εμβαδόν}) = \frac{1}{2}(10\text{s})\left(20\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 100\text{m}$$

B.

Το 2^ο δευτερόλεπτο διαρκεί από $t_1 = 1\text{s}$ έως $t_2 = 2\text{s}$.

Το ζητούμενο διάστημα δίνεται από το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν στο διάγραμμα v - t . Για να το βρούμε όμως πρέπει πρώτα να βρούμε τις ταχύτητες u_1 και u_2 που έχει τις στιγμές t_1 και t_2 .

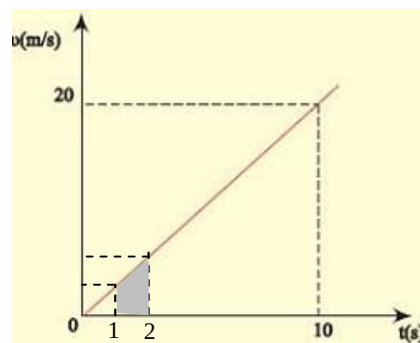
Η επιτάχυνση δίνεται από την κλίση:

$$a = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u_t - u_a}{t_t - t_a} = \frac{20\text{m/s} - 0\text{m/s}}{10\text{s} - 0\text{s}} = 2\text{m/s}^2$$

Την στιγμή $t_1 = 1\text{s}$ έχει : $u_1 = a \cdot t_1 = 2\text{m/s}^2 \cdot 1\text{s} = 2\text{m/s}$ Την στιγμή $t_2 = 2\text{s}$ έχει : $u_2 = a \cdot t_2 = 2\text{m/s}^2 \cdot 2\text{s} = 4\text{m/s}$

Τότε:

$$s_{1 \rightarrow 2} = (\text{Εμβαδόν τραπεζίου}) = \frac{(u_2 + u_1)\Delta t}{2} = \frac{(4\text{m/s} + 2\text{m/s})1\text{s}}{2} = \frac{6}{2}\text{m} = 3\text{m}$$

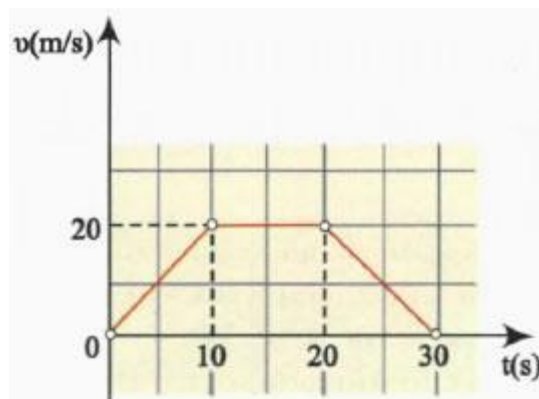


9. Η γραφική παράσταση της τιμής της ταχύτητας ενός κινητού σε συνάρτηση με το χρόνο, στα πρώτα 30s της κίνησής του δίνεται από το διάγραμμα της εικόνας.

Να υπολογιστούν:

A. Το συνολικό διάστημα που διάνυσε το κινητό.

B. Η τιμή της μέσης ταχύτητας του κινητού.

**Απάντηση:**

A. Το διάστημα υπολογίζεται και από το εμβαδόν στο διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου.

$$s = \left(\text{εμβαδόν τραπεζίου} = \frac{(B + \beta) \cdot v}{2} \right) = \frac{(10 + 30) \cdot 20}{2} \text{m} = 400\text{m}$$

B.

$$u_m = \frac{s_{\text{ολ}}}{\Delta t_{\text{ολ}}} = \frac{400\text{m}}{30\text{s}} = 13,3\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

10. Η ταχύτητα ενός αυτοκινήτου σε μια ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τη σχέση $v = 8 + 2t$ (v σε m/s, t σε s).

Να βρείτε το διάστημα που διάνυσε το αυτοκίνητο από τη χρονική στιγμή 2s μέχρι τη χρονική στιγμή 4s.

Απάντηση:

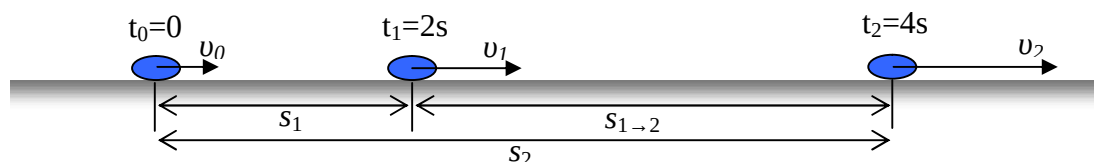
Βλέπουμε ότι η ταχύτητα μεταβάλλεται με τον χρόνο (είναι συνάρτηση 1^{ου} βαθμού). Στην ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση ο τύπος που δίνει την ταχύτητα σαν συνάρτηση του χρόνου είναι $v = v_0 + at$.

Από την σύγκριση με την σχέση που δίνεται $v = 8 + 2t$ βλέπουμε ότι το αυτοκίνητο κάνει **ευθ. ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση** με αρχική ταχύτητα $v_0 = 8 \frac{m}{s}$ και

επιτάχυνση $a = 2 \frac{m}{s^2}$ και μάλιστα **επιταχυνόμενη** αφού τα παραπάνω μεγέθη είναι ομόσημα άρα έχουν την ίδια φορά.

Ο αντίστοιχος τύπος $s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ δίνει το διάστημα από $t_0 = 0s$ έως την χρονική στιγμή t .

Για να βρούμε το διάστημα που διανύθηκε στο χρονικό διάστημα από $t_1 = 2s$ έως $t_2 = 4s$ πρέπει να βρούμε το διάστημα s_1 που έχει διανύσει από 0s έως 2s και να αφαιρέσουμε από το διάστημα s_2 που έχει διανυθεί από 0s έως 4s.



Μέχρι $t_1 = 2s$ έχει διανύσει:

$$s_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} at_1^2 = 8 \frac{m}{s} \cdot 2s + \frac{1}{2} 2 \frac{m}{s^2} \cdot (2s)^2 = 16m + 4m = 20m$$

Μέχρι $t_2 = 4s$ έχει διανύσει:

$$s_2 = v_0 t_2 + \frac{1}{2} at_2^2 = 8 \frac{m}{s} \cdot 4s + \frac{1}{2} 2 \frac{m}{s^2} \cdot (4s)^2 = 32m + 16m = 48m$$

Άρα από $t_1 = 2s$ έως $t_2 = 4s$ έχει διανύσει:

$$s_{1 \rightarrow 2} = s_2 - s_1 = 48m - 20m = \boxed{28m}$$

Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε και απευθείας το ζητούμενο διάστημα, από τον τύπο της επιταχυνόμενης με αρχική ταχύτητα, θεωρώντας ως αρχική στιγμή την $t_1 = 2s$. Τότε το σώμα την στιγμή t_1 έχει αρχική ταχύτητα $v_1 = 8 + 2 \cdot 2 = 12m/s$

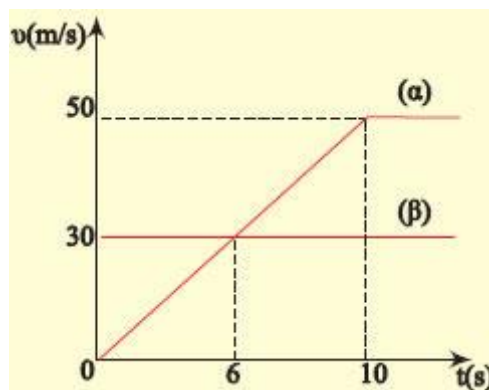
Οπότε για $\Delta t = t_2 - t_1 = 4s - 2s = 2s$ έχουμε:

$$s_{1 \rightarrow 2} = v_1 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a \cdot \Delta t^2 = 12m/s \cdot 2s + \frac{1}{2} \cdot 2m/s^2 \cdot (2s)^2 = 24m + 4m = \boxed{28m}$$

- *11.** Δύο κινητά βρίσκονται στο ίδιο σημείο ευθύγραμμου δρόμου και ξεκινούν ταυτόχρονα. Στο διάγραμμα της εικόνας φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις ταχύτητας - χρόνου για τα δύο αυτά κινητά.

Να υπολογιστούν:

- Σε ποια χρονική στιγμή η ταχύτητα των κινητών έχει την ίδια τιμή;
- Στα 10s πόσα m προηγείται το κινητό β του κινητού α;
- Σε ποια χρονική στιγμή συναντώνται τα κινητά;



Απάντηση:

A.

Από το διάγραμμα βλέπουμε ότι την χρονική στιγμή $t_1 = 6s$ τα δύο κινητά έχουν την ίδια ταχύτητα $u_1 = 30 \frac{m}{s}$.

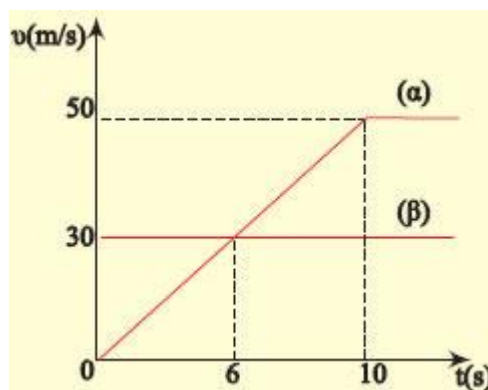
B.

Θα υπολογίσουμε τα διαστήματα που έχουν διανύσει τα δύο κινητά μέχρι την στιγμή $t = 10s$. (Το διάστημα δίνεται από το εμβαδόν στο διάγραμμα ταχύτητας χρόνου).

$$s_A = (\text{εμβαδόν τριγώνου}) = \frac{1}{2} 10s \cdot 50 \frac{m}{s} = 250m$$

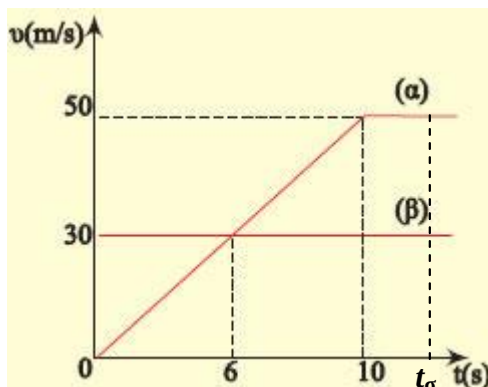
$$s_B = (\text{εμβαδόν ορθογωνίου}) = 10s \cdot 30 \frac{m}{s} = 300m$$

Άρα το B έχει διανύσει περισσότερο και αφού ξεκίνησαν από την ίδια θέση προηγείται κατά $d = s_B - s_A = 300m - 250m = 50m$



B. Έστω τα δύο κινητά συναντιούνται την χρονική στιγμή t_s (προφανώς μεγαλύτερη από 10s). Τότε θα έχουν διανύσει ίσα διαστήματα (αφού την στιγμή 0 ξεκίνησαν μαζί από το ίδιο σημείο).

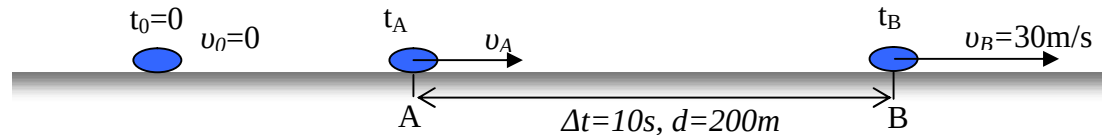
$$\begin{aligned} s_A = s_B &\Leftrightarrow E_A = E_B \Leftrightarrow \frac{[t_s + (t_s - 10)] \cdot 50}{2} = t_s \cdot 30 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2t_s - 10) \cdot 25 = 30t_s \Leftrightarrow 50t_s - 250 = 30t_s \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 50t_s - 30t_s = 250 \Leftrightarrow t_s = \frac{250}{20} \Leftrightarrow t_s = 12,5s \end{aligned}$$



- 12.** Ένα αυτοκίνητο ξεκινά από την ηρεμία και κινείται με σταθερή επιτάχυνση. Για να περάσει από δύο σημεία A και B που απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d = 200\text{m}$ χρειάζεται χρόνο 10s . Αν η ταχύτητα του αυτοκινήτου τη στιγμή που περνά από το σημείο B είναι $u_B = 30\text{m/s}$ να βρεθούν:

A. η ταχύτητά του όταν περνά από το σημείο A και
B. η επιτάχυνσή του.

Απάντηση:

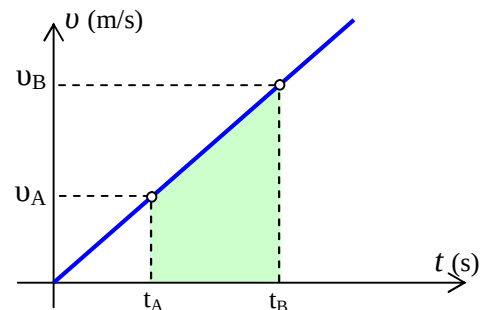


A.

Η γραφική παράσταση της ταχύτητας του αυτοκινήτου σε συνάρτηση με τον χρόνο έχει την μορφή του διπλανού σχήματος.

Στην γραφική παράσταση έχουν σημειωθεί τα σημεία που αντιστοιχούν στις στιγμές που το κινητό διέρχεται από τα A και B.

Από το σκιασμένο εμβαδόν υπολογίζεται το διάστημα που διάνυσε το αυτοκίνητο, που στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι ίσο με την απόσταση των δύο σημείων d .



Άρα:

$$d = \frac{(u_A + u_B) \Delta t}{2} \Leftrightarrow 2d = (u_A + u_B) \Delta t \Leftrightarrow 2d = u_A \Delta t + u_B \Delta t \Leftrightarrow 2d - u_B \Delta t = u_A \Delta t \Leftrightarrow$$

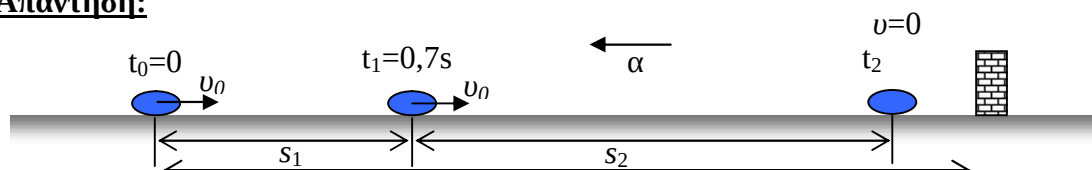
$$\Leftrightarrow \frac{2d - u_B \Delta t}{\Delta t} = \frac{u_A \cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}} \Leftrightarrow u_A = \frac{2d - u_B \Delta t}{\Delta t} \quad \text{Άρα:}$$

$$u_A = \frac{2 \cdot 200\text{m} - 30\text{m/s} \cdot 10\text{s}}{10\text{s}} = \frac{100\text{m}}{10\text{s}} = 10\text{m/s}$$

B.

$$a = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u_B - u_A}{\Delta t} = \frac{30\text{m/s} - 10\text{m/s}}{10\text{s}} = \frac{20\text{m/s}}{10\text{s}} = 2\text{m/s}^2$$

- *13.** Αυτοκίνητο κινείται σε οριζόντιο δρόμο με ταχύτητα μέτρου $u_0 = 72 \text{ km/h}$. Ξαφνικά σε απόσταση 50m ο οδηγός βλέπει εμπόδιο. Ο χρόνος αντίδρασης του οδηγού είναι $t_1 = 0,7\text{s}$ (ο χρόνος από τη στιγμή που βλέπει το εμπόδιο μέχρι να πατήσει το φρένο). Να εξετάσετε αν αποφεύγεται η σύγκρουση του αυτοκινήτου με το εμπόδιο. Η επιβράδυνση που προκαλούν τα φρένα είναι 10m/s^2 .

Απάντηση:

Πρέπει να βρούμε το συνολικό διάστημα που θα διανύσει το αυτοκίνητο μέχρι να σταματήσει. Αν αυτό ξεπερνάει την απόσταση d από το εμπόδιο, τότε θα συγκρουστεί με το εμπόδιο. Αν όχι, δεν θα συγκρουστεί.

$$u_0 = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 72 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Από 0 s έως την $t_1 = 0,7 \text{ s}$ το αυτοκίνητο κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, οπότε διανύει :

$$s_1 = u_0 \cdot t_1 = 20 \text{ m/s} \cdot 0,7 \text{ s} = 14 \text{ m}$$

Το διάστημα s_2 που διανύει επιβραδυνόμενο μέχρι να σταματήσει:

$$s_2 = \frac{u_0^2}{2a} = \frac{(20 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 10 \text{ m/s}^2} = 20 \text{ m}$$

Άρα συνολικά το αυτοκίνητο διάνυσε:

$$s_{\text{ολ}} = s_1 + s_2 = 14 \text{ m} + 20 \text{ m} = 34 \text{ m}$$

Επειδή $34 \text{ m} < 50 \text{ m}$ **δεν θα συγκρουστεί** με το εμπόδιο.

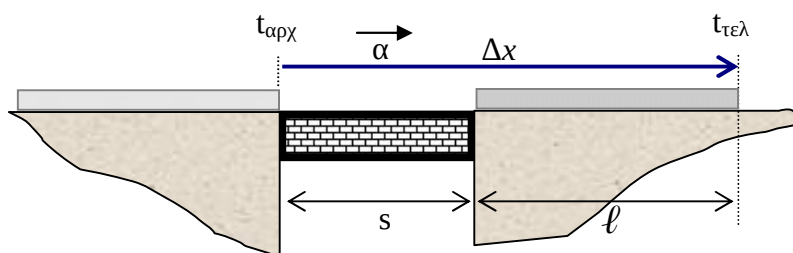
- 14.** Τρένο μήκους $\ell = 70 \text{ m}$ περνά από γέφυρα μήκους $s = 55 \text{ m}$. Το τρένο έχει αρχική ταχύτητα $u_0 = 20 \text{ m/s}$ και τη στιγμή που φτάνει στην γέφυρα αρχίζει να επιταχύνεται ομαλά με $a = 2 \text{ m/s}^2$.

Να βρείτε επί πόσο χρόνο βρίσκεται τμήμα του τρένου πάνω στη γέφυρα.

Απάντηση:

Η μετατόπιση του τρένου για όση ώρα τμήματά του βρίσκονται πάνω στη γέφυρα είναι:

$$\Delta x = s + \ell = 55 \text{ m} + 70 \text{ m} = 125 \text{ m}$$



Άρα από τον τύπο της μετατόπισης :

$$\Delta x = u_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2 \Rightarrow 125 = 20 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \Delta t^2 \Leftrightarrow \Delta t^2 + 20 \Delta t - 125 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = b^2 - 4ag = 20^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-125) = 400 + 500 = 900$$

$$\Delta t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20 \pm \sqrt{900}}{2 \cdot 1} = \frac{-20 \pm 30}{2} = \begin{cases} \frac{-20+30}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ s} \\ \frac{-20-30}{2} = \frac{-50}{2} = -25 \text{ s (απορρίπτεται)} \end{cases}$$

Άρα τμήματα του τρένου βρίσκονται πάνω στη γέφυρα για **5 s**.

- 15.** Οι εξισώσεις κίνησης δύο οχημάτων τα οποία κινούνται κατά μήκος του προσανατολισμένου άξονα O*x* είναι:

$$x_1 = 10t \quad \text{και} \quad x_2 = 4t^2 \quad \text{στο S.I.}$$

A. Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή που τα κινητά συναντώνται.

B. Να κατασκευάσετε τα διαγράμματα, ταχύτητας - χρόνου και διαστήματος - χρόνου.

Απάντηση:

A.

Τα κινητά συναντιούνται όταν βρίσκονται στην ίδια θέση, δηλαδή όταν $x_1 = x_2$.

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow 10t = 4t^2 \Leftrightarrow 10t - 4t^2 = 0 \Leftrightarrow t(10 - 4t) = 0 \Leftrightarrow (t = 0 \text{ ή } 10 - 4t = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t = 0 \text{ ή } 10 = 4t) \Leftrightarrow \left(t = 0 \text{ ή } \frac{10}{4} = \frac{4t}{4} \right) \Leftrightarrow t = 0 \text{ s} \quad \text{ή} \quad \boxed{t = 2,5 \text{ s}}$$

Άρα τα δύο κινητά την στιγμή 0 βρίσκονταν στην ίδια θέση και την στιγμή 2,5s ξανασυναντήθηκαν.

B.

Στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση η εξίσωση κίνησης είναι $x = x_0 + u \cdot t$ (1)

$$\text{ενώ στην ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη } x = x_0 + u_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad (2)$$

Άρα από τους τύπους που δίνονται βλέπουμε ότι:

- Η εξίσωση κίνησης του πρώτου κινητού έχει την μορφή της (1), οπότε αυτό κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με $x_0 = 0$ και $u_1 = 10 \text{ m/s}$
- Η εξίσωση κίνησης του δεύτερου κινητού έχει την μορφή της (2), οπότε αυτό κάνει ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη με $x_0 = 0$ και $u_{0,2} = 0$ και

$$\frac{1}{2}a = 4 \Leftrightarrow a = 8 \text{ m/s}^2 \quad (\text{κατά συνέπεια επιταχυνόμενη}).$$

•

Οι αντίστοιχες σχέσεις για τις ταχύτητες και τα διαστήματα θα είναι:

$$\text{κινητό A: } u_1 = 10 \text{ m/s}$$

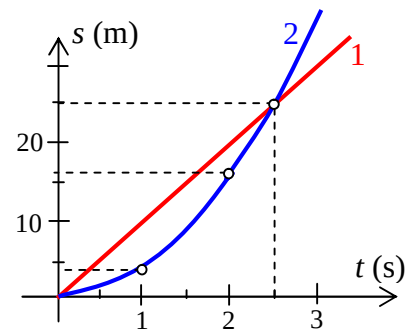
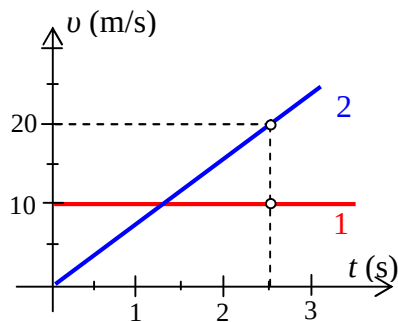
$$s_1 = u_1 \cdot t \Rightarrow s_1 = 10 \cdot t \quad (\text{S.I.})$$

$$\text{κινητό B: } u_2 = u_{0,2} + a \cdot t \Rightarrow u_2 = 8 \cdot t \quad (\text{S.I.})$$

$$s_2 = u_{0,2} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow s_2 = 4 \cdot t^2 \quad (\text{S.I.})$$

t (s)	v_1 (m/s)	v_2 (m/s)
0	10	0
2,5	10	20

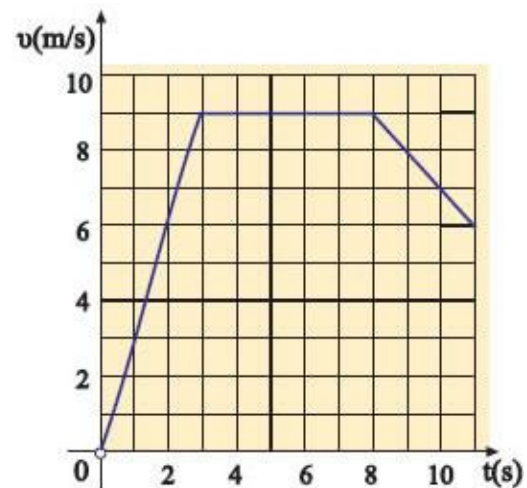
t (s)	s_1 (m/s)	s_2 (m/s)
0	0	0
1	10	4
2	20	16
2,5	25	25



16. Η κίνηση ενός δρομέα δίνεται προσεγγιστικά από το παρακάτω διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου.

Να υπολογίσετε:

- A. Τη μέση ταχύτητα του δρομέα και
B. Την επιτάχυνσή του, όπου η κίνηση είναι μεταβαλλόμενη.



Απάντηση:

A.

Όπως βλέπουμε από το διάγραμμα ο δρομέας:

- Από 0 s έως 3 s επιταχύνεται ομαλά από την ακινησία μέχρι να αποκτήσει ταχύτητα 9 m/s.
- Από 3 s έως 8 s κρατάει σταθερή ταχύτητα 9 m/s (κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση).
- Από 8 s έως 11 s επιβραδύνεται ομαλά από 9 m/s σε 6 m/s.

Για να βρούμε την μέση ταχύτητα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το ολικό διάστημα που διάνυσε ο δρομέας.

Το διάστημα δίνεται από το εμβαδόν στο διάγραμμα υ-τ.

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{9\text{m/s} \cdot 3\text{s}}{2} + 5\text{s} \cdot 9\text{m/s} + \frac{(9\text{m/s} + 6\text{m/s}) \cdot 3\text{s}}{2} =$$

$$= 13,5\text{m} + 45\text{m} + 22,5\text{m} = 81\text{m}$$

$$u_m = \frac{s_{\text{ολ}}}{\Delta t_{\text{ολ}}} = \frac{81\text{m}}{11\text{s}} = 7,36 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Β. Από 0s έως 3s :

$$a_1 = (\text{slope στο υ-τ}) = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u_t - u_a}{t_t - t_a} = \frac{9\text{m/s} - 0\text{m/s}}{3\text{s} - 0\text{s}} = \frac{9\text{m}}{3\text{s}^2} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\text{Από 8s έως 11s : } a_3 = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u_t - u_a}{t_t - t_a} = \frac{6\text{m/s} - 9\text{m/s}}{11\text{s} - 8\text{s}} = \frac{-3\text{m}}{3\text{s}^2} = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

όπου το μείον δηλώνει ότι έχει αρνητική φορά.

17. Ένα αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα $u_0 = 10\text{m/s}$ και ο οδηγός κάνοντας χρήση των φρένων προκαλεί στο αυτοκίνητο σταθερή επιβράδυνση $a = 2\text{m/s}^2$.

- Α. Μετά από πόσο χρόνο η ταχύτητα του αυτοκινήτου θα υποδιπλασιαστεί και πόσο διάστημα θα έχει διανύσει στο χρόνο αυτό;
Β. Για πόσο χρόνο θα κινηθεί το αυτοκίνητο με τη σταθερή αυτή επιβράδυνση και πόσο διάστημα θα διανύσει;

Απάντηση:

Α.

Στην ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση το μέτρο της ταχύτητας δίνεται από τον τύπο $u = u_0 - at$ όπου α η επιβράδυνση (μέτρο).

Ζητάμε τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία το μέτρο της ταχύτητας είναι $u_1 = \frac{u_0}{2} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$u_1 = u_0 - a \cdot t_1 \Leftrightarrow a \cdot t_1 = u_0 - u_1 \Leftrightarrow \frac{a \cdot t_1}{a} = \frac{u_0 - u_1}{a} \Leftrightarrow t_1 = \frac{u_0 - u_1}{a}$$

$$\text{Άρα: } t_1 = \frac{10\text{m/s} - 5\text{m/s}}{2\text{m/s}^2} = \frac{5}{2}\text{s} = 2,5\text{s}$$

$$s_1 = u_0 t_1 - \frac{1}{2} a t_1^2 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2,5\text{s} - \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (2,5\text{s})^2 = 25\text{m} - 6,25\text{m} = 18,75\text{m}$$

Β. Θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους που δίνουν το $t_{\text{ολ}}$ και $s_{\text{ολ}}$ στην επιβραδυνόμενη κίνηση.

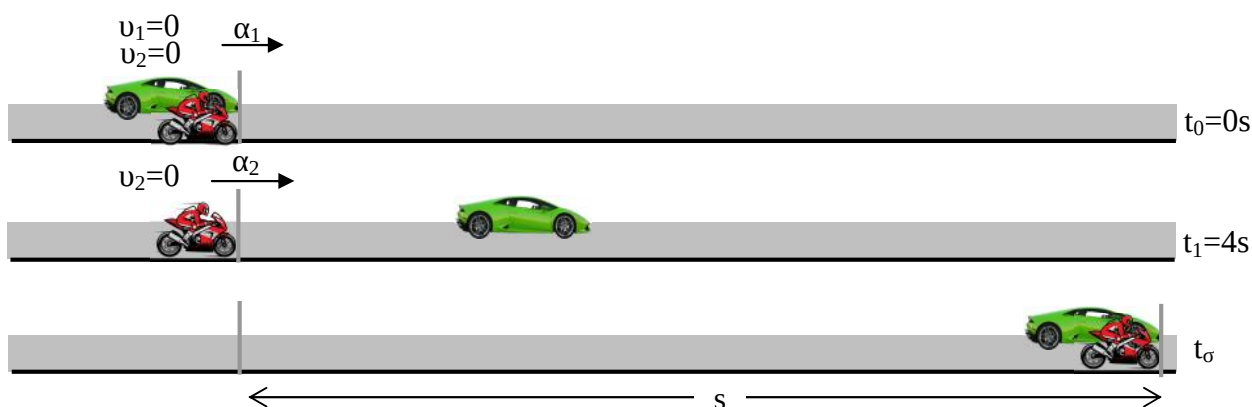
$$t_{\text{ολ}} = \frac{u_0}{a} = \frac{10\text{m/s}}{2\text{m/s}^2} = 5\text{s}$$

$$s_{\text{ολ}} = \frac{u_0^2}{2a} = \frac{(10\text{m/s})^2}{2 \cdot 2\text{m/s}^2} = \frac{100}{4}\text{m} = 25\text{m}$$

- *18.** Ένα αυτοκίνητο και μια μοτοσικλέτα είναι ακίνητα στην αρχή μιας αγωνιστικής πίστας. Το αυτοκίνητο ξεκινάει κινούμενο με σταθερή επιτάχυνση $\alpha_1 = 1,6\text{m/s}^2$ και 4 δευτερόλεπτα κατόπιν, ξεκινάει ο μοτοσικλετιστής ο οποίος καταδιώκει το αυτοκίνητο με σταθερή επιτάχυνση $\alpha_2 = 2,5\text{m/s}^2$.

- Α. Μετά από πόσο χρόνο, από το ξεκίνημα του αυτοκινήτου, ο μοτοσικλετιστής θα φτάσει το αυτοκίνητο και τι διάστημα θα έχουν διανύσει μέχρι τότε;
 Β. Πόση είναι η ταχύτητα κάθε οχήματος τη στιγμή της συνάντησης και πόση η μέση ταχύτητα με την οποία κινήθηκε μέχρι τότε το αυτοκίνητο;
 Γ. Να κάνετε για το αυτοκίνητο τα διαγράμματα $v = f(t)$ και $s = f(t)$.

Απάντηση:



Α.

Το αυτοκίνητο ξεκίνησε την στιγμή $t_0 = 0$ και διανύει διάστημα s σε χρόνο t_s ενώ η μοτοσικλέτα, η οποία ξεκίνησε την στιγμή t_1 , διανύει το ίδιο διάστημα σε χρόνο $t_s - t_1$.

Για το αυτοκίνητο: $s = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t_s^2$ (1)

Για την μοτοσικλέτα: $s = \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot (t_s - t_1)^2$ (2)

Άρα:

$$\frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t_s^2 = \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot (t_s - t_1)^2 \Leftrightarrow a_1 \cdot t_s^2 = a_2 \cdot (t_s - t_1)^2 \Leftrightarrow 1,6 \cdot t_s^2 = 2,5 \cdot (t_s - 4)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1,6 \cdot t_s^2 = 2,5 \cdot (t_s^2 - 2 \cdot t_s \cdot 4 + 4^2) \Leftrightarrow 1,6 \cdot t_s^2 = 2,5 \cdot t_s^2 - 20 \cdot t_s + 40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = -1,6 \cdot t_s^2 + 2,5 \cdot t_s^2 - 20 \cdot t_s + 40 \Leftrightarrow 0 = 0,9 \cdot t_s^2 - 20 \cdot t_s + 40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,9 \cdot t_s^2 - 20 \cdot t_s + 40 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ag = (-20)^2 - 4 \cdot 0,9 \cdot 40 = 400 - 144 = 256$$

$$t_s = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-20) \pm \sqrt{256}}{2 \cdot 0,9} = \frac{20 \pm 16}{1,8} = \begin{cases} \frac{20+16}{1,8} = \frac{36}{1,8} = 20\text{s} \\ \frac{20-16}{1,8} = \frac{4}{1,8} = 2,2\text{s} < 4\text{s} \text{ απορρίπτεται} \end{cases}$$

Άρα συναντιούνται την $t_s = 20\text{s}$

$$(1) \Rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot 1,6\text{m/s}^2 \cdot (20\text{s})^2 = \frac{1,6 \cdot 400}{2} \text{m} = 320\text{m}$$

B.

Οι ταχύτητες των κινητών την στιγμή της συνάντησης είναι :

$$u_1 = a_1 \cdot t_s = 1,6 \text{ m/s}^2 \cdot 20 \text{ s} = 32 \text{ m/s}$$

$$u_2 = a_2 \cdot (t_s - t_1) = 2,5 \text{ m/s}^2 \cdot (20 \text{ s} - 4 \text{ s}) = 40 \text{ m/s}$$

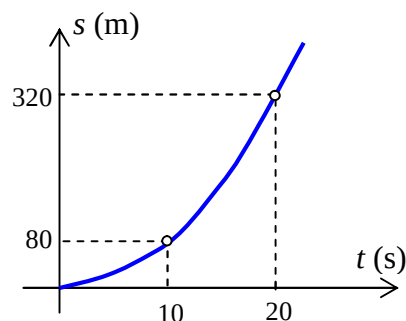
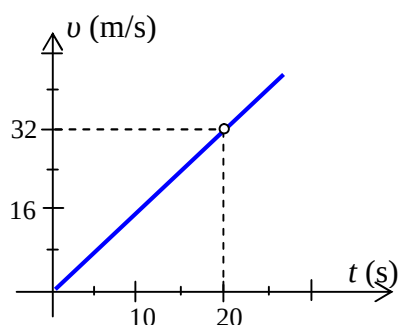
Η μέση ταχύτητα του αυτοκινήτου είναι:

$$u_{m,1} = \frac{s}{t_s} = \frac{320 \text{ m}}{20 \text{ s}} = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

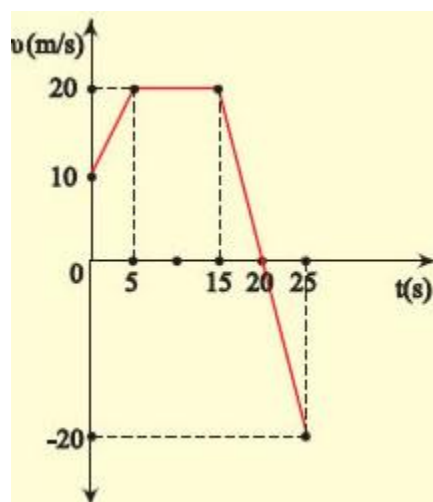
Γ.

$$u_1 = a_1 \cdot t \Leftrightarrow u_1 = 1,6 \cdot t \quad (\text{S.I.})$$

$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot 1,6 \cdot t^2 \Leftrightarrow s_1 = 0,8 \cdot t^2 \quad (\text{S.I.})$$



19. Στο διάγραμμα αποδίδεται γραφικά η ταχύτητα ενός κινητού σε συνάρτηση με το χρόνο.



- A. Να περιγράψετε την κίνηση του κινητού έως τη χρονική στιγμή 25s.
 B. Να υπολογίσετε την επιτάχυνσή του, από τη χρονική στιγμή μηδέν έως τη χρονική στιγμή 5s.
 Γ. Να υπολογίσετε το διάστημα που διανύει το κινητό και τη μετατόπισή του για τα 25s της κίνησής του.
 Δ. Να βρείτε τη μέση ταχύτητα του κινητού στη διάρκεια των 25s.

Απάντηση:

Α.

- Από 0s έως 5s το κινητό κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση (με αρχική ταχύτητα 10m/s).
- Από 5s έως 15s το κινητό κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.
- Από 15s έως 20s το κινητό κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση (με αρχική ταχύτητα 20 m/s μέχρι να σταματήσει).
- Από 20s έως 25s το κινητό κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση προς την αρνητική κατεύθυνση.

Β. Από 0s έως 5s :

$$a_1 = (\text{κλίση στο } v-t) = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u_t - u_a}{t_t - t_a} = \frac{20\text{m/s} - 10\text{m/s}}{5\text{s} - 0\text{s}} = \frac{10}{5} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ομοίως αν θέλαμε να υπολογίσουμε και την επιτάχυνση από 15s έως 20s (ή από 20s έως 25s, η οποία είναι ίδια γιατί έχουμε την ίδια κλίση από 15s έως 25s):

$$a_3 = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u_t - u_a}{t_t - t_a} = \frac{0\text{m/s} - 20\text{m/s}}{20\text{s} - 15\text{s}} = \frac{-20}{5} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

όπου το μείον δηλώνει ότι έχει αρνητική φορά.

Γ.

Το διάστημα δίνεται από το εμβαδόν στο διάγραμμα v-t.

$$s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = \frac{(20\text{m/s} + 10\text{m/s}) \cdot 5\text{s}}{2} + 10\text{s} \cdot 20\text{m/s} + \frac{20\text{m/s} \cdot 5\text{s}}{2} + \frac{20\text{m/s} \cdot 5\text{s}}{2} = 75\text{m} + 200\text{m} + 50\text{m} + 50\text{m} = 375\text{m}$$

Η μετατόπιση δίνεται και αυτή από το εμβαδόν στο διάγραμμα v-t.

Η διαφορά εντοπίζεται στο γεγονός ότι μετατοπίσεις προς την αρνητική κατεύθυνση είναι αρνητικές. Άρα, όταν το διάγραμμα της ταχύτητας «περνάει» κάτω από τον άξονα των χρόνων, η αντίστοιχη μετατόπιση ισούται με το αντίθετο του εμβαδού.

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 = E_1 + E_2 + E_3 + (-E_4) = \frac{(20\text{m/s} + 10\text{m/s}) \cdot 5\text{s}}{2} + 10\text{s} \cdot 20\text{m/s} + \frac{20\text{m/s} \cdot 5\text{s}}{2} - \frac{20\text{m/s} \cdot 5\text{s}}{2} = 75\text{m} + 200\text{m} + 50\text{m} - 50\text{m} = 275\text{m}$$

Δ.

$$u_m = \frac{s_{\text{ολ}}}{\Delta t_{\text{ολ}}} = \frac{375\text{m}}{25\text{s}} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

1.2

Δυναμική σε μία διάσταση

(Λύσεις των ασκήσεων του σχολικού βιβλίου)

Επιμέλεια: Άγης Παπαδάτος –Φυσικός

1. Δύο δυνάμεις με τιμές 80N και 60N ενεργούν στο ίδιο σημείο ενός σώματος. Να βρείτε τη συνισταμένη τους αν οι διευθύνσεις τους σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία
- A. 0° B. 180°

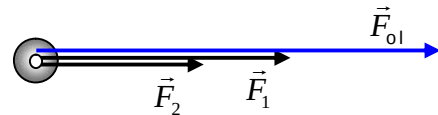
Απάντηση:

A.

Επειδή οι δυνάμεις (έστω $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$) είναι ομόρροπες, η συνισταμένη τους έχει μέτρο:

$$F_{o1} = F_1 + F_2 = 80\text{N} + 60\text{N} = 140\text{N}$$

και έχει κατεύθυνση ίδια με την κατεύθυνση των δυνάμεων.

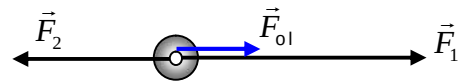


A.

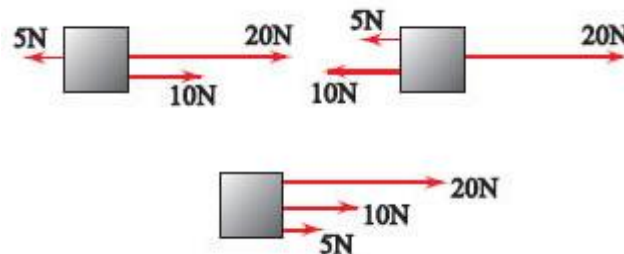
Επειδή οι δυνάμεις (έστω $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$) είναι αντίρροπες, η συνισταμένη τους έχει μέτρο:

$$F_{o1} = |F_1 - F_2| = F_1 - F_2 = 80\text{N} - 60\text{N} = 20\text{N}$$

και έχει κατεύθυνση ίδια με την κατεύθυνση της μεγαλύτερης κατά μέτρο, δηλαδή της $\vec{F}_1$.



2. Στην εικόνα φαίνεται ένα σώμα και οι δυνάμεις που δέχεται σε τρεις περιπτώσεις.



Σε κάθε περίπτωση να υπολογίσετε την συνισταμένη δύναμη σε τιμή και κατεύθυνση.

Απάντηση:

Θεωρώντας θετική φορά προς τα δεξιά για το μέτρο της συνισταμένης σε κάθε περίπτωση έχουμε:

α) $F_{o1} = 20\text{N} + 10\text{N} - 5\text{N} = 25\text{N}$ με φορά προς τα δεξιά (θετική)

β) $F_{o1} = 20\text{N} - 10\text{N} - 5\text{N} = 5\text{N}$ με φορά προς τα δεξιά (θετική)

γ) $F_{o1} = 20\text{N} + 10\text{N} + 5\text{N} = 35\text{N}$ με φορά προς τα δεξιά (θετική)

3. Μια δύναμη $F = 10\text{N}$ να αναλυθεί σε δυο συνιστώσες, F_1 και F_2 που είναι:

A. συγγραμμικές ομόρροπες και $F_1 = 4F_2$

B. συγγραμμικές αντίρροπες και $F_1 = 3F_2$

Απάντηση:Α. συγγραμμικές ομόρροπες και $F_1 = 4F_2$

Αφού οι συνιστώσες είναι ομόρροπες προφανώς θα έχουν και οι δύο την κατεύθυνση της $\vec{F}$. Για τα μέτρα των δυνάμεων θα ισχύει ότι :

$$F = F_1 + F_2 \Leftrightarrow F = 4F_2 + F_2 \Leftrightarrow F = 5F_2 \Leftrightarrow F_2 = \frac{F}{5} \Leftrightarrow F_2 = \frac{10\text{N}}{5} \Leftrightarrow F_2 = 2\text{N}$$

$$F_1 = 4F_2 = 4 \cdot 2\text{N} = 8\text{N}$$

Β. συγγραμμικές αντίρροπες και $F_1 = 3F_2$

Αφού οι συνιστώσες είναι αντίρροπες η μεγαλύτερη (δηλαδή η $\vec{F}_1$) έχει τη φορά της $\vec{F}$ ενώ η μικρότερη (η $\vec{F}_2$) αντίθετη. Για τα μέτρα των δυνάμεων θα ισχύει ότι :

$$F = F_1 - F_2 \Leftrightarrow F = 3F_2 - F_2 \Leftrightarrow F = 2F_2 \Leftrightarrow F_2 = \frac{F}{2} \Leftrightarrow F_2 = \frac{10\text{N}}{2} \Leftrightarrow F_2 = 5\text{N}$$

$$F_1 = 3F_2 = 3 \cdot 5\text{N} = 15\text{N}$$



4. Από ένα δυναμόμετρο κρεμάμε σώματα διαφορετικών βαρών.

Α. Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Επιμήκυνση (cm)	5	8		15	20
Βάρος (N)			40		80

Β. Να κάνετε το διάγραμμα της δύναμης που επιμηκώνει το δυναμόμετρο σε συνάρτηση με την επιμήκυνση.

Γ. Να υπολογίσετε την κλίση της γραφικής παράστασης.

Απάντηση:

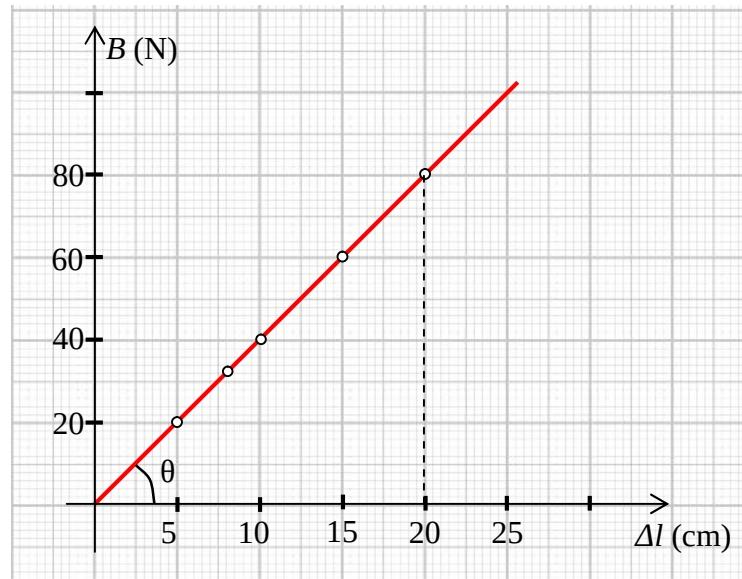
Α.

Η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι ανάλογη με την δύναμη που του ασκείται (το Βάρος στην περίπτωση μας) όπως λέει ο νόμος του Hooke.

Έτσι, ο πίνακας συμπληρώνεται ώστε το βάρος σε N (Newton) να είναι αριθμητικά τετραπλάσιο από την αντίστοιχη επιμήκυνση σε cm, όπως συμβαίνει στην τελευταία στήλη, (διότι όπως ξέρουμε τα ανάλογα ποσά έχουν σταθερό λόγο).

Επιμήκυνση (cm)	5	8	10	15	20
Βάρος (N)	20	32	40	60	80

B.



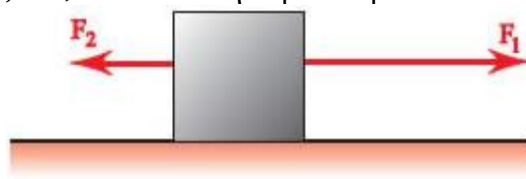
Γ.

$$\text{κλίση} = \varepsilon\varphi\theta = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκεείμενη κάθετη}} = \frac{80\text{N}}{20\text{cm}} = 4 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$$

Η κλίση στο συγκεκριμένο διάγραμμα όπως βλέπουμε ισούται με το πηλίκο της δύναμης προς την παραμόρφωση που με βάση τον νόμο του Hooke στα ελατήρια ισούται με την σταθερά του ελατηρίου k .

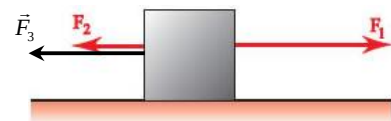
$$\text{κλίση} = \varepsilon\varphi\theta = \frac{F}{|\Delta \ell|} = k$$

5. Το σώμα που φαίνεται στην εικόνα κινείται με σταθερή ταχύτητα. Είναι γνωστό ότι $F_1 = 22\text{N}$ και $F_2 = 7\text{N}$. Το σώμα δέχεται άλλη δύναμη εκτός των F_1 και F_2 στη διεύθυνση της κίνησής του; Αν ναι να την προσδιορίσετε.

**Απάντηση:**

Αφού το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα, η συνισταμένη των δυνάμεων πάνω του θα είναι μηδέν (α' νόμος Νεύτωνα).

Επειδή οι δύο δυνάμεις που δίνονται δεν έχουν συνισταμένη μηδέν, πρέπει στο σώμα να ασκείται και τρίτη οριζόντια δύναμη $\vec{F}_3$ με την κατεύθυνση της $\vec{F}_2$ έτσι ώστε (για τα μέτρα) :



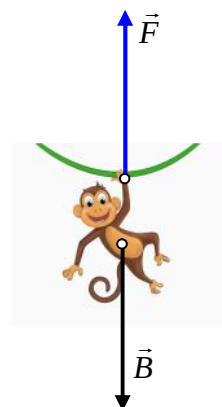
$$F_{01} = 0 \Leftrightarrow F_1 - F_2 - F_3 = 0 \Leftrightarrow F_1 - F_2 = F_3 \Leftrightarrow F_3 = 22\text{N} - 7\text{N} \Leftrightarrow F_3 = 15\text{N}$$

6. Ένα πιθηκάκι κρέμεται από το κλαδί ενός δέντρου και έχει βάρος 200N. Να προσδιορίσετε τη δύναμη που δέχεται από το κλαδί του δένδρου.

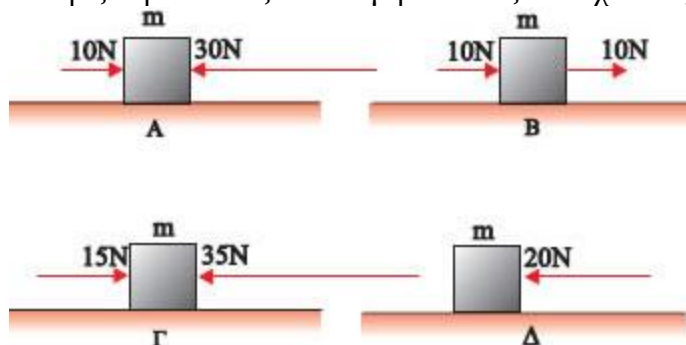
Απάντηση:

Το πιθηκάκι είναι ακίνητο. Άρα σύμφωνα με τον α' νόμο του Νεύτωνα η συνισταμένη των δυνάμεων πάνω του θα είναι μηδέν. Επειδή δέχεται το βάρος του $\vec{B}$ (προς τα κάτω) θα πρέπει να δέχεται από το κλαδί αντίρροπη δύναμη $\vec{F}$ (προς τα πάνω). Τότε για τα μέτρα των δυνάμεων θα έχουμε:

$$F_{\text{ολ}} = 0 \Leftrightarrow F - B = 0 \Leftrightarrow F = B \Leftrightarrow \boxed{F = 200\text{N}}$$



7. Ένα σώμα ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο. Στην εικόνα φαίνονται οι οριζόντιες δυνάμεις που δέχεται σε τέσσερις περιπτώσεις. Να συγκρίνετε τις επιταχύνσεις του σώματος.



Απάντηση:

Πρέπει να βρούμε την συνισταμένη δύναμη σε κάθε περίπτωση.

A. $F_{\text{ολ}} = 30\text{N} - 10\text{N} = 20\text{N}$ με φορά προς τα αριστερά

B. $F_{\text{ολ}} = 10\text{N} + 10\text{N} = 20\text{N}$ με φορά προς τα δεξιά

Γ. $F_{\text{ολ}} = 35\text{N} - 15\text{N} = 20\text{N}$ με φορά προς τα αριστερά

Δ. $F_{\text{ολ}} = 20\text{N}$ με φορά προς τα αριστερά

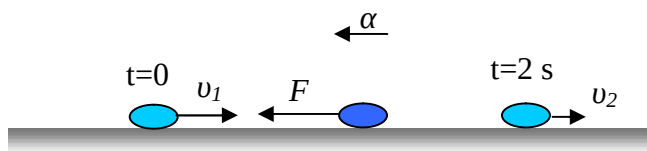
Όπως βλέπουμε και στις τέσσερις περιπτώσεις το μέτρο της συνισταμένης είναι ίδιο. Επειδή από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής προκύπτει ότι:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{ολ}}}{m}$$

Άρα, και στις τέσσερις περιπτώσεις (εφόσον η μάζα του σώματος είναι σταθερή) θα αποκτήσει επιτάχυνση ίδιου μέτρου $a = \frac{20\text{N}}{m}$. Η κατεύθυνσή της είναι ίδια με της συνισταμένης, δηλαδή προς τα αριστερά εκτός από την B περίπτωση που είναι προς τα δεξιά.

8. Ένα σώμα κινείται σε λείο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα $u_1 = 10\text{m/s}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζει να ενεργεί πάνω στο σώμα δύναμη F , κατά τη διεύθυνση της ταχύτητας αλλά με αντίθετη φορά. Σε χρόνο $t = 2\text{s}$ η τιμή της ταχύτητάς του γίνεται $u_2 = 5\text{m/s}$. Να υπολογιστεί η τιμή της δύναμης F . Δίνεται η μάζα του σώματος $m = 10\text{kg}$.

Απάντηση:



Το σώμα, εξαιτίας της δύναμης, θα αποκτήσει επιτάχυνση που έχει την κατεύθυνσή της (δηλαδή αντίθετη της ταχύτητας), με αλγεβρική τιμή:

$$a = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u_2 - u_1}{t_2 - t_1} = \frac{5\text{m/s} - 10\text{m/s}}{2\text{s} - 0\text{s}} = \frac{-5\text{m/s}}{2\text{s}} = -2,5\text{m/s}^2$$

(το μείον δηλώνει ότι έχει αρνητική φορά δηλαδή αντίθετη από την ταχύτητα, άρα είναι επιβράδυνση)

Από τον Θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής και επειδή $\vec{F}_{o1} = \vec{F}$ για τις αλγεβρικές τιμές:

$$F = m \cdot a = 10\text{kg} \cdot \left(-2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = \boxed{-25\text{N}}$$

(Και εδώ το μείον δηλώνει την αρνητική φορά της δύναμης)

9. Ένα σώμα μάζας $m = 1\text{kg}$ κινείται σε οριζόντιο δάπεδο και η ταχύτητά του δίνεται από τη σχέση

$$u = 4t \quad (u \text{ σε m/s, } t \text{ σε s})$$

Να βρείτε την τιμή της συνισταμένης δύναμης που δέχεται το σώμα.

Απάντηση:

Στην ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση ο τύπος που δίνει την ταχύτητα σαν συνάρτηση του χρόνου είναι $u = u_0 + at$.

Από την σύγκριση με την σχέση που δίνεται $u = 4t$, βλέπουμε ότι το σώμα κάνει **ευθ. ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση** με αρχική ταχύτητα $u_0 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ και επιτάχυνση

$$a = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

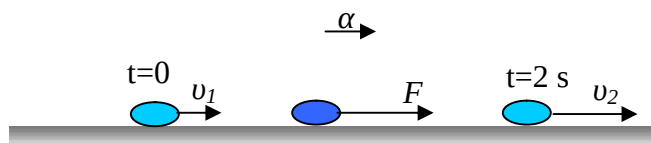
Από τον Θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τις αλγεβρικές τιμές:

$$F_{o1} = m \cdot a = 1\text{kg} \cdot \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = \boxed{4\text{N}}$$

με φορά την φορά της επιτάχυνσης, δηλαδή της κίνησης.

- 10.** Σώμα επιταχύνεται από 10m/s σε 14m/s μέσα σε χρόνο 2s. Η μάζα του σώματος είναι $m = 5\text{kg}$. Να βρεθεί η σταθερή δύναμη που επιταχύνει το σώμα.

Απάντηση:



Το σώμα έχει επιτάχυνση με αλγεβρική τιμή:

$$a = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u_2 - u_1}{\Delta t} = \frac{14\text{m/s} - 10\text{m/s}}{2\text{s}} = \frac{4\text{m/s}}{2\text{s}} = 2\text{m/s}^2$$

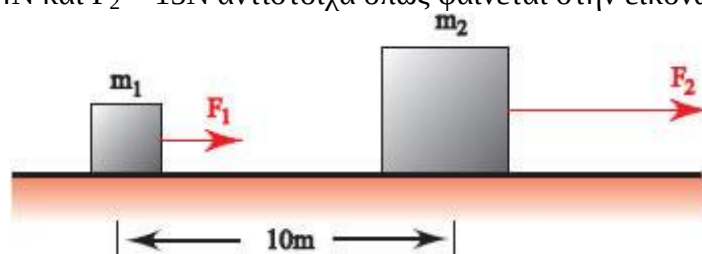
και κατεύθυνση αυτήν της ταχύτητας.

Από τον Θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τις αλγεβρικές τιμές:

$$F = m \cdot a = 5\text{kg} \cdot \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 10\text{N}$$

με κατεύθυνση την κατεύθυνση της επιτάχυνσης, δηλαδή της ταχύτητας.

- *11.** Δύο σώματα με μάζες $m_1 = 1\text{kg}$ και $m_2 = 3\text{kg}$ ηρεμούν σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Η μεταξύ τους απόσταση είναι 10m. Στα σώματα επενεργούν ταυτόχρονα ομόρροπες δυνάμεις $F_1 = 4\text{N}$ και $F_2 = 15\text{N}$ αντίστοιχα όπως φαίνεται στην εικόνα.



A. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση κάθε σώματος.

B. Μετά από πόσο χρόνο το μάζας m_2 σώμα θα προηγείται του άλλου κατά 18m;

Απάντηση:

A.

Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για κάθε σώμα:

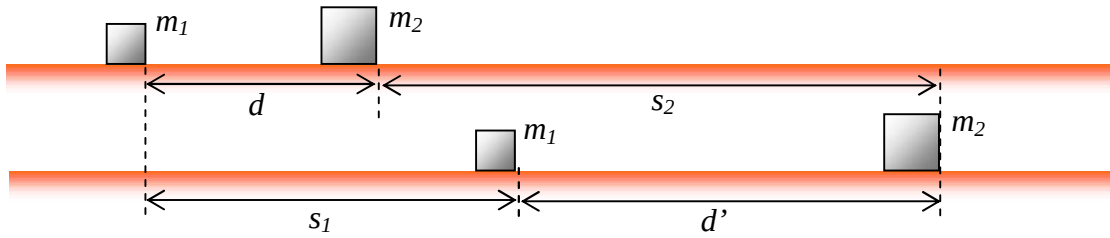
$$F_1 = m_1 \cdot a_1 \Leftrightarrow a_1 = \frac{F_1}{m_1} \Leftrightarrow a_1 = \frac{4\text{N}}{1\text{Kg}} \Leftrightarrow a_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$F_2 = m_2 \cdot a_2 \Leftrightarrow a_2 = \frac{F_2}{m_2} \Leftrightarrow a_2 = \frac{15\text{N}}{3\text{Kg}} \Leftrightarrow a_2 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

B.

Στο χρόνο t που μας ενδιαφέρει, τα σώματα διανύουν:

$$\text{το } m_1 : \quad s_1 = \frac{1}{2} a_1 \cdot t^2 \quad \text{το } m_2 : \quad s_2 = \frac{1}{2} a_2 \cdot t^2.$$



Επειδή η αρχική απόσταση $d = 10\text{m}$ έγινε $d' = 18\text{m}$ το σώμα που προπορεύεται (το m_2) διάνυσε $d' - d = 18\text{m} - 10\text{m} = 8\text{m}$ παραπάνω από το m_1 .

Άρα:

$$s_2 - s_1 = d' - d \Leftrightarrow \frac{1}{2}a_2 \cdot t^2 - \frac{1}{2}a_1 \cdot t^2 = d' - d \Leftrightarrow a_2 \cdot t^2 - a_1 \cdot t^2 = 2d' - 2d \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a_2 - a_1) \cdot t^2 = 2(d' - d) \Leftrightarrow t^2 = \frac{2(d' - d)}{a_2 - a_1} \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2(d' - d)}{a_2 - a_1}}$$

$$\text{Άρα: } t = \sqrt{\frac{2(18\text{m} - 10\text{m})}{5\text{m/s}^2 - 4\text{m/s}^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8}{1}} \text{ s} = \sqrt{16} \text{ s} = 4 \text{ s}$$

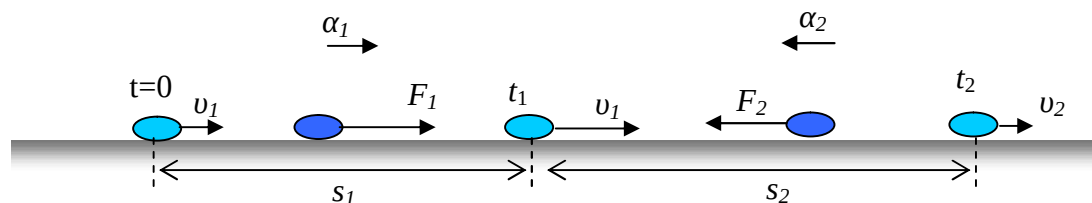
- 12.** Σώμα μάζας $m = 20\text{kg}$ αρχικά ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζει να ενεργεί στο σώμα σταθερή οριζόντια δύναμη $F_1 = 20\text{N}$. Μετά από λίγο χρόνο καταργείται η δύναμη F_1 και την ίδια στιγμή αρχίζει να ενεργεί πάνω στο σώμα αντίρροπη δύναμη σταθερής τιμής $F_2 = 5\text{N}$ και το σώμα σταματά αφού διανύσει συνολικά διάστημα 40m .

Να υπολογίσετε:

- A. Σε ποιο σημείο της διαδρομής άρχισε να ενεργεί η δύναμη F_2 ;
B. Πόση είναι η διάρκεια της κίνησης του σώματος, από τη στιγμή που ξεκίνησε μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά του;

Απάντηση:

A.



Υπό την επίδραση της δύναμης F_1 το σώμα αποκτά επιτάχυνση a_1 .

$$\text{για τα μέτρα: } F_1 = m \cdot a_1 \Leftrightarrow a_1 = \frac{F_1}{m} \Leftrightarrow a_1 = \frac{20\text{N}}{20\text{kg}} \Leftrightarrow a_1 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Έστω η δύναμη καταργείται την στιγμή t_1 . Από 0 έως t_1 το σώμα κάνει ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα.

Άρα την στιγμή t_1 θα έχει αποκτήσει ταχύτητα v_1 και θα έχει διανύσει διάστημα s_1

$$v_1 = a_1 \cdot t_1 \quad (1)$$

$$s_1 = \frac{1}{2}a_1 \cdot t_1^2 = \frac{a_1 \cdot t_1^2}{2} \quad (2)$$

Μετά την χρονική στιγμή t_1 και μέχρι να σταματήσει (έστω την χρονική στιγμή t_2) κάνει ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση a_2 και αρχική ταχύτητα u_1 .

για τα μέτρα: $F_2 = m \cdot a_2 \Leftrightarrow a_2 = \frac{F_2}{m} \Leftrightarrow a_2 = \frac{5 \text{ N}}{20 \text{ kg}} \Leftrightarrow a_2 = 0,25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Έτσι το διάστημα που διανύει μέχρι να σταματήσει δίνεται από τον τύπο:

$$s_2 = \frac{u_1^2}{2 \cdot a_2} \stackrel{(*)}{=} \frac{(a_1 \cdot t_1)^2}{2 \cdot a_2} = \frac{a_1^2 \cdot t_1^2}{2 \cdot a_2}$$

Όμως :

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 &= s_{01} \Leftrightarrow \frac{a_1 \cdot t_1^2}{2} + \frac{a_1^2 \cdot t_1^2}{2 \cdot a_2} = s_{01} \Leftrightarrow \frac{1 \cdot t_1^2}{2} + \frac{1^2 \cdot t_1^2}{2 \cdot 0,25} = 40 \Leftrightarrow \frac{t_1^2}{2} + \frac{t_1^2}{0,5} = 40 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cancel{\frac{t_1^2}{2}} + \cancel{\frac{4 \cdot t_1^2}{0,5}} \Leftrightarrow t_1^2 = 2 \cdot 40 \Leftrightarrow t_1^2 + 4t_1^2 = 80 \Leftrightarrow 5t_1^2 = 80 \Leftrightarrow t_1^2 = \frac{80}{5} \Leftrightarrow t_1^2 = 16 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t_1 = \sqrt{16} \Leftrightarrow t_1 = 4 \text{ s} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην (2):

$$(2) \Rightarrow s_1 = \frac{a_1 \cdot t_1^2}{2} = \frac{1 \text{ m/s}^2 \cdot (4 \text{ s})^2}{2} = \frac{16}{2} \text{ m} = 8 \text{ m}$$

Άρα η F_2 αρχίζει να ασκείται σε απόσταση **8 m** από την αρχική θέση.

B.

Η χρονική διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησης είναι:

$$\Delta t_2 = \frac{u_1}{a_2} = \frac{a_1 \cdot t_1}{a_2} = \frac{1 \text{ m/s}^2 \cdot 4 \text{ s}}{0,25 \text{ m/s}^2} = 16 \text{ s}$$

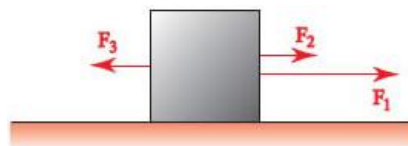
Άρα η συνολική χρονική διάρκεια της κίνησης είναι :

$$\Delta t_{01} = \Delta t_1 + \Delta t_2 = t_1 + \Delta t_2 = 4 \text{ s} + 16 \text{ s} = \mathbf{20 \text{ s}}$$

- 13.** Στο σώμα της εικόνας ασκούνται οι δυνάμεις $F_1 = 6 \text{ N}$, $F_2 = 2 \text{ N}$ και F_3 . Το σώμα αρχικά ηρεμεί και σε χρόνο 4s διανύει διάστημα 24 m. Αν είναι γνωστό ότι η μάζα του σώματος είναι $m = 1 \text{ kg}$ και ότι το δάπεδο είναι λείο, να υπολογιστούν:

A. Η επιτάχυνση του σώματος.

B. Η τιμή της δύναμης F_3 .



Απάντηση:

A.

Το σώμα μετά την άσκηση των δυνάμεων θα κάνει ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα.

Επειδή όπως φαίνεται από το σχήμα, οι δυνάμεις προς τα δεξιά είναι μεγαλύτερες από την δύναμη προς τα αριστερά, η συνισταμένη θα είναι προς τα δεξιά, άρα και η επιτάχυνση a θα είναι προς τα δεξιά.

Από τον τύπο του διαστήματος :

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Leftrightarrow 2 \cdot s = a \cdot t^2 \Leftrightarrow a = \frac{2 \cdot s}{t^2} \Leftrightarrow a = \frac{2 \cdot 24 \text{ m}}{(4 \text{ s})^2} \Leftrightarrow a = \frac{48 \text{ m}}{16 \text{ s}^2} \Leftrightarrow a = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

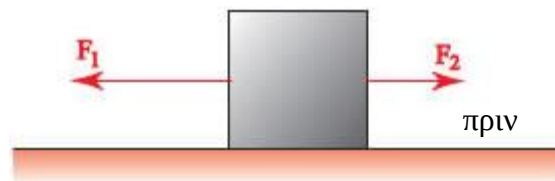
B.

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής:

$$F_{01} = m \cdot a \Leftrightarrow F_1 + F_2 - F_3 = m \cdot a \Leftrightarrow F_1 + F_2 - m \cdot a = F_3$$

$$\text{Άρα: } F_3 = 6 \text{ N} + 2 \text{ N} - 1 \text{ kg} \cdot 3 \text{ m/s}^2 = 5 \text{ N}$$

14. Στο σώμα που φαίνεται στην εικόνα, ασκούνται οι δυνάμεις F_1 και F_2 . Όταν οι τιμές των δυνάμεων αυτών είναι: $F_1 = 40 \text{ N}$ και $F_2 = 20 \text{ N}$, το σώμα αποκτά επιτάχυνση $a = 0,3 \text{ m/s}^2$. Ποια επιτάχυνση θα έχει το σώμα όταν είναι: $F_1 = 40 \text{ N}$ και $F_2 = 0$;



Απάντηση:

$$\text{Πριν: } F_{01} = m \cdot a \Leftrightarrow F_1 - F_2 = m \cdot a \quad (1)$$

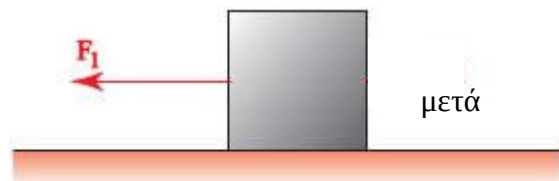
$$\text{Μετά: } F'_{01} = m \cdot a' \Leftrightarrow F_1 = m \cdot a' \quad (2)$$

Διαιρώντας τις (1) και (2) κατά μέλη :

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{F_1 - F_2}{F_1} = \frac{a}{a'} \Leftrightarrow (F_1 - F_2) a' = F_1 \cdot a \Leftrightarrow a' = \frac{F_1 \cdot a}{F_1 - F_2}$$

Άρα:

$$a' = \frac{40 \text{ N} \cdot 0,3 \text{ m/s}^2}{40 \text{ N} - 20 \text{ N}} = \frac{40 \text{ N} \cdot 0,3 \text{ m/s}^2}{20 \text{ N}} = 2 \cdot 0,3 \text{ m/s}^2 = 0,6 \text{ m/s}^2$$



15. Μία μπάλα αφήνεται να πέσει από την ταράτσα μιας πολυκατοικίας που έχει ύψος $h = 20 \text{ m}$. Πόσο χρόνο θα χρειαστεί η μπάλα για να φτάσει στο έδαφος; Δίνεται ότι $g = 10 \text{ m/s}^2$.

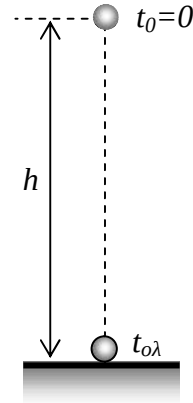
Απάντηση:

Στο χρονικό διάστημα της πτώσης (από 0 s έως $t_{0\lambda}$) η μπάλα διανύει διάστημα ίσο με το ύψος h από το οποίο αφέθηκε.

Άρα, αντικαθιστώντας στον τύπο του διαστήματος $s = \frac{1}{2} g \cdot t^2$ θα έχουμε:

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t_{01}^2 \Leftrightarrow 2 \cdot h = g \cdot t_{01}^2 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot h}{g} = t_{01}^2 \Leftrightarrow t_{01} = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$$

$$\text{Οπότε: } t_{01} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \text{ m}}{10 \text{ m/s}^2}} = \sqrt{4} \text{ s} = 2 \text{ s}$$

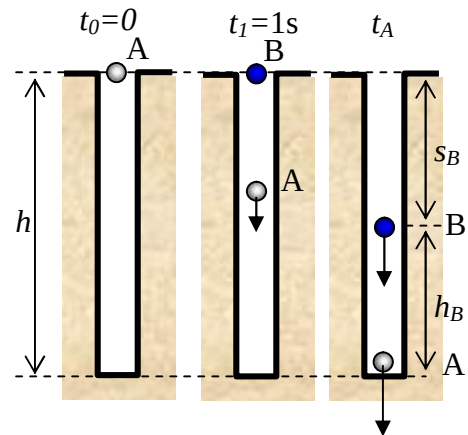


- *16.** Ένα πηγάδι έχει βάθος 180m. Από το χείλος του πηγαδιού αφήνουμε να πέσει ελεύθερα ένα σώμα Α και μετά από ένα δευτερόλεπτο αφήνουμε να πέσει ελεύθερα ένα άλλο σώμα Β.
Αν η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι 10 m/s^2 , πόση θα 'ναι η απόσταση του σώματος Β από τον πυθμένα του πηγαδιού όταν σ' αυτόν θα φτάσει το σώμα Α;

Απάντηση:

Έστω $t_0 = 0$ η χρονική στιγμή που αφήσαμε το σώμα Α και t_A η στιγμή που το Α φτάνει στον πάτο του πηγαδιού. Τότε έχει διανύσει διάστημα ίσο με το βάθος του πηγαδιού h .

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \stackrel{s=h}{\stackrel{t=t_A}{\Rightarrow}} h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_A^2 \Leftrightarrow 2 \cdot h = g \cdot t_A^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2 \cdot h}{g} &= t_A^2 \Leftrightarrow t_A = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \Leftrightarrow t_A = \sqrt{\frac{2 \cdot 180 \text{ m}}{10 \text{ m/s}^2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t_A &= \sqrt{36} \text{ s} \Leftrightarrow t_A = 6 \text{ s} \end{aligned}$$



Την στιγμή t_A που το Α φτάνει στον πάτο, το σώμα Β πέφτει από την στιγμή $t_1 = 1 \text{ s}$ έως την $t_A = 6 \text{ s}$, δηλαδή για χρονικό διάστημα $\Delta t_B = t_A - t_1 = 6 \text{ s} - 1 \text{ s} = 5 \text{ s}$.

Άρα έχει διανύσει :

$$s_B = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \Delta t_B^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot (5 \text{ s})^2 = 125 \text{ m}$$

$$\text{Άρα απέχει από τον πάτο: } h_B = h - s_B = 180 \text{ m} - 125 \text{ m} = 55 \text{ m}$$

- *17.** Ένα αυτοκίνητο έχει μάζα $m = 4.000 \text{ kg}$ και κινείται σ' έναν ευθύγραμμο δρόμο με σταθερή ταχύτητα u_0 . Ξαφνικά ο οδηγός φρενάρει αναπτύσσοντας με σταθερή επιβραδύνουσα δύναμη $F = 2 \cdot 10^4 \text{ N}$ και ακινητοποιεί το αυτοκίνητο μετά από διαδρομή $s = 40 \text{ m}$.

Α. Να βρείτε την ταχύτητα u_0 του αυτοκινήτου.

Β. Να υπολογίσετε τη χρονική διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησης.

Γ. Να κατασκευάσετε το διάγραμμα $u = f(t)$

Απάντηση:

Α.

Η σταθερή επιβραδύνουσα δύναμη δημιουργεί σταθερή επιβράδυνση $\vec{a}$

Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής (για τα μέτρα):

$$F = m \cdot a \Leftrightarrow a = \frac{F}{m} \Leftrightarrow a = \frac{2 \cdot 10^4 \text{ N}}{4000 \text{ kg}} \Leftrightarrow a = \frac{20000 \text{ N}}{4000 \text{ kg}} \Leftrightarrow a = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Από τον τύπο του ολικού διαστήματος στην επιβραδυνόμενη έχουμε:

$$s = \frac{u_0^2}{2a} \Leftrightarrow 2as = u_0^2 \Leftrightarrow u_0 = \sqrt{2as} \Leftrightarrow u_0 = \sqrt{2 \cdot 5 \text{ m/s}^2 \cdot 40 \text{ m}} \Leftrightarrow u_0 = \sqrt{400} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Leftrightarrow u_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

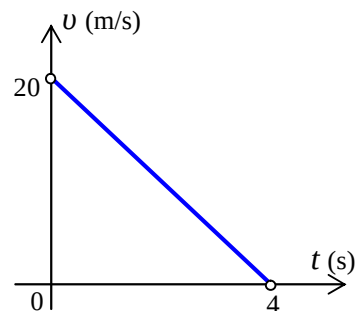
Β.

Από τον τύπο του ολικού χρόνου στην επιβραδυνόμενη:

$$t_{01} = \frac{u_0}{a} = \frac{20 \text{ m/s}}{5 \text{ m/s}^2} = 4 \text{ s}$$

Γ.

$t \text{ (s)}$	$v \text{ (m/s)}$
0	20
4	0



- *18.** Από ένα σημείο που βρίσκεται σε ύψος $h = 45 \text{ m}$ αφήνουμε να πέσει ένα σώμα και ένα δευτερόλεπτο αργότερα ρίχνουμε από το ίδιο σημείο δεύτερο σώμα με αρχική ταχύτητα u_0 τέτοια, ώστε τα δύο σώματα να φτάσουν στο έδαφος ταυτόχρονα.

Α. Να βρείτε την ταχύτητα u_0 και το χρόνο που χρειάζεται το δεύτερο σώμα για να φτάσει στο έδαφος.

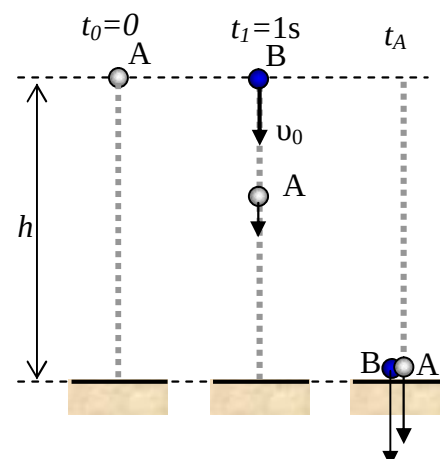
Β. Να κάνετε τα διαγράμματα $v = f(t)$ και $s = f(t)$ για το πρώτο σώμα.

Δίνεται ότι $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Απάντηση:

Έστω $t_0 = 0$ η χρονική στιγμή που αφήσαμε το σώμα Α και t_A η στιγμή που το Α φτάνει στον πάτο του πηγαδιού. Τότε έχει διανύσει διάστημα ίσο με το βάθος του πηγαδιού h .

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \xrightarrow[t=t_A]{s=h} h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_A^2 \Leftrightarrow 2 \cdot h = g \cdot t_A^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2 \cdot h}{g} &= t_A^2 \Leftrightarrow t_A = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \Leftrightarrow t_A = \sqrt{\frac{2 \cdot 45 \text{ m}}{10 \text{ m/s}^2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t_A &= \sqrt{9} \text{ s} \Leftrightarrow t_A = 3 \text{ s} \end{aligned}$$



Την στιγμή t_A που το Α φτάνει στον πάτο, φτάνει και το Β άρα και αυτό έχει διανύσει διάστημα ίσο με το βάθος του πηγαδιού h από την στιγμή $t_1 = 1 \text{ s}$ έως την $t_A = 3 \text{ s}$, δηλαδή σε χρονικό διάστημα $\Delta t_B = t_A - t_1 = 3 \text{ s} - 1 \text{ s} = 2 \text{ s}$.

$$h = u_0 \cdot \Delta t_B + \frac{1}{2} \cdot g \cdot \Delta t_B^2 \stackrel{(S.I.)}{\Leftrightarrow} 45 = u_0 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^2 \Leftrightarrow 45 = 2u_0 + 20 \Leftrightarrow 2u_0 = 45 - 20 \Leftrightarrow$$

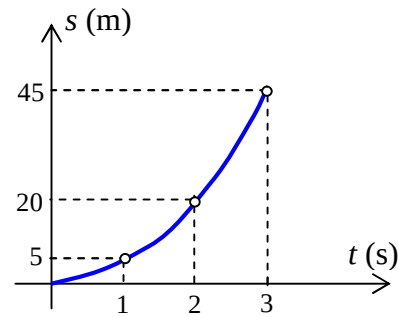
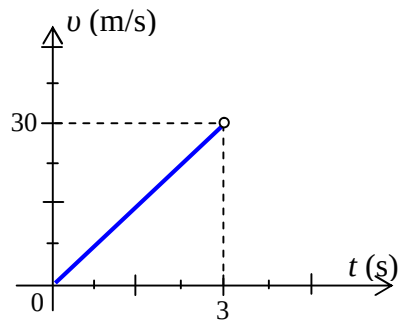
$$\Leftrightarrow 2u_0 = 25 \Leftrightarrow u_0 = \frac{25}{2} \Leftrightarrow u_0 = 12,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

B.

Για το σώμα Α:

$$u_A = g \cdot t \Leftrightarrow u_A = 10 \cdot t \quad (\text{S.I.})$$

$$s_A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Leftrightarrow s_A = 5 \cdot t^2 \quad (\text{S.I.})$$



1.3

Δυναμική στο επίπεδο

(Λύσεις των ασκήσεων του σχολικού βιβλίου)

Επιμέλεια: Άγης Παπαδάτος –Φυσικός

1. Έστω μια δύναμη $F = 10\text{N}$. Να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες F_1 και F_2 , που είναι κάθετες μεταξύ τους και έχουν ίσες τιμές.

Απάντηση:

α' τρόπος

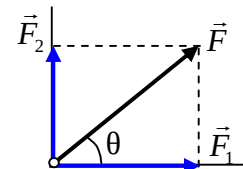
Θα βρούμε πρώτα την διεύθυνση που θα σχηματίζει η $\vec{F}_1$ με την $\vec{F}$:

$$\text{ef}\varphi = \frac{F_2}{F_1} = \frac{F_1}{F_1} = 1 \Rightarrow \boxed{\varphi = 45^\circ}$$

Τότε:

$$F_1 = F \cdot \sin\varphi = 10\text{N} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{5\sqrt{2}\text{N}}$$

$$F_2 = F \cdot \cos\varphi = 10\text{N} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{5\sqrt{2}\text{N}} \quad (\text{ή} \quad F_2 = F_1 = 5\sqrt{2}\text{N})$$



β' τρόπος

Η $\vec{F}$ είναι η συνισταμένη των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$. Για τα μέτρα τους θα ισχύει (από το πυθαγόρειο θεώρημα):

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \stackrel{F_1=F_2}{\Leftrightarrow} F = \sqrt{F_1^2 + F_1^2} \Leftrightarrow F = \sqrt{2F_1^2} \Leftrightarrow F = F_1\sqrt{2} \Leftrightarrow F_1 = \frac{F}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_1 = \frac{F\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow F_1 = \frac{10\text{N} \cdot \sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow F_1 = 5\sqrt{2}\text{N}$$

Τότε:

$$\boxed{F_2 = F_1 = 5\sqrt{2}\text{N}}$$

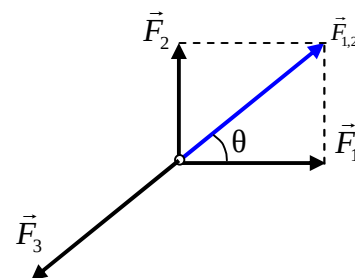
$$\text{ef}\varphi = \frac{F_2}{F_1} = \frac{F_1}{F_1} = 1 \Rightarrow \boxed{\varphi = 45^\circ}$$

2. Δύο δυνάμεις $F_1 = 4\text{N}$ και $F_2 = 5\text{N}$ ασκούνται στο ίδιο σώμα και είναι κάθετες μεταξύ τους. Να βρεθεί η δύναμη F_3 που πρέπει να ασκηθεί στο σώμα, ώστε αυτό να ισορροπεί.

Απάντηση:

Για να ισορροπούν τρεις δυνάμεις πρέπει η μια (η $\vec{F}_3$) να είναι αντίθετη της συνισταμένης των δύο άλλων. Έστω $\vec{F}_{1,2}$ η συνισταμένη των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.

$$F_{1,2} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{(4\text{N})^2 + (5\text{N})^2} = \sqrt{16 + 25} \text{ N} = \sqrt{41} \text{ N}$$



$$\text{efq} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{5\text{N}}{4\text{N}} = \frac{5}{4}$$

Άρα: $F_3 = F_{1,2} = \sqrt{41}\text{ N}$ με κατεύθυνση αντίθετη (βλ. σχήμα)

3. Στο ίδιο σημείο ενός σώματος μάζας 1kg ασκούνται δύο κάθετες μεταξύ τους δυνάμεις $F_1 = 6\text{N}$ και $F_2 = 8\text{N}$.
Να προσδιορίσετε την επιτάχυνση που αποκτά το σώμα (μέτρο και κατεύθυνση).

Απάντηση:

Έστω $\vec{F}_{01}$ η συνισταμένη των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.

Για τα μέτρα :

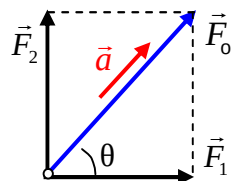
$$F_{01} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{(6\text{N})^2 + (8\text{N})^2} = \sqrt{36 + 64}\text{ N} = \sqrt{100}\text{ N} = 10\text{ N}$$

Για την διεύθυνση:

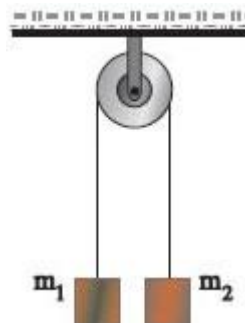
$$\text{efq} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{8\text{N}}{6\text{N}} = \frac{4}{3}$$

Από θεμελιώδη νόμο της μηχανικής, η επιτάχυνση που αποκτά το σώμα έχει την κατεύθυνση της συνισταμένης δύναμης και μέτρο a :

$$F_{01} = m \cdot a \Leftrightarrow a = \frac{F_{01}}{m} \Leftrightarrow a = \frac{10\text{N}}{1\text{kg}} \Leftrightarrow a = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



6. Τα σώματα που φαίνονται στην εικόνα έχουν μάζες $m_1 = 3\text{kg}$ και $m_2 = 1\text{kg}$. Το σύστημα αφήνεται ελεύθερο από την ηρεμία.
Α. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που δέχεται κάθε σώμα και να εφαρμόσετε για το καθένα το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής.
Β. Να υπολογιστεί η επιτάχυνση του κάθε σώματος.
Γ. Να υπολογιστεί η τάση του νήματος.
Να θεωρήσετε ότι και τα δύο σώματα δέχονται την ίδια τάση και ότι το $g=10\text{m/s}^2$.

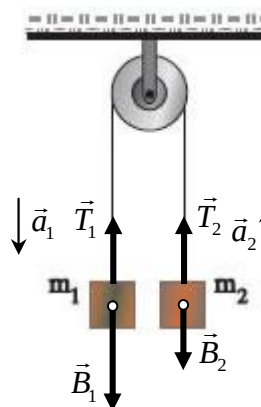


Απάντηση:

Α.

Όταν το σύστημα αφεθεί ελεύθερο, το σώμα m_1 θα επιταχυνθεί προς τα κάτω με επιτάχυνση $\vec{a}_1$, ενώ το σώμα m_2 θα επιταχυνθεί προς τα πάνω με επιτάχυνση $\vec{a}_2$, αφού $B_1 > B_2$.

Επειδή τα διαστήματα που διανύονται από τα δύο σώματα στον ίδιο χρόνο είναι ίσα, κάθε στιγμή τα σώματα έχουν ταχύτητες ίσου μέτρου, άρα αυτές θα μεταβάλλονται με τον ίδιο ρυθμό. Δηλαδή τα σώματα θα έχουν και επιταχύνσεις ίσου μέτρου:



$$a_1 = a_2 = a$$

Επίσης δίνεται ότι οι τάσεις του νήματος στα δύο σώματα είναι ίσου μέτρου:

$$T_1 = T_2 = T$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για κάθε σώμα:

$$\Sigma F_1 = m_1 \cdot a_1 \Leftrightarrow B_1 - T_1 = m_1 \cdot a_1 \Leftrightarrow m_1 \cdot g - T = m_1 \cdot a \quad (1)$$

Επειδή το σώμα m_1 επιταχύνεται προς τα κάτω $B_1 > T_1$

$$\Sigma F_2 = m_2 \cdot a_2 \Leftrightarrow T_2 - B_2 = m_2 \cdot a_2 \Leftrightarrow T - m_2 \cdot g = m_2 \cdot a \quad (2)$$

Επειδή το σώμα m_2 επιταχύνεται προς τα πάνω $T_2 > B_2$

B.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) :

$$(1) + (2) \Rightarrow m_1 \cdot g - \cancel{T} + \cancel{T} - m_2 \cdot g = m_1 \cdot a + m_2 \cdot a \Leftrightarrow (m_1 - m_2) \cdot g = (m_1 + m_2) \cdot a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{(m_1 - m_2) \cdot g}{m_1 + m_2} \Leftrightarrow a = \frac{(3\text{kg} - 1\text{kg}) \cdot 10\text{m/s}^2}{3\text{kg} + 1\text{kg}} \Leftrightarrow a = \frac{2 \cdot 10}{4} \text{m/s}^2 \Leftrightarrow a = 5 \text{m/s}^2$$

Γ.

$$(2) \Rightarrow T = m_2 \cdot g + m_2 \cdot a = 1\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2 + 1\text{kg} \cdot 5\text{m/s}^2 = 15 \text{N}$$

7. Ένα σώμα αφήνεται να γλιστρήσει από την κορυφή λείου κεκλιμένου επιπέδου, γωνίας κλίσης $\varphi=30^\circ$.

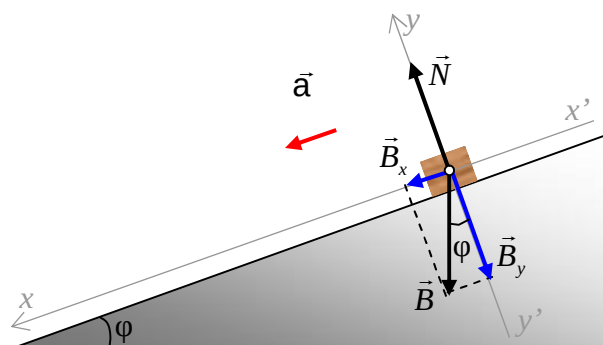
A. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που δέχεται το σώμα και να εφαρμόσετε το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για την περίπτωση αυτή.

B. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση με την οποία θα κινηθεί το σώμα.

Απάντηση:

A.

Στις περιπτώσεις κίνησης υπό την επίδραση δυνάμεων μελετάμε την κίνηση σε δύο άξονες: τον άξονα της κίνησης $x'x$ και τον κάθετο σε αυτόν $y'y$.



Για την ανάλυση του βάρους:

$$B_x = B \cdot \sin \varphi \quad B_y = B \cdot \cos \varphi$$

B.

Στον άξονα της κίνησης $x'x$ (για τα μέτρα):

$$\Sigma F_x = m \cdot a \Leftrightarrow B_x = m \cdot a \Leftrightarrow B \cdot \sin \varphi = m \cdot a \Leftrightarrow \cancel{m} \cdot g \cdot \sin \varphi = \cancel{m} \cdot a \Leftrightarrow a = g \cdot \sin \varphi$$

Άρα :

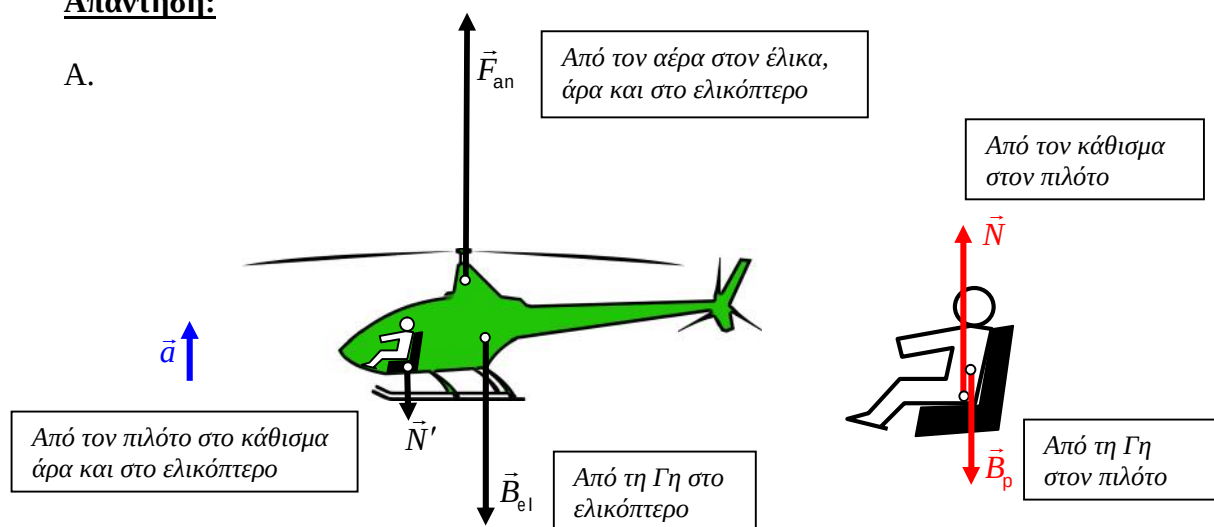
$$a = g \cdot \sin 30^\circ = g \cdot \frac{1}{2} = \frac{g}{2}$$

Στον y επειδή το σώμα δεν κινείται στην διεύθυνσή του : $\Sigma F_y = 0$ από την οποία σχέση υπολογίζεται η δύναμη στήριξης $\vec{N}$.

- *8.** Ελικόπτερο έχει μάζα $M = 1.920\text{kg}$ και ο πιλότος μάζα $m = 80\text{kg}$. Το σύστημα ανυψώνεται κατακόρυφα με επιτάχυνση 2m/s^2 .
 Α. Να σχεδιαστούν οι δυνάμεις που δέχονται ο πιλότος και το ελικόπτερο.
 Β. Να υπολογιστεί η ανυψωτική δύναμη που ασκείται στο ελικόπτερο.
 Γ. Να υπολογιστεί η δύναμη που δέχεται ο πιλότος από το κάθισμα.
 Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

A.



Οι δυνάμεις $\vec{N}$ και $\vec{N}'$ είναι δυνάμεις αλληλεπίδρασης (εσωτερικές στο σύστημα ελικόπτερο-πιλότος) και είναι αντίθετες σύμφωνα με τον 3^ο Νόμο του Νεύτωνα.

$$\vec{N} = -\vec{N}' \quad \text{και για τα μέτρα: } N = N'$$

B.

Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής :

για το ελικόπτερο:

$$\Sigma F_{el} = M \cdot a \Leftrightarrow F_{an} - B_{el} - N' = M \cdot a \Leftrightarrow F_{an} - M \cdot g - N' = M \cdot a \quad (1)$$

για τον πιλότο:

$$\Sigma F_p = m \cdot a \Leftrightarrow N - B_{el} = m \cdot a \Leftrightarrow N - m \cdot g = m \cdot a \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2):

$$(1) + (2) \Rightarrow F_{an} - M \cdot g - N' + N - m \cdot g = M \cdot a + m \cdot a \Leftrightarrow F_{an} - (M + m) \cdot g = (M + m) \cdot a$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να προκύψει και απευθείας, αν εφαρμόζαμε τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για το σύστημα ελικόπτερο-πιλότος θεωρώντας το ως ενιαίο σώμα μάζας $M+m$. Τότε οι μεταξύ τους (εσωτερικές) δυνάμεις $\vec{N}$ και $\vec{N}'$ δεν θα εμφανίζονταν στη σχέση αφού συνολικά αλληλοεξουδετερώνονται.

Συνεχίζοντας....

$$F_{an} = (M + m) \cdot g + (M + m) \cdot a = 2000\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2 + 2000\text{kg} \cdot 2\text{m/s}^2 = 24000 \text{ N}$$

Γ.

$$(2) \Rightarrow N = m \cdot g + m \cdot a = 80\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2 + 80\text{kg} \cdot 2\text{m/s}^2 = 800\text{N} + 160\text{N} = 960 \text{ N}$$

***9.** Ένα κιβώτιο μάζας 5kg ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο και δέχεται οριζόντια δύναμη $F = 30\text{N}$. Μετά από 10m έχει αποκτήσει ταχύτητα 10m/s.

Α. Να υπολογιστεί η τιμή της επιτάχυνσης του σώματος.

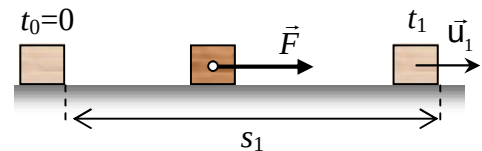
Β. Να δικαιολογήσετε γιατί υπάρχει δύναμη τριβής και να υπολογίσετε την τιμή της.

Γ. Να υπολογίσετε την τιμή του συντελεστή της τριβής ολίσθησης.

Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

Α. Το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα. Την στιγμή t_1 έχει διανύσει διάστημα $s_1 = 10 \text{ m}$ και έχει αποκτήσει ταχύτητα $u_1 = 10 \text{ m/s}$



$$u_1 = a \cdot t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{u_1}{a}$$

$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \Leftrightarrow s_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{u_1}{a}\right)^2 \Leftrightarrow s_1 = \frac{1}{2} \cdot \cancel{a} \cdot \frac{u_1^2}{\cancel{a}^2} \Leftrightarrow s_1 = \frac{u_1^2}{2a} \Leftrightarrow 2as_1 = u_1^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{2}a\cancel{s_1}}{\cancel{2}s_1} = \frac{u_1^2}{2s_1} \Leftrightarrow a = \frac{u_1^2}{2s_1} \Leftrightarrow a = \frac{(10\text{m/s})^2}{2 \cdot 10\text{m}} \Leftrightarrow a = \frac{100 \text{ m}}{20 \text{ s}^2} \Leftrightarrow a = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

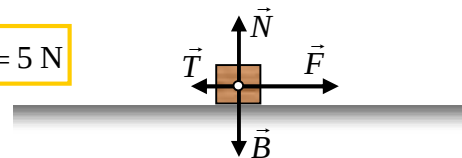
Β.

Από τον Θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής

$$\Sigma F_x = m \cdot a = 5\text{kg} \cdot 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 25 \text{ N}$$

Άρα, αφού $\Sigma F_x < F$, στον οριζόντιο άξονα δεν ασκείται μόνο η δύναμη $\vec{F}$ αλλά και μια αντίρροπη δύναμη, προφανώς τριβή $\vec{T}$. Ισχύει:

$$\Sigma F_x = F - T \Leftrightarrow T = F - \Sigma F_x \Leftrightarrow T = 30\text{N} - 25\text{N} \Leftrightarrow T = 5 \text{ N}$$



Γ.

Στον $y'y$ ισχύει:

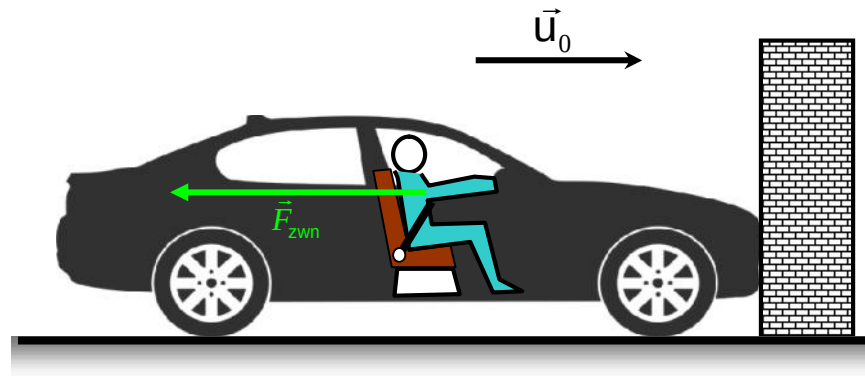
$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N - B = 0 \Leftrightarrow N = B \Leftrightarrow N = m \cdot g \Leftrightarrow N = 5\text{Kg} \cdot 10\text{m/s}^2 \Leftrightarrow N = 50 \text{ N}$$

Όμως: $T = m \cdot N \Leftrightarrow m = \frac{T}{N} \Leftrightarrow m = \frac{5\text{N}}{50\text{N}} \Leftrightarrow m = 0,1$

10. Ο οδηγός ενός αυτοκινήτου έχει μάζα 60kg και φορά τη ζώνη ασφαλείας. Το αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 30m/s πριν χτυπήσει σε τοίχο. Η ζώνη ασφαλείας επιτρέπει στον οδηγό να κινηθεί προς τα εμπρός, σε σχέση με την αρχική του θέση στο κάθισμα κατά 0,2m. Να υπολογίσετε:
 Α. Την επιβράδυνση του οδηγού.
 Β. Τη δύναμη που δέχεται από τη ζώνη ασφαλείας.

Απάντηση:

Α.



Ο οδηγός κάνει ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση $\vec{a}$ και το ολικό διάστημα που διανύει είναι $s_{01} = 0,2\text{m}$

$$s_{01} = \frac{u_0^2}{2a} \Leftrightarrow 2as_{01} = u_0^2 \Leftrightarrow a = \frac{u_0^2}{2s_{01}} \Leftrightarrow a = \frac{(30\text{m/s})^2}{2 \cdot 0,2\text{m}} \Leftrightarrow a = \frac{900}{0,4} \text{m/s}^2 \Leftrightarrow a = 2250 \text{m/s}^2$$

Β.

Άρα για το μέτρο της συνισταμένης δύναμης στον άξονα $x'x$ (η οποία θα έχει κατεύθυνση ίδια με της επιβράδυνσης δηλαδή αντίθετη της ταχύτητας) ισχύει:

$$\Sigma F_x = m \cdot a = 60\text{kg} \cdot 2250 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 135000 \text{ N}$$

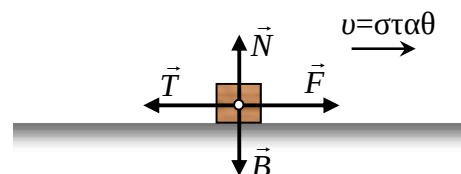
Η παραπάνω δύναμη προφανώς δημιουργείται από την ζώνη άρα: $F_{\text{zwn}} = 135000 \text{ N}$

11. Μια φορητή ντουλάπα έχει συνολικό βάρος 250N και μετακινείται με σταθερή ταχύτητα, όταν ασκείται σ' αυτή οριζόντια δύναμη 120N.
 Α. Να υπολογίσετε τον συντελεστή τριβής μεταξύ πατώματος και ντουλάπας.
 Β. Αν αδειάσουμε την ντουλάπα ώστε να μειωθεί το βάρος της στα 160N, πόση οριζόντια δύναμη πρέπει να ασκήσουμε για να κινηθεί με σταθερή ταχύτητα;

Απάντηση:

Α.

Αφού η ντουλάπα κινείται με σταθερή ταχύτητα, σύμφωνα με τον 1^ο Νόμο του Νεύτωνα η συνισταμένη δύναμη στον οριζόντιο άξονα $x'x$ είναι μηδέν.



$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F - T = 0 \Leftrightarrow T = F \Leftrightarrow T = 120 \text{ N}$$

Στον κατακόρυφο άξονα $y'y$ η συνισταμένη είναι έτσι κι αλλιώς μηδέν αφού η ντουλάπα είναι ακίνητη σε αυτήν την διεύθυνση (1^{ος} Νόμος του Νεύτωνα).

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N - B = 0 \Leftrightarrow N = B \Leftrightarrow N = 250 \text{ N}$$

$$\text{Άρα: } T = m \cdot N \Leftrightarrow m = \frac{T}{N} \Leftrightarrow m = \frac{120 \text{ N}}{250 \text{ N}} \Leftrightarrow m = 0,48$$

B.

Ακολουθώντας ανάλογο συλλογισμό:

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N' - B' = 0 \Leftrightarrow N' = B' \Leftrightarrow N' = 160 \text{ N}$$

Άρα:

$$T' = m \cdot N' = 0,48 \cdot 160 \text{ N} = 76,8 \text{ N}$$

Οπότε επειδή η ντουλάπα κινείται με σταθερή ταχύτητα:

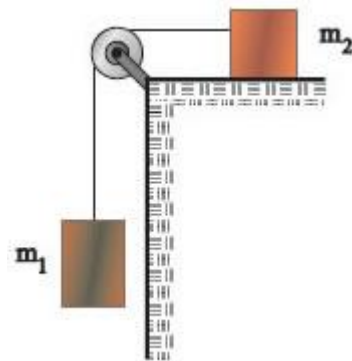
$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F' - T' = 0 \Leftrightarrow F' = T' \Leftrightarrow F' = 76,8 \text{ N}$$

- *12.** Τα σώματα της εικόνας έχουν μάζες $m_1 = 8 \text{ kg}$ και $m_2 = 12 \text{ kg}$. Ο συντελεστής τριβής του σώματος μάζας m_2 με το δάπεδο είναι 0,25. Το σύστημα αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί.

A. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που δέχεται κάθε σώμα.

B. Να εφαρμόσετε το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για κάθε σώμα.

Γ. Να υπολογίσετε την τιμή της επιτάχυνσης με την οποία κινείται κάθε σώμα. Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Απάντηση:

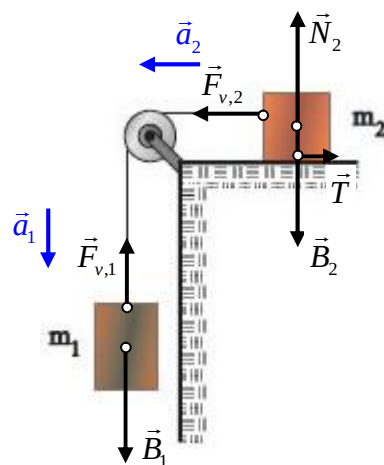
A.

Θεωρούμε το νήμα αβαρές οπότε θα ασκεί τάσεις ίσου μέτρου στα δύο σώματα:

$$F_{n,1} = F_{n,2} = F_n$$

Επειδή τα διαστήματα που διανύονται από τα δύο σώματα στον ίδιο χρόνο είναι ίσα, κάθε στιγμή τα σώματα έχουν ταχύτητες ίσου μέτρου, άρα αυτές θα μεταβάλλονται με τον ίδιο ρυθμό. Δηλαδή τα σώματα θα έχουν και επιταχύνσεις ίσου μέτρου:

$$a_1 = a_2 = a$$



B.

$$\text{Για το } m_1: \quad \Sigma F_1 = m_1 \cdot a_1 \Leftrightarrow B_1 - F_{n,1} = m_1 \cdot a_1 \Leftrightarrow m_1 \cdot g - F_n = m_1 \cdot a \quad (1)$$

Για το m_2 : $\Sigma F_{2,y} = 0 \Leftrightarrow N_2 - B_2 = 0 \Leftrightarrow N_2 = B_2 \Leftrightarrow N_2 = m_2 \cdot g$

$$\Sigma F_{2,x} = m_2 \cdot a_2 \Leftrightarrow F_{n,2} - T = m_2 \cdot a_2 \Leftrightarrow F_{n,2} - m \cdot N_2 = m_2 \cdot a \Leftrightarrow F_n - m \cdot m_2 \cdot g = m_2 \cdot a \quad (2)$$

Γ.

$$(1) + (2) \Rightarrow m_1 \cdot g - \cancel{F_n} + \cancel{F_n} - m \cdot m_2 \cdot g = m_1 \cdot a + m_2 \cdot a \Leftrightarrow (m_1 - m \cdot m_2) \cdot g = (m_1 + m_2) \cdot a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{m_1 - m \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot g$$

Άρα:

$$a = \frac{8\text{kg} - 0,25 \cdot 12\text{kg}}{8\text{kg} + 12\text{kg}} \cdot 10\text{m/s}^2 = \frac{5}{20} \cdot 10\text{m/s}^2 = 2,5\text{m/s}^2$$

- 13.** Ένα σώμα μάζας $m = 1\text{kg}$ αφήνεται να ολισθήσει από την κορυφή ενός κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\varphi = 30^\circ$. Ο συντελεστής τριβής σώματος - δαπέδου είναι $\mu = \sqrt{3}/6$

Α. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που δέχεται το σώμα.

Β. Να υπολογίσετε τη δύναμη της τριβής.

Γ. Να υπολογίσετε το διάστημα που διανύει το σώμα σε 1s.

Δίνεται: $g = 10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

Α.

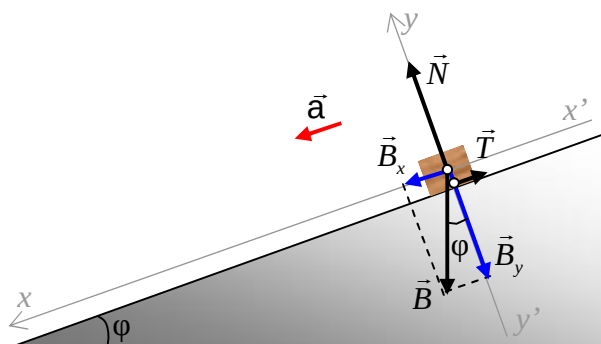
Από την ανάλυση του βάρους:

$$B_x = B \cdot \sin \varphi = m \cdot g \cdot \sin \varphi =$$

$$= 1\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2 \cdot \frac{1}{2} = 5\text{N}$$

$$B_y = B \cdot \cos \varphi = m \cdot g \cdot \cos \varphi =$$

$$= 1\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\text{N}$$



Β.

Στον $y'y$: $\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N - B_y = 0 \Leftrightarrow N = B_y \Leftrightarrow N = 5\sqrt{3}\text{N}$

Άρα: $T = m \cdot N = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 5\sqrt{3}\text{N} = \frac{5}{2}\text{N} = 2,5\text{N}$

Γ.

Στον άξονα της κίνησης $x'x$:

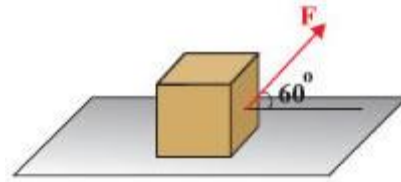
$$\Sigma F_x = m \cdot a \Leftrightarrow B_x - T = m \cdot a \Leftrightarrow a = \frac{B_x - T}{m} \Leftrightarrow a = \frac{5\text{N} - 2,5\text{N}}{1\text{kg}} \Leftrightarrow a = 2,5\text{m/s}^2$$

Άρα σε $t=1$ s έχει διανύσει: $s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 2,5 \text{ m/s}^2 \cdot (1\text{s})^2 = 1,25 \text{ m}$

- *22.** Ένα σώμα μάζας $m = 10\text{kg}$ ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ασκούμε στο σώμα δύναμη $F = 40\text{N}$ η οποία σχηματίζει γωνία 60° με το οριζόντιο επίπεδο.

Να υπολογίσετε:

- Α. Τη δύναμη που δέχεται το σώμα από το οριζόντιο επίπεδο.
 Β. Την ταχύτητα του σώματος μετά από 5s.
 Γ. Την απόσταση που διανύει το σώμα κατά τη διάρκεια του πέμπτου δευτερόλεπτου της κίνησής του. Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$.



Απάντηση:

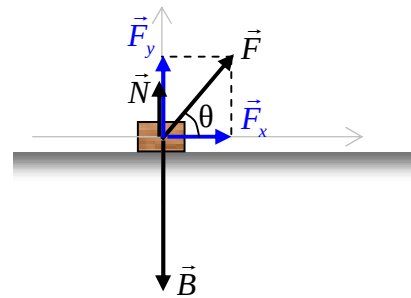
Α.

Από την ανάλυση της $\vec{F}$:

$$F_x = F \cdot \sin 60^\circ = 40\text{N} \cdot \sin 60^\circ = 40\text{N} \cdot \frac{1}{2} = 20\text{N}$$

$$F_y = F \cdot \cos 60^\circ = 40\text{N} \cdot \cos 60^\circ = 40\text{N} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}\text{N}$$

Επίσης το βάρος είναι: $B = m \cdot g = 10\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2 = 100\text{N}$



Στον $y'y$ το σώμα δεν κινείται. Άρα:

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N + F_y - B = 0 \Leftrightarrow N = B - F_y \Leftrightarrow N = 100\text{N} - 20\sqrt{3}\text{N} \Leftrightarrow N \approx 65,4\text{N}$$

Β.

Στον $x'x$:

$$\Sigma F_x = m \cdot a \Leftrightarrow F_x = m \cdot a \Leftrightarrow a = \frac{F_x}{m} \Leftrightarrow a = \frac{20\text{N}}{10\text{kg}} \Leftrightarrow a = 2\text{m/s}^2$$

Έτσι την χρονική στιγμή $t = 5\text{s}$ θα έχει ταχύτητα:

$$u = a \cdot t = 2\text{m/s}^2 \cdot 5\text{s} = 10\text{m/s}$$

Γ.

Το 5^ο δευτερόλεπτο της κίνησης διαρκεί από $t_1 = 4\text{s}$ έως $t_2 = 5\text{s}$.

Από 0 s έως $t_1 = 4\text{s}$ το σώμα έχει διανύσει: $s_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\text{m/s}^2 \cdot (4\text{s})^2 = 16\text{m}$

Από 0 s έως $t_2 = 5\text{s}$ το σώμα έχει διανύσει: $s_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\text{m/s}^2 \cdot (5\text{s})^2 = 25\text{m}$

Άρα από $t_1 = 4\text{s}$ έως $t_2 = 5\text{s}$ διάνυσε: $s_{1 \rightarrow 2} = s_2 - s_1 = 25\text{m} - 16\text{m} = 9\text{m}$

- *23.** Υποθέστε ότι πρέπει να μετακινήσουμε ένα κιβώτιο βάρους 1.000N, το οποίο ισορροπεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,2$.
- A. Ποια είναι η μικρότερη οριζόντια δύναμη που πρέπει να εφαρμόσουμε, ώστε να μετακινήσουμε το κιβώτιο;
- B. Αν εφαρμόσουμε οριζόντια δύναμη 500N με ποια επιτάχυνση θα κινηθεί το κιβώτιο;
- Γ. Πόσος χρόνος θα χρειαστεί για την μετακίνηση του κιβωτίου, κατά 24m με τη δύναμη των 500N; Ποια θα είναι τότε η ταχύτητα του κιβωτίου;
- Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$. (Να δεχθείτε ότι οριακή τριβή είναι ίση με την τριβή ολίσθησης).

Απάντηση:

A.

Για να αρχίσει να κινείται ένα σώμα αρκεί να ασκήσουμε δύναμη μεγαλύτερη από τη οριακή τριβή. $F \geq T_{or}$

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N - B = 0 \Leftrightarrow N = B \Leftrightarrow N = 1000 \text{ N}$$

$$T_{or} = T = \mu \cdot N = 0,2 \cdot 1000\text{N} = 200 \text{ N}$$

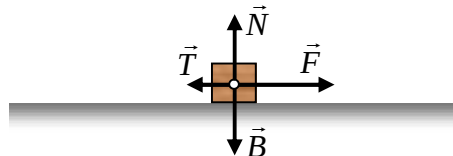
Άρα: $F \geq T_{or} \Leftrightarrow F \geq 200 \text{ N}$ Άρα : $F_{\min} = 200 \text{ N}$

B.

$$B = m \cdot g \Leftrightarrow m = \frac{B}{g} \Leftrightarrow m = \frac{1000\text{N}}{10\text{m/s}^2} \Leftrightarrow m = 100 \text{ kg}$$

Από τον Θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής:

$$\Sigma F_x = m \cdot a \Leftrightarrow F - T = m \cdot a \Leftrightarrow a = \frac{F - T}{m} \Leftrightarrow a = \frac{500\text{N} - 200\text{N}}{100\text{kg}} \Leftrightarrow a = \frac{300\text{N}}{100\text{kg}} \Leftrightarrow a = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



Γ.

Έστω την στιγμή t_1 έχει διανύσει διάστημα $s_1 = 24 \text{ m}$ και έχει ταχύτητα u_1 .

$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \Leftrightarrow 2s_1 = a \cdot t_1^2 \Leftrightarrow t_1^2 = \frac{2s_1}{a} \Leftrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{a}} \Leftrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 24\text{m}}{3\text{m/s}^2}} \Leftrightarrow t_1 = \sqrt{16\text{s}} \Leftrightarrow t_1 = 4 \text{ s}$$

$$u_1 = 3\text{m/s}^2 \cdot 4\text{s} = 12 \text{ m/s}$$

- *24.** Στην κορυφή A ενός λείου κεκλιμένου επιπέδου ύψους $h = 5\text{m}$ και γωνίας $\theta = 30^\circ$, αφήνουμε ένα σώμα μάζας $m = 1\text{kg}$.

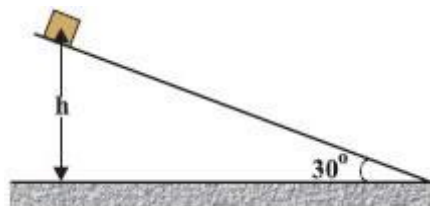
Να υπολογίσετε:

A. Την αντίδραση που ασκείται στο σώμα από το κεκλιμένο επίπεδο.

B. Την επιτάχυνση με την οποία κινείται το σώμα.

Γ. Το χρόνο κίνησης του σώματος στο κεκλιμένο επίπεδο και την ταχύτητα με την οποία φτάνει στη βάση του.

Δ. Την ταχύτητα με την οποία θα φτάσει το σώμα στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, αν η γωνία γίνει 45° .



Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

A.

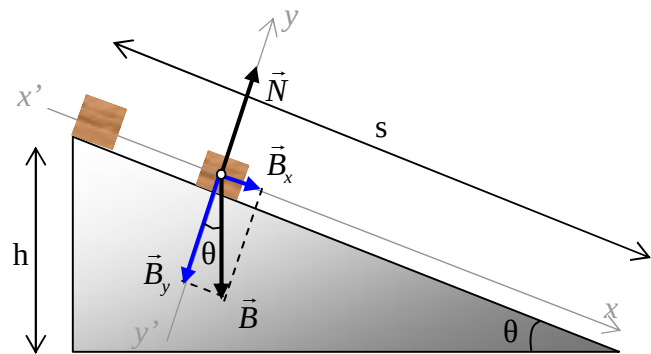
Από την ανάλυση του βάρους:

$$B_x = B \cdot \text{hm}\eta = m \cdot g \cdot \text{hm}\eta =$$

$$= 1\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2 \cdot \frac{1}{2} = 5\text{ N}$$

$$B_y = B \cdot \text{sun}\eta = m \cdot g \cdot \text{sun}\eta =$$

$$= 1\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\text{ N}$$



Στον $y'y$: $\Sigma F_{2,y} = 0 \Leftrightarrow N - B_y = 0 \Leftrightarrow N = B_y \Leftrightarrow N = 5\sqrt{3}\text{ N}$

B.

Στον άξονα της κίνησης $x'x$:

$$\Sigma F_x = m \cdot a \Leftrightarrow B_x = m \cdot a \Leftrightarrow \cancel{m} \cdot g \cdot \text{hm}\eta = \cancel{m} \cdot a \Leftrightarrow a = g \cdot \text{hm}\eta \quad (1)$$

Άρα: $a = g \cdot \text{hm}\eta = 10\text{m/s}^2 \cdot \frac{1}{2} = 5\text{ m/s}^2$

Γ.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο του κεκλιμένου: $\text{hm}\eta = \frac{h}{s} \Leftrightarrow s = \frac{h}{\text{hm}\eta} \quad (2)$

Άρα: $s = \frac{5\text{ m}}{\frac{1}{2}} = 10\text{ m}$

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2s}{a} \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}} \quad (3)$$

Άρα: $t = \sqrt{\frac{2 \cdot 10\text{m}}{5\text{m/s}^2}} \Leftrightarrow t = \sqrt{4\text{ s}} \Leftrightarrow t = 2\text{ s}$

Οπότε φτάνει στη βάση με ταχύτητα: $u = a \cdot t = 5\text{m/s}^2 \cdot 2\text{ s} = 10\text{ m/s}$

Δ. Παρακολουθώντας τους παραπάνω υπολογισμούς:

$$(1) \Rightarrow a = 10\text{m/s}^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}\text{ m/s}^2$$

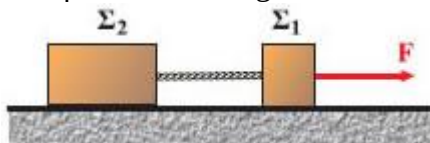
$$(2) \Rightarrow s = \frac{5\text{m}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}}\text{ m} = \frac{10\sqrt{2}}{2}\text{ m} = 5\sqrt{2}\text{ m}$$

$$(3) \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot 5\sqrt{2}\text{m}}{5\sqrt{2}\text{m/s}^2}} \Leftrightarrow t = \sqrt{2}\text{ s}$$

$$u = a \cdot t = 5\sqrt{2}\text{m/s}^2 \cdot \sqrt{2}\text{ s} = 10\text{ m/s}$$

{ Παρατηρούμε ότι το σώμα ξαναφτάνει στη βάση με την ίδια ταχύτητα.

- *25.** Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 έχουν αντίστοιχα βάρος $B_1 = 200\text{N}$ και $B_2 = 500\text{N}$ και έλκονται από μια σταθερή δύναμη F , όπως φαίνεται στην εικόνα. Αν η κοινή επιτάχυνση με την οποία κινούνται τα δύο σώματα είναι $a = g/8$, να υπολογίσετε:



A. Τη δύναμη F .

B. Την τάση του νήματος που συνδέει τα δύο σώματα. Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

A.

Επειδή το νήμα θεωρείται αβαρές ασκεί τάσεις ίσου μέτρου στα δύο σώματα:

$$T_1 = T_2 = T$$

Από Θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής ...

$$\dots \text{για το } \Sigma_1: \quad F - T_1 = m_1 \cdot a \quad (1)$$

$$\dots \text{για το } \Sigma_2: \quad T_2 = m_2 \cdot a \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη:

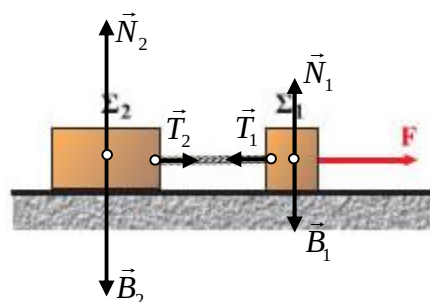
$$(1) + (2) \Rightarrow F - T_1 + T_2 = m_1 \cdot a + m_2 \cdot a \Leftrightarrow F = m_1 \cdot \frac{g}{8} + m_2 \cdot \frac{g}{8} \Leftrightarrow F = \frac{B_1 + B_2}{8}$$

Άρα:

$$F = \frac{200\text{N} + 500\text{N}}{8} = \frac{700\text{N}}{8} = 87,5\text{ N}$$

B.

$$(2) \Rightarrow T_2 = m_2 \cdot \frac{g}{8} = \frac{B_2}{8} = \frac{500\text{N}}{8} = 62,5\text{ N}$$



2.1

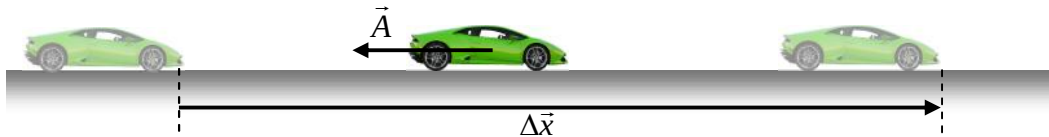
Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας

(Λύσεις των ασκήσεων του σχολικού βιβλίου)

Επιμέλεια: Άγης Παπαδάτος –Φυσικός

1. Ένα αυτοκίνητο κινείται στην εθνική οδό με σταθερή ταχύτητα $v = 30\text{m/s}$. Αν η αντίσταση A του αέρα δίνεται από τη σχέση $A = 4v$ (A σε N και v σε m/s), να βρείτε το έργο της για μετατόπιση του αυτοκινήτου κατά 50m .

Απάντηση:



Η αντίσταση του αέρα είναι :

$$A = 4 \cdot 30 = 120 \text{ N}$$

Άρα:

$$W_A = -A \cdot |\Delta x| = -120\text{N} \cdot 50\text{m} = -6000 \text{ J}$$

2. Ένα σώμα μάζας $m = 10\text{kg}$ συγκρατείται σε ύψος $h = 20\text{m}$ από το έδαφος.
 Α. Πόση είναι η δυναμική ενέργεια του σώματος, στο ύψος h ;
 Β. Αν αφήσουμε το σώμα ελεύθερο να πέσει, να παραστήσετε γραφικά τη δυναμική του ενέργεια σε συνάρτηση με το ύψος του από το έδαφος.
 Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

Α.

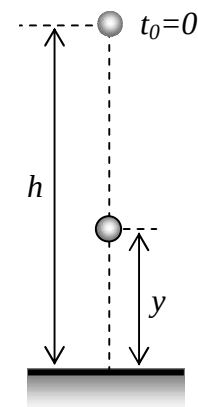
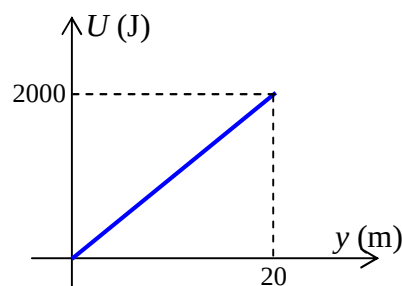
$$U = m \cdot g \cdot h = 10\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2 \cdot 20\text{m} = 2000 \text{ J}$$

Β.

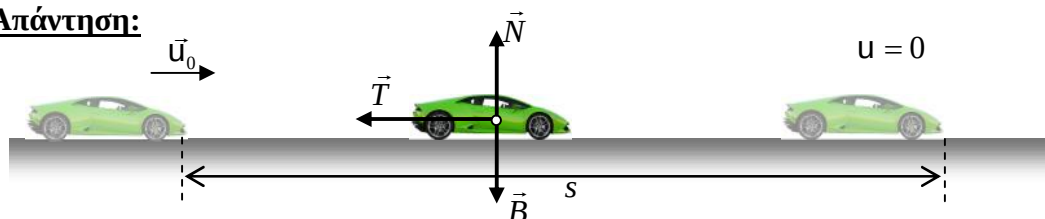
Αν ονομάσουμε y το στιγμιαίο ύψος του σώματος από το έδαφος, ο τύπος της δυναμικής ενέργειας στο ύψος y είναι :

$$U = m \cdot g \cdot y \stackrel{\text{S.I.}}{\Leftrightarrow} U = 10 \cdot 10 \cdot y \Leftrightarrow U = 100y \quad (\text{S.I.})$$

$y \text{ (m)}$	$U \text{ (J)}$
0	0
20	2000



3. Ένα αυτοκίνητο μάζας $m = 1.000\text{kg}$ κινείται με σταθερή ταχύτητα 15m/s . Αν ο οδηγός εφαρμόσει τα φρένα, στο αυτοκίνητο αναπτύσσεται μια δύναμη τριβής ίση με 7.500N . Να βρεθεί σε πόση απόσταση θα σταματήσει το αυτοκίνητο.

Απάντηση:

Από το Θ.Μ.Κ.Ε. έχουμε:

$$\cancel{K_t} - K_a = \cancel{W_T} + \cancel{W_N} + \cancel{W_B} \Leftrightarrow \cancel{\frac{1}{2} m \cdot u_0^2} = \cancel{T} \cdot s \Leftrightarrow \frac{m \cdot u_0^2}{2T} = s \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{1000\text{kg} \cdot (15\text{m/s})^2}{2 \cdot 7500\text{N}} \Leftrightarrow \boxed{s = 15\text{ m}}$$

4. Ένα σώμα αφήνεται να πέσει ελεύθερα από ύψος $h = 20\text{m}$. Με τι ταχύτητα φτάνει το σώμα στο έδαφος; Τι ενέργεια είχε το σώμα σε ύψος h και σε ποια μορφή μετατρέπεται τελικά αυτή; Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$.

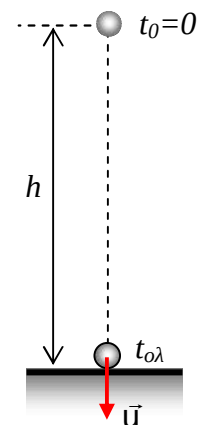
Απάντηση:

Από το Θ.Μ.Κ.Ε. έχουμε:

$$K_t - \cancel{K_a} = W_B \Leftrightarrow \frac{1}{2} m \cdot u^2 = B \cdot h \Leftrightarrow \frac{1}{2} m \cdot u^2 = m \cdot g \cdot h \Leftrightarrow u^2 = 2 \cdot g \cdot h$$

$$\Leftrightarrow u = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \Leftrightarrow u = \sqrt{2 \cdot 10\text{m/s}^2 \cdot 20\text{m}} \Leftrightarrow u = \sqrt{400\text{ m}^2/\text{s}^2} \Leftrightarrow \boxed{u = 20\text{ m/s}}$$

Το σώμα σε ύψος h είχε βαρυτική δυναμική ενέργεια και η οποία μετατράπηκε εξολοκλήρου σε κινητική ενέργεια στην κατώτερη θέση (αφού θεωρούμε τις αντιστάσεις του αέρα αμελητέες).



5. Ένας γερανός ανεβάζει με σταθερή ταχύτητα ένα κιβώτιο μάζας 2.000kg σε ύψος $h = 60\text{m}$. Αν η ανύψωση ολοκληρώθηκε σε χρόνο $t = 2\text{min}$, να βρείτε την ισχύ που απέδωσε ο γερανός. Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

Αφού το κιβώτιο ανέβαινε με σταθερή ταχύτητα:

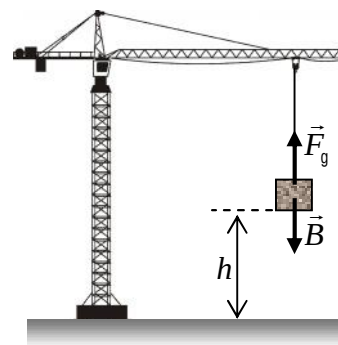
$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F_g - B = 0 \Leftrightarrow F_g = B \Leftrightarrow F_g = m \cdot g \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_g = 2000\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2 \Leftrightarrow F_g = 20000\text{ N}$$

Άρα ο γερανός παρήγαγε έργο:

$$W_g = F_g \cdot h = 20.000\text{N} \cdot 60\text{m} = 1.200.000\text{ J}$$

Άρα η ισχύς (μέση) που απέδωσε ήταν :



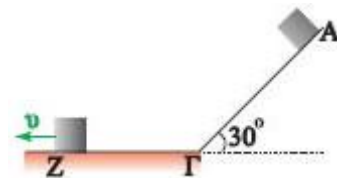
$$\bar{P} = \frac{W_g}{t} = \frac{1.200.000 \text{ J}}{120 \text{ s}} = 10.000 \text{ W}$$

- Η διατύπωση της ερώτησης παραπέμπει στην μέση ισχύ που παρήχθη από τον γερανό στο χρονικό διάστημα των 2 min. Τότε η πληροφορία ότι το κιβώτιο ανέβαινε με σταθερή ταχύτητα δεν επηρεάζει την απάντηση, αφού το έργο που παρήγαγε ο γερανός μπορούσε να υπολογιστεί, υπολογίζοντας την δυναμική ενέργεια που απέκτησε το κιβώτιο (Το έργο εκφράζει την μεταφορά ενέργειας από τον γερανό προς το σώμα) :

$$W_g = U_{\text{τελ}} = m \cdot g \cdot h = 2.000 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 60 \text{ m} = 1.200.000 \text{ J}$$

- Εφόσον δίνεται ότι το σώμα ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα θα μπορούσε να ερωτηθούμε και για την στιγμιαία ισχύ που παράγει ο γερανός η οποία είναι σταθερή (και ίση με την μέση).

6. Ένα σώμα αφήνεται να κινηθεί κατά μήκος του λείου κεκλιμένου επιπέδου. Το σώμα μετά από τη διαδρομή ΑΓ εισέρχεται στο οριζόντιο επίπεδο με το οποίο έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,2$. Αν είναι $ΑΓ = ΓΖ = 6 \text{ m}$, να βρείτε την ταχύτητα με την οποία φτάνει το σώμα στο σημείο Ζ.
Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Απάντηση:

Έστω : $(ΑΓ) = (ΓΖ) = s = 6 \text{ m}$

Κατά την διαδρομή ΑΓ έργο παράγει μόνο το βάρος $\vec{B}$ και συγκεκριμένα η συνιστώσα του $\vec{B}_x$, αφού το επίπεδο είναι λείο.

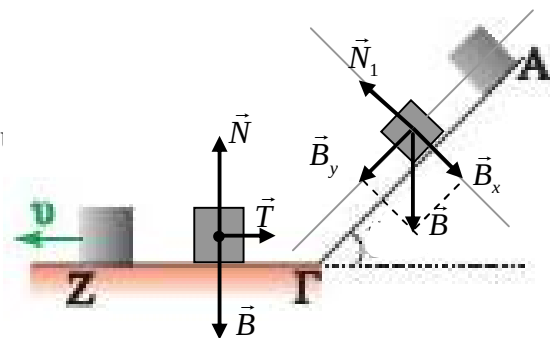
Είναι: $B_x = B \cdot \sin \alpha = m \cdot g \cdot \sin \alpha$

Άρα: $W_{B_x} = B_x \cdot (ΑΓ) = m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot s$

Κατά την διαδρομή ΓΖ έργο παράγει μόνο η τριβή
 $\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N - B = 0 \Leftrightarrow N = B \Leftrightarrow N = m \cdot g$

$T = m \cdot N = m \cdot m \cdot g$

Άρα: $W_T = -T \cdot (ΓΖ) = -m \cdot m \cdot g \cdot s$



Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για την διαδρομή Α → Ζ έχουμε:

$$K_Z - K_A = W_B + W_T \Leftrightarrow \frac{1}{2} m \cdot u_z^2 = m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot s - m \cdot m \cdot g \cdot s \Leftrightarrow u_z^2 = 2 \cdot g \cdot s (\sin \alpha - m) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_z = \sqrt{2 \cdot g \cdot s (\sin \alpha - m)} \Leftrightarrow u_z = \sqrt{2 \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 6 \text{ m} \left(\frac{1}{2} - 0,2 \right)} \Leftrightarrow u_z = \sqrt{120 \cdot 0,3} \text{ m/s} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_z = \sqrt{36} \text{ m/s} \Leftrightarrow u_z = 6 \text{ m/s}$$

7. Ένα σώμα κινείται σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα $u = 4\text{m/s}$ με την επίδραση οριζόντιας σταθερής δύναμης $F = 40\text{N}$. Να βρεθεί:
 Α. Το έργο της τριβής για μετατόπιση $\Delta x = 5\text{m}$.
 Β. Ο ρυθμός με τον οποίο η προσφερόμενη στο σώμα ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα.

Απάντηση:

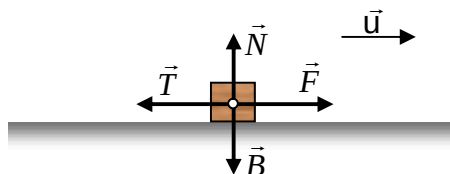
Α.

Αφού το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα:

$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F - T = 0 \Leftrightarrow F = T \Leftrightarrow T = 40\text{ N}$$

Άρα:

$$W_T = -T \cdot |\Delta x| = -40\text{N} \cdot 5\text{m} = -200\text{ J}$$



Β.

Η παραγόμενη θερμότητα ισούται αριθμητικά (κατ απόλυτη τιμή με το έργο της τριβής). Για μικρό χρονικό διάστημα Δt :

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{|\Delta W_T|}{\Delta t} = \frac{T \cdot |\Delta x|}{\Delta t} = T \cdot u = 40\text{N} \cdot 4\text{m/s} = 160 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

8. Μια μπάλα έχει μάζα $m = 2\text{kg}$ και αφήνεται από ύψος $h_1 = 20\text{m}$. Μόλις η μπάλα συγκρουστεί με το δάπεδο αναπηδά σε ύψος $h_2 = 18\text{m}$. Να βρείτε το ποσοστό της αρχικής μηχανικής ενέργειας της μπάλας που μετατράπηκε σε θερμότητα λόγω της σύγκρουσής της με το δάπεδο. Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

$$E_{m,1} = U_1 = m \cdot g \cdot h_1 = 2\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2 \cdot 20\text{m} = 400\text{ J}$$

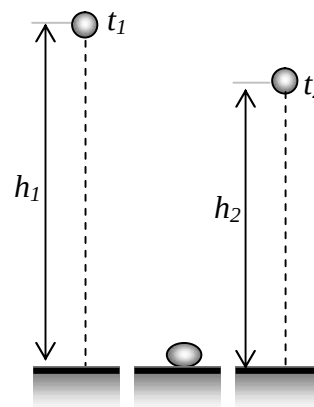
$$E_{m,2} = U_2 = m \cdot g \cdot h_2 = 2\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2 \cdot 18\text{m} = 360\text{ J}$$

Άρα κατά την κρούση χάθηκε σε θερμότητα:

$$Q = E_{m,1} - E_{m,2} = 400\text{ J} - 360\text{ J} = 40\text{ J}$$

Άρα :

$$\text{ποσοστό μετατροπής} = \frac{Q}{E_{m,1}} 100\% = \frac{40\text{ J}}{400\text{ J}} 100\% = 10\%$$



9. Ένας μαθητής σπρώχνει ένα κιβώτιο μάζας $m = 100\text{kg}$ πάνω σ' έναν οριζόντιο δρόμο με τον οποίο το κιβώτιο έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,5$. Πόση ενέργεια προσφέρει ο μαθητής στο κιβώτιο, αν το μετατοπίσει με σταθερή ταχύτητα, κατά 10m ; ($g = 10\text{m/s}^2$).

Απάντηση:

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N - B = 0 \Leftrightarrow N = B \Leftrightarrow N = m \cdot g \Leftrightarrow N = 100\text{Kg} \cdot 10\text{m/s}^2 \Leftrightarrow N = 1.000\text{ N}$$

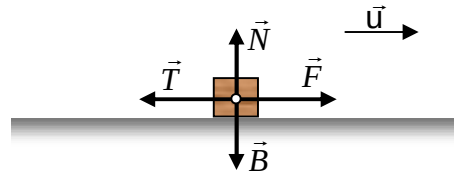
$$\text{Όμως: } T = \mu \cdot N = 0,5 \cdot 1.000\text{N} = 500\text{ N}$$

Αφού το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα:

$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F - T = 0 \Leftrightarrow F = T \Leftrightarrow F = 500 \text{ N}$$

Άρα:

$$W_F = F \cdot |\Delta x| = 500 \text{ N} \cdot 10 \text{ m} = 5.000 \text{ J}$$



- 10.** Ένας αθλητής ανέβηκε τρέχοντας τα 300 σκαλοπάτια ενός πολυώροφου κτιρίου σε χρόνο 10 min. Τα σκαλοπάτια έχουν ύψος 20 cm. Αν η μάζα του αθλητή ήταν 80 kg, να βρείτε:

A. Το έργο του βάρους του.

B. Με ποιο ρυθμό αυξήθηκε η δυναμική ενέργεια του αθλητή; ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

Απάντηση:

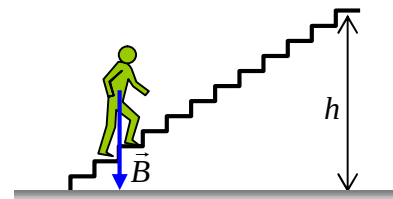
A.

Το ύψος που ανέβηκε ο αθλητής είναι :

$$h = 300 \cdot h_{sk} = 300 \cdot 0,2 \text{ m} = 60 \text{ m}$$

Άρα το έργο του βάρους του είναι :

$$W_B = -B \cdot h = -m \cdot g \cdot h = -80 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 60 \text{ m} = -48.000 \text{ J}$$



B.

Η δυναμική ενέργεια του αθλητή αυξήθηκε από:

$$U_1 = 0 \text{ J} \quad (\text{θεωρούμε ότι το επίπεδο μηδενικής } U \text{ είναι στην βάση της σκάλας)}$$

$$U_2 = m \cdot g \cdot h = 80 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 60 \text{ m} = 48.000 \text{ J}$$

Άρα ο (μέσος) ρυθμός αύξησης της δυναμικής ενέργειας ήταν:

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{U_2 - U_1}{\Delta t} = \frac{48.000 \text{ J}}{600 \text{ s}} = 80 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

- 11.** Να βρείτε το έργο μιας δύναμης η οποία μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της κατά $x = 10 \text{ m}$, κατά τη διεύθυνσή της αν το μέτρο της είναι:

A.

$$F = 4 \text{ N}$$

B.

$$F = (10 - x) \text{ N}$$

Απάντηση:

A.

Εφόσον η δύναμη είναι σταθερή :

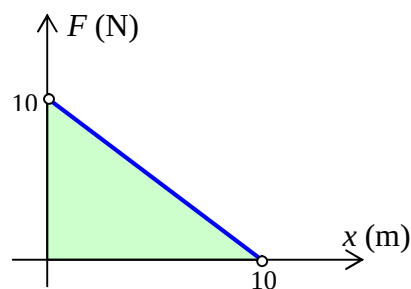
$$W_F = F \cdot x = 4 \text{ N} \cdot 10 \text{ m} = 40 \text{ J}$$

B.

Στην περίπτωση αυτή η δύναμη μεταβάλλεται με την θέση x του σώματος, οπότε το έργο της δίνεται από το εμβαδόν στο διάγραμμα δύναμης – θέσης.

Με βάση τον τύπο της δύναμης η γραφική παράσταση είναι ευθεία. Σχεδιάζουμε την γραφική παράσταση:

$x(\text{m})$	$F(\text{N})$
0	10
10	0



Άρα για μετατόπιση από κατά 10m :

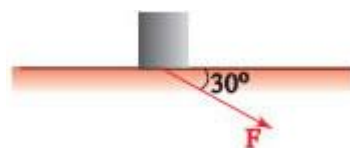
$$W_F = E_{tr} = \frac{10\text{m} \cdot 10\text{N}}{2} = 50 \text{ J}$$

12. Σ' ένα σώμα μάζας $m = 20\text{kg}$, που ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, ασκείται δύναμη $F = 50\text{N}$, υπό γωνία $\theta = 60^\circ$, όπως φαίνεται στην εικόνα.

A. Πόσο είναι το έργο της δύναμης για μετατόπιση του

σώματος κατά $x = 10\text{m}$;

B. Πόση είναι η ταχύτητα του σώματος όταν $x = 10\text{m}$;



Απάντηση:

A.

$$W_F = F \cdot x \cdot \sin\theta = 50\text{N} \cdot 10\text{m} \cdot \frac{1}{2} = 250 \text{ J}$$

B.

Από το Θ.Μ.Κ.Ε. έχουμε:

$$K_t - K_a = W_F \Leftrightarrow \frac{1}{2} m \cdot u^2 = W_F \Leftrightarrow m \cdot u^2 = 2 \cdot W_F \Leftrightarrow u^2 = \frac{2 \cdot W_F}{m} \Leftrightarrow u = \sqrt{\frac{2 \cdot W_F}{m}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u = \sqrt{\frac{2 \cdot 250 \text{ J}}{20\text{kg}}} \Leftrightarrow u = \sqrt{25} \text{ m/s} \Leftrightarrow u = 5 \text{ m/s}$$

13. Ένας μαθητής πετάει μια πέτρα κατακόρυφα προς τα επάνω και το μέγιστο ύψος, που φτάνει αυτή είναι $h = 40\text{m}$.

A. Σε ποιο ύψος η κινητική ενέργεια της πέτρας είναι η μισή της αρχικής της;

B. Σε ποιο ύψος η ταχύτητα* της πέτρας είναι η μισή της αρχικής της;

* στο ερώτημα αυτό αντικαταστήσαμε το ορμή του σχολικού βιβλίου με το ταχύτητα.

Απάντηση:

A.

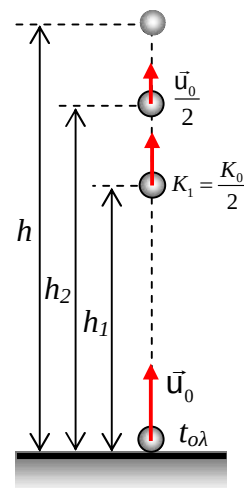
Από το Θ.Μ.Κ.Ε. (από το ύψος 0 → το μέγιστο ύψος)

$$K_h - K_0 = W_B \Leftrightarrow -K_0 = -B \cdot h \Leftrightarrow K_0 = m \cdot g \cdot h \quad (1)$$

Από το Θ.Μ.Κ.Ε. (από το ύψος 0 → το h_1 στο οποίο $K_1 = \frac{K_0}{2}$)

$$K_1 - K_0 = W_B \Leftrightarrow \frac{K_0}{2} - K_0 = -B \cdot h_1 \Leftrightarrow -\frac{K_0}{2} = -m \cdot g \cdot h_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{m \cdot g \cdot h}{2} = m \cdot g \cdot h_1 \Leftrightarrow h_1 = \frac{h}{2}$$



Άρα: $h_1 = 20 \text{ m}$

B.

$$(1) \Rightarrow \frac{1}{2} m \cdot u_0^2 = m \cdot g \cdot h \Leftrightarrow u_0^2 = 2 \cdot g \cdot h \Leftrightarrow u_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Από το Θ.Μ.Κ.Ε. (από το ύψος 0 $\rightarrow$ το h_2 στο οποίο $u_2 = \frac{u_0}{2}$)

$$K_2 - K_0 = W_B \Leftrightarrow \frac{1}{2} m \cdot u_2^2 - \frac{1}{2} m \cdot u_0^2 = -B \cdot h_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} m \cdot \left(\frac{u_0}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} m \cdot u_0^2 = -m \cdot g \cdot h_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_0^2}{8} - \frac{u_0^2}{2} = -g \cdot h_2 \Leftrightarrow u_0^2 - 4u_0^2 = -8 \cdot g \cdot h_2 \Leftrightarrow -3u_0^2 = -8 \cdot g \cdot h_2 \Leftrightarrow 3 \cdot 2 \cdot g \cdot h = 8 \cdot g \cdot h_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h_2 = \frac{6h}{8} \Leftrightarrow h_2 = \frac{3h}{4} \Leftrightarrow h_2 = \frac{3 \cdot 40\text{m}}{4} \Leftrightarrow h_2 = 30 \text{ m}$$

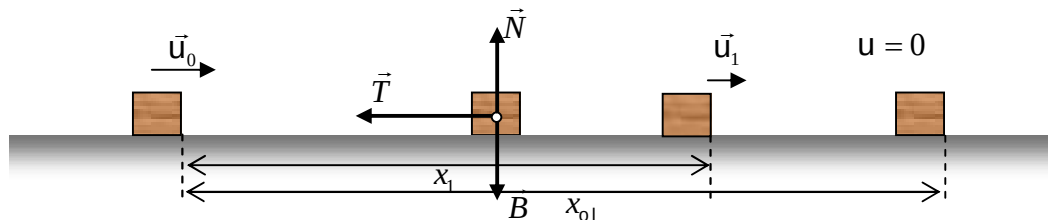
- 14.** Ένα σώμα μάζας $m = 4\text{kg}$ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα $u_0 = 10\text{m/s}$. Από τη χρονική στιγμή $t = 0$, ασκούμε στο σώμα δύναμη $F = 10\text{N}$ αντίθετης κατεύθυνσης με εκείνη της ταχύτητάς του.

Να βρεθεί:

A. Η ταχύτητα του σώματος μετά από διαδρομή $x_1 = 7,2\text{m}$.

B. Η απόσταση που θα διανύσει το σώμα μέχρι να μηδενιστεί στιγμιαία η ταχύτητά του.

Απάντηση:



A.

Από το Θ.Μ.Κ.Ε. :

$$K_t - K_a = W_B \Leftrightarrow \frac{1}{2} m \cdot u_1^2 - \frac{1}{2} m \cdot u_0^2 = -F \cdot x_1 \Leftrightarrow m \cdot u_1^2 - m \cdot u_0^2 = -2 \cdot F \cdot x_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m \cdot u_1^2 = m \cdot u_0^2 - 2 \cdot F \cdot x_1 \Leftrightarrow u_1^2 = u_0^2 - \frac{2 \cdot F \cdot x_1}{m} \Leftrightarrow u_1 = \sqrt{u_0^2 - \frac{2 \cdot F \cdot x_1}{m}}$$

$$\text{Άρα: } u_1 = \sqrt{(10\text{m/s})^2 - \frac{2 \cdot 10\text{N} \cdot 7,2\text{m}}{4\text{kg}}} = \sqrt{100 - 36} \text{ m/s} = \sqrt{64} \text{ m/s} = 8 \text{ m/s}$$

B.

Από το Θ.Μ.Κ.Ε. :

$$K_t - K_a = W_F \Leftrightarrow -\frac{1}{2} m \cdot u_0^2 = -F \cdot x_{01} \Leftrightarrow x_{01} = \frac{m \cdot u_0^2}{2 \cdot F} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{01} = \frac{4\text{kg} \cdot (10\text{m/s})^2}{2 \cdot 10\text{N}} \Leftrightarrow x_{01} = 20 \text{ m}$$

- *15.** Ένα σώμα μάζας m , είναι ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ασκούμε στο σώμα οριζόντια δύναμη, που η τιμή της μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $F = 8 - x$ (x σε m , F σε N). Αν η ταχύτητα του σώματος μετά από μετακίνησή του κατά $10m$ είναι $v = 2m/s$, να βρείτε τη μάζα m του σώματος.

Απάντηση:

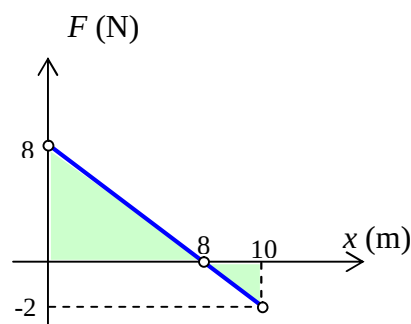
A.

Επειδή η δύναμη μεταβάλλεται με την θέση x του σώματος, το έργο της δίνεται από το εμβαδόν στο διάγραμμα δύναμης – θέσης.

Με βάση τον τύπο της δύναμης η γραφική παράσταση είναι ευθεία. Σχεδιάζουμε την γραφική παράσταση:

$$F = 8 - x \quad (\text{S.I.})$$

$x(m)$	$F(N)$
0	8
8	0
10	-2



Άρα για μετατόπιση κατά $10m$:

$$W_F = E_1 - E_2 = \frac{8m \cdot 8N}{2} - \frac{2m \cdot 2N}{2} = 32 \text{ J} - 2 \text{ J} = 30 \text{ J}$$

Από το Θ.Μ.Κ.Ε.:

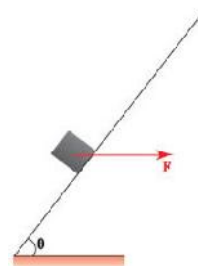
$$K_t - K_a = W_F \Leftrightarrow \frac{1}{2} m \cdot v^2 = W_F \Leftrightarrow m \cdot v^2 = 2 \cdot W_F \Leftrightarrow m = \frac{2 \cdot W_F}{v^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{2 \cdot 30 \text{ J}}{(2 \text{ m/s})^2} \Leftrightarrow m = \frac{60}{4} \text{ kg} \Leftrightarrow m = 15 \text{ kg}$$

- *16.** Ένα μικρό κιβώτιο με μάζα $m = 5 \text{ kg}$ συγκρατείται ακίνητο πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο με το οποίο έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,4$ όπως φαίνεται στην εικόνα.

Αν αυξήσουμε την τιμή της δύναμης, ώστε να γίνει $F = 100 \text{ N}$ το σώμα ολισθαίνει προς τα επάνω. Πόση ταχύτητα θα έχει μετά από μετατόπιση $x = 5 \text{ m}$;

Δίνεται ότι $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\eta\mu\theta = 0,6$, $\sigma\upsilon\nu\theta = 0,8$ και ότι $\mu_{\text{στ,max}} = \mu_{\text{ολ}}$.



Απάντηση:

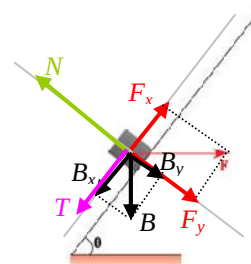
Από την ανάλυση του βάρους:

$$B_x = B \cdot \eta\mu\theta = m \cdot g \cdot \eta\mu\theta = 5 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 0,6 = 30 \text{ N}$$

$$B_y = B \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 5 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 0,8 = 40 \text{ N}$$

Από την ανάλυση της δύναμης $\vec{F}$:

$$F_x = F \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 100 \text{ N} \cdot 0,8 = 80 \text{ N}$$



$$F_y = F \cdot \sin \alpha = 100 \text{ N} \cdot 0,6 = 60 \text{ N}$$

$$\text{Στον } y'y: \quad \Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N - B_y - F_y = 0 \Leftrightarrow N = B_y + F_y \Leftrightarrow N = 40 \text{ N} + 60 \text{ N} = 100 \text{ N}$$

$$\text{Άρα:} \quad T = m \cdot N = 0,4 \cdot 100 \text{ N} = 40 \text{ N}$$

Από το Θ.Μ.Κ.Ε.:

$$K_t - K_a = W_{F_x} + W_{F_y} + W_T + W_{B_x} + W_{B_y} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m \cdot u^2 = F_x \cdot x - T \cdot x - B_x \cdot x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^2 = \frac{2(F_x - T - B_x)x}{m} \Leftrightarrow u = \sqrt{\frac{2(F_x - T - B_x)x}{m}}$$

Άρα:

$$u = \sqrt{\frac{2(F_x - T_x - B_x)x}{m}} = \sqrt{\frac{2(80 \text{ N} - 40 \text{ N} - 30 \text{ N})5 \text{ m}}{5 \text{ kg}}} = \sqrt{20} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

***17.** Μια μπάλα έχει μάζα $m = 1 \text{ kg}$ και αφήνεται να πέσει ελεύθερα από ύψος $H = 20 \text{ m}$.

A. Με πόση ταχύτητα φτάνει η μπάλα στο έδαφος;

B. Η ελάττωση της δυναμικής ενέργειας της μπάλας δίνεται όπως γνωρίζουμε από το έργο του βάρους. Να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας σε συνάρτηση με το χρόνο και να κάνετε το αντίστοιχο διάγραμμα. Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Απάντηση:

A.

Από Θ.Μ.Κ.Ε.:

$$K_t - K_a = W_B \Leftrightarrow \frac{1}{2} m \cdot u^2 = B \cdot H \Leftrightarrow \frac{1}{2} m \cdot u^2 = m \cdot g \cdot H \Leftrightarrow u^2 = 2 \cdot g \cdot H$$

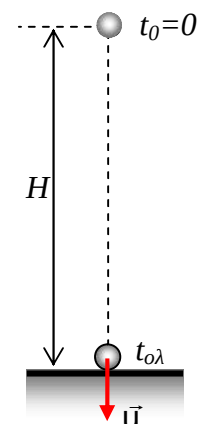
$$\Leftrightarrow u = \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \Leftrightarrow u = \sqrt{2 \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 20 \text{ m}} \Leftrightarrow u = \sqrt{400} \text{ m/s} \Leftrightarrow u = 20 \text{ m/s}$$

B.

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{-\Delta W_B}{\Delta t} = \frac{-B \cdot \Delta x}{\Delta t} = -B \cdot u = -m \cdot g \cdot u$$

Επειδή το σώμα κάνει ελεύθερη πτώση: $u = g \cdot t$

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = -m \cdot g \cdot g \cdot t = -m \cdot g^2 \cdot t \stackrel{(S.I.)}{=} -1 \cdot 10^2 \cdot t = -100 \cdot t$$



Για να βρούμε την στιγμή που φτάνει στο έδαφος

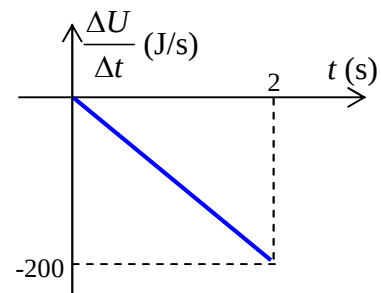
$$s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \stackrel{s=H}{\Rightarrow} H = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{ολ}^2 \Leftrightarrow 2 \cdot H = g \cdot t_{ολ}^2 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot H}{g} = t_{ολ}^2 \Leftrightarrow t_{ολ} = \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}}$$

$$\text{Άρα:} \quad t_{ολ} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \text{ m}}{10 \text{ m/s}^2}} = \sqrt{4} \text{ s} = 2 \text{ s}$$

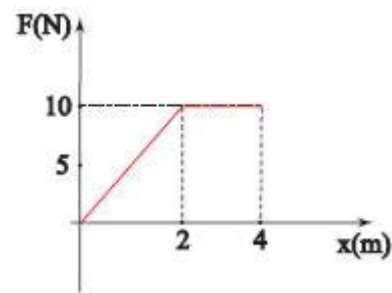
Άρα ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας είναι :

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = -100 \cdot t \quad (S.I.) \quad \text{όπου} \quad 0 \leq t \leq 2 \text{ s}$$

(γραφική παράσταση ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων)



- 18.** Ένα κιβώτιο μάζας $m = 2\text{kg}$ είναι ακίνητο, πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Υποθέστε ότι στο κιβώτιο ασκούμε οριζόντια δύναμη, που η τιμή της μεταβάλλεται όπως φαίνεται στην εικόνα.



Πόση είναι η ταχύτητα του κιβωτίου όταν η μετατόπιση του είναι 4m;

Απάντηση:

A.

Επειδή η δύναμη μεταβάλλεται με την θέση x του σώματος, το έργο της δίνεται από το εμβαδόν στο διάγραμμα δύναμης – θέσης.

Άρα για μετατόπιση κατά 4 m :

$$W_F = E_{\text{trap}} = \frac{(4\text{m} + 2\text{m}) \cdot 10\text{N}}{2} = 30\text{ J}$$

Από το Θ.Μ.Κ.Ε.:

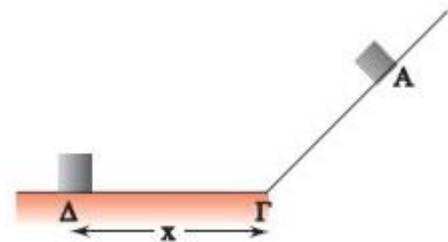
$$K_t - \cancel{K_a} = W_F \Leftrightarrow \frac{1}{2} m \cdot u^2 = W_F \Leftrightarrow m \cdot u^2 = 2 \cdot W_F \Leftrightarrow u^2 = \frac{2 \cdot W_F}{m} \Leftrightarrow u = \sqrt{\frac{2 \cdot W_F}{m}}$$

$$\Leftrightarrow u = \sqrt{\frac{2 \cdot 30\text{J}}{2\text{kg}}} \Leftrightarrow u = \sqrt{30} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- *19.** Το σώμα μάζας $m = 2\text{kg}$ αφήνεται στο σημείο A του λείου κεκλιμένου επιπέδου και μετά από διαδρομή $x = 5\text{m}$, σταματάει στο σημείο Δ του οριζόντιου επιπέδου με το οποίο έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,6$.

A. Με πόση ταχύτητα φτάνει το σώμα στο σημείο Γ;

B. Πόση είναι η ελάχιστη ενέργεια που απαιτείται για να επαναφέρουμε το σώμα στο σημείο A; Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$.



Απάντηση:

A.

Στο οριζόντιο επίπεδο:

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N - B = 0 \Leftrightarrow N = B \Leftrightarrow N = m \cdot g$$

$$T = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g$$

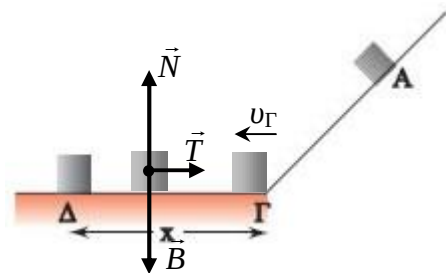
Από το Θ.Μ.Κ.Ε. ($\Gamma \rightarrow \Delta$) :

$$\cancel{K_A} - K_\Gamma = W_T \Leftrightarrow \cancel{\frac{1}{2} m \cdot u_\Gamma^2} = \cancel{T \cdot x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cancel{m} \cdot u_\Gamma^2 = m \cdot \cancel{\mu} \cdot g \cdot x \Leftrightarrow u_\Gamma^2 = 2 \cdot \mu \cdot g \cdot x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_\Gamma = \sqrt{2 \cdot \mu \cdot g \cdot x} \Leftrightarrow u_\Gamma = \sqrt{2 \cdot 0,6 \cdot 10\text{m/s}^2 \cdot 5\text{m}}$$

$$\Leftrightarrow u_\Gamma = \sqrt{60} \text{ m/s}$$



B.

Κατά την διαδρομή $A \rightarrow \Gamma$ η μηχανική ενέργεια του σώματος διατηρείται.

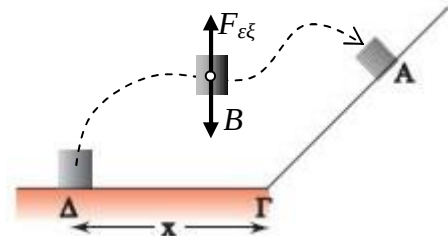
Άρα:

$$E_{m,A} = E_{m,\Gamma} \Leftrightarrow E_{m,A} = K_{\Gamma} + U_{\Gamma} = \frac{1}{2} m \cdot u_{\Gamma}^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\text{kg} \cdot (\sqrt{60}\text{m/s})^2 = 60\text{ J}$$

Επειδή στο Δ δεν έχει μηχανική ενέργεια ($E_{m,\Delta} = 0$) η ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να προσφερθεί στο σώμα για να το ξαναφέρουμε στο A είναι:

$$E_{m,A} - E_{m,\Delta} = 60\text{ J}$$

Για παράδειγμα μπορούμε να το πιάσουμε, να το σηκώσουμε στον αέρα και ακολουθώντας οποιαδήποτε εναέρια διαδρομή να το φέρνουμε στο A.



- *20.** Ένα κρουαζιερόπλοιο με μάζα $m = 65 \cdot 10^7\text{ kg}$ αποπλέει από την αποβάθρα με τις μηχανές του να αποδίδουν ισχύ ίση με $44 \cdot 10^3\text{ HP}$. Αν η απώλεια ισχύος λόγω διαφόρων αιτιών, π.χ. τριβές ή ανατάραξη των νερών, ανέρχεται στο 50% και το σκάφος αποκτά ταχύτητα 32 km/h σε χρόνο t , να βρείτε:
- A. Την κινητική ενέργεια του σκάφους τη χρονική στιγμή t .
- B. Τον χρόνο t που χρειάστηκε το σκάφος για να αποκτήσει την παραπάνω ταχύτητα.

Απάντηση:

A.

Η ταχύτητα του κρουαζιερόπλοιου στο S.I. είναι : $u = 32 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 32 \frac{1000\text{m}}{3600\text{s}} = 8,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Άρα η κινητική του ενέργεια:

$$K = \frac{1}{2} m \cdot u^2 = \frac{1}{2} 65 \cdot 10^7 \text{ kg} \cdot (8,9\text{m/s})^2 = 2,6 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

B.

Η κινητική του ενέργεια αποτελεί το 50% της ενέργειας που παρήγαγαν οι μηχανές του (αφού το 50% της δεύτερης είναι απώλειες).

Άρα:

$$K = \frac{50}{100} W_{\text{mhc}} \Leftrightarrow K = \frac{1}{2} W_{\text{mhc}} \Leftrightarrow W_{\text{mhc}} = 2K \Leftrightarrow W_{\text{mhc}} = 2 \cdot 2,6 \cdot 10^{10} \text{ J} = 5,2 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Όμως:

$$P_{\text{mhc}} = \frac{W_{\text{mhc}}}{\Delta t} \Leftrightarrow W_{\text{mhc}} = P_{\text{mhc}} \cdot \Delta t \Leftrightarrow \Delta t = \frac{W_{\text{mhc}}}{P_{\text{mhc}}} \quad (1)$$

Επειδή $1\text{ HP} = 745,7\text{ W}$ η ισχύς των μηχανών στο S.I. είναι :

$$P_{\text{mhc}} = 44 \cdot 10^3 \text{ HP} = 44 \cdot 10^3 \cdot 745,7\text{ W} = 32.810,8 \cdot 10^3 \text{ W} \approx 3,3 \cdot 10^7 \text{ W}$$

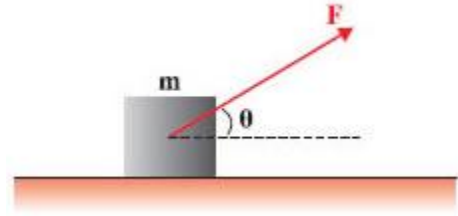
Άρα:

$$(1) \Rightarrow \Delta t = \frac{5,2 \cdot 10^{10}}{3,3 \cdot 10^7} = 1575,75 \text{ s} = \frac{1575,75}{60} \text{ min} \approx 26,3 \text{ min}$$

- *21.** Ένα σώμα μάζας $m = 2\text{ kg}$ ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο έχει $\mu = 0,25$. Ασκούμε στο σώμα δύναμη F , που η τιμή της μεταβάλλεται σε συνάρτηση με τη μετατόπιση x του σημείου εφαρμογής της, σύμφωνα με τη σχέση $F = 10 + 5x$ (x σε m , F σε N).

Να υπολογίσετε:

- A. Κατά πόσο θα μετακινηθεί το σώμα, πριν εγκαταλείψει το οριζόντιο επίπεδο;
 B. Την ταχύτητα του σώματος τη στιγμή που εγκαταλείπει το οριζόντιο επίπεδο.
 Δίνεται: $\mu = 0,8$, $\sin\theta = 0,6$ και $g = 10\text{ m/s}^2$.



Απάντηση:

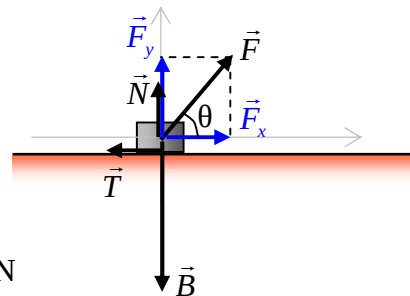
A.

Από την ανάλυση της $\vec{F}$:

$$F_x = F \cdot \sin\theta \stackrel{(S.I.)}{=} (10 + 5x) \cdot 0,6 = 6 + 3x$$

$$F_y = F \cdot \cos\theta \stackrel{(S.I.)}{=} (10 + 5x) \cdot 0,8 = 8 + 4x$$

$$\text{Επίσης το βάρος είναι: } B = m \cdot g = 2\text{ kg} \cdot 10\text{ m/s}^2 = 20\text{ N}$$



Στον $y'y$ το σώμα δεν κινείται. Άρα:

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\Leftrightarrow N + F_y - B = 0 \Leftrightarrow N = B - F_y \stackrel{(S.I.)}{\Leftrightarrow} N = 20 - (8 + 4x) \Leftrightarrow N = 20 - (8 + 4x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow N = 12 - 4x \quad (1) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι καθώς η μετατόπιση x αυξάνεται η δύναμη στήριξης μειώνεται.

Μόλις αυτή μηδενιστεί χάνεται η επαφή ανάμεσα στο σώμα και το έδαφος.

Δηλαδή η (1) έχει ισχύ μόνο όσο $N \geq 0$

Άρα η επαφή χάνεται μόλις:

$$N = 0 \Leftrightarrow 12 - 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = 3\text{ m}$$

B.

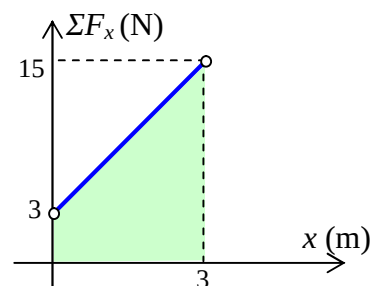
Στον $x'x$ το σώμα δέχεται:

- την $F_x = 6 + 3x$
- την τριβή: $T = \mu \cdot N = 0,25 \cdot (12 - 4x) = 3 - x$

$$\text{Άρα: } \Sigma F_x = F_x - T = (6 + 3x) - (3 - x) = 6 + 3x - 3 + x = 3 + 4x$$

Η γραφική παράσταση της παραπάνω σχέσης από 0 έως 3m είναι:

$x \text{ (m)}$	$\Sigma F_x \text{ (N)}$
0	3
3	15



Άρα το έργο της συνισταμένης είναι ίσο με το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν :

$$W_{oi} = \frac{(15\text{N} + 3\text{N}) \cdot 3\text{m}}{2} = \frac{18\text{N} \cdot 3\text{m}}{2} = 27 \text{ J}$$

Από Θ.Μ.Κ.Ε.:

$$K_t - K_a = W_{oi} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m \cdot u^2 = W_{oi} \Leftrightarrow u^2 = \frac{2W_{oi}}{m} \Leftrightarrow u = \sqrt{\frac{2W_{oi}}{m}} \Leftrightarrow u = \sqrt{\frac{2 \cdot 27 \text{ J}}{2 \text{ kg}}}$$

$$\Leftrightarrow u = \sqrt{27} \text{ m/s} \Leftrightarrow u = 3\sqrt{3} \text{ m/s}$$

- 22.** Ένα σώμα μάζας $m = 1\text{kg}$ ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Ασκούμε στο σώμα κατακόρυφη δύναμη με φορά προς τα επάνω, που η τιμή της είναι $F = 30 - x$ (x σε m, F σε N). Αν η δύναμη καταργείται αμέσως μετά το μηδενισμό της να υπολογίσετε:
- Το έργο της δύναμης.
 - Τη μέγιστη ταχύτητα που αποκτά το σώμα ανεβαίνοντας.
 - Τη μέγιστη ανύψωση του σώματος.
 - Την ταχύτητα με την οποία το σώμα επιστρέφει στο οριζόντιο επίπεδο. ($g = 10\text{m/s}^2$).

Απάντηση:

A.

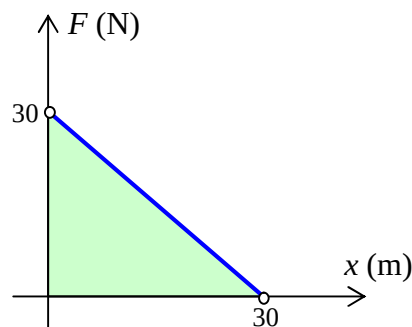
Η δύναμη $\vec{F}$ καταργείται μόλις μηδενιστεί:

$$F = 0 \Leftrightarrow 30 - x = 0 \Leftrightarrow x = 30 \text{ m}$$

Επειδή η δύναμη μεταβάλλεται με την θέση x του σώματος, το έργο της δίνεται από το εμβαδόν στο διάγραμμα δύναμης – θέσης.

Με βάση τον τύπο της δύναμης η γραφική παράσταση είναι ευθεία. Σχεδιάζουμε την γραφική παράσταση:

$x(\text{m})$	$F(\text{N})$
0	30
30	0



Άρα για μετατόπιση από κατά 10m :

$$W_F = E_{tr} = \frac{30\text{m} \cdot 30\text{N}}{2} = 450 \text{ J}$$

B.

Όσο ασκείται η $\vec{F}$ η συνισταμένη των δυνάμεων θα είναι :

$$\Sigma F_y = F - B = (30 - x) - 10 = 20 - x$$

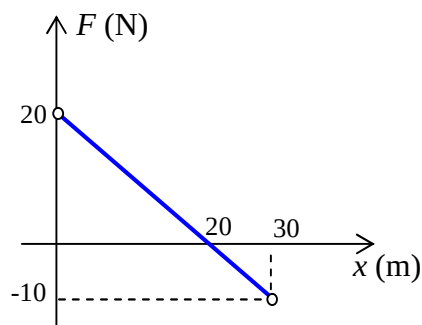
Επειδή η θετική φορά που υπονοεί η άσκηση είναι ο προς τα πάνω όσο η συνισταμένη είναι θετική το σώμα ανεβαίνει επιταχυνόμενα ενώ όταν γίνει αρνητική (αλλάζει φορά προς τα κάτω) άρα το σώμα αρχίζει να επιβραδύνεται κινούμενο προς τα πάνω.

Άρα μέγιστη ταχύτητα θα έχει την στιγμή που η συνισταμένη γίνει 0 (δηλαδή μόλις η δύναμη $\vec{F}$ αποκτήσει μέτρο ίσο με το μέτρο του βάρους).

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow F - B = 0 \Leftrightarrow 20 - x = 0 \Leftrightarrow x = 20 \text{ m}$$

Η γραφική παράσταση :

$x(\text{m})$	$\Sigma F_y(\text{N})$
0	20
20	0
30	-10



Από 0 έως 20m:

$$W_{oi} = E_{tr} = \frac{20\text{m} \cdot 20\text{N}}{2} = 200 \text{ J}$$

Από Θ.Μ.Κ.Ε.:

$$K_t - \cancel{K_a} = W_{oi} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m \cdot u_{\max}^2 = W_{oi} \Leftrightarrow u_{\max} = \sqrt{\frac{2W_{oi}}{m}} \Leftrightarrow u_{\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot 200 \text{ J}}{1 \text{ kg}}} = 20 \text{ m/s}$$

Γ.

Βλέπουμε από το εμβαδόν στο παραπάνω διάγραμμα, ότι το έργο της συνισταμένης όσο ασκείται η $\vec{F}$ (δηλαδή έως τα 30m) είναι θετικό. Άρα το σώμα μετά την παύση της $\vec{F}$ συνεχίζει να κινείται προς τα πάνω και φτάνει σε ύψος h όταν η ταχύτητά του μηδενίζεται.

Από Θ.Μ.Κ.Ε.:

$$\cancel{K_t} - \cancel{K_a} = W_F + W_B \Leftrightarrow 0 = W_F - B \cdot h \Leftrightarrow m \cdot g \cdot h = W_F \Leftrightarrow h = \frac{W_F}{m \cdot g}$$

$$\text{Άρα: } h = \frac{W_F}{m \cdot g} = \frac{450 \text{ N}}{1 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2} = 45 \text{ m}$$

Δ.

Από Θ.Μ.Κ.Ε. από την ανώτερη θέση μέχρι το έδαφος:

$$K_t - \cancel{K_a} = W_B \Leftrightarrow \frac{1}{2} m \cdot u_t^2 = m \cdot g \cdot h \Leftrightarrow u_t = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \Leftrightarrow u_t = \sqrt{2 \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 45 \text{ m}}$$

$$\Leftrightarrow u_t = \sqrt{900} \text{ m/s} \Leftrightarrow u_t = 30 \text{ m/s}$$