

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ 4 – ΑΛΓΕΒΡΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 4

Είναι γνωστό ότι όταν κάποιος μελετάει για να συμμετάσχει σε κάποιες εξετάσεις, με την πάροδο του χρόνου δεν συγκρατεί στη μνήμη του το σύνολο όσων μελέτησε. Ένα μοντέλο που δείχνει το ποσοστό $P(t)$ της γνώσης που παραμένει στην μνήμη του t εβδομάδες μετά το τέλος της μελέτης, είναι το μοντέλο Ebbinghaus και περιγράφεται από τον τύπο:

$$P(t) = Q + (100 - Q)e^{-ct}, \quad t \in [0, 40]$$

όπου Q είναι το ποσοστό της γνώσης που θυμάται πάντα και c είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το μάθημα. Αν $Q = 40$ και $c = 0,7$ τότε:

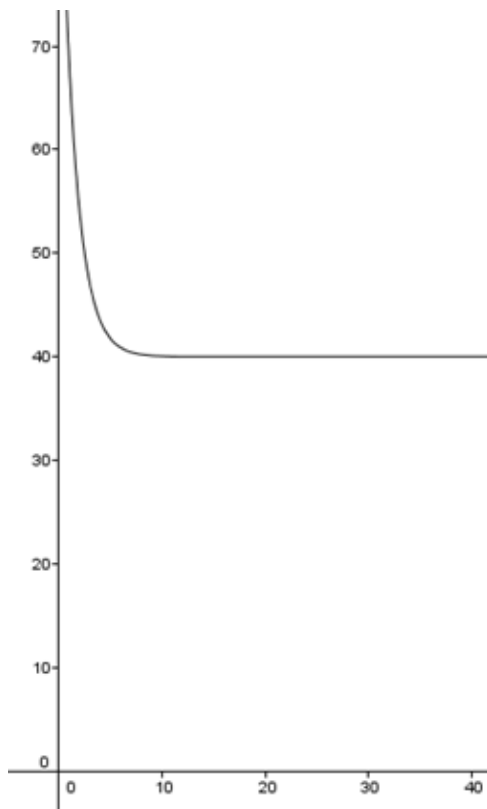
α) Τι δείχνει το $P(0)$ στα πλαίσιο του προβλήματος;

(Μονάδες 6)

β) Μετά από πόσες εβδομάδες θα έχει παραμείνει στην μνήμη του το 50% της γνώσης που απέκτησε.

(Μονάδες 9)

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Με βάση το σχήμα:



γ) Να εκτιμήσετε, με βάση τη γραφική παράσταση, αν μετά από τρεις εβδομάδες θα θυμάται πάνω ή κάτω από το 50% του υλικού που μελέτησε. Η εκτίμησή σας συμφωνεί με το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος;

(Μονάδες 5)

δ) Πως αιτιολογείται ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης, για μεγάλες τιμές του t , φαίνεται να προσεγγίζει πάρα πολύ την ευθεία $y = 40$. Γιατί δεν μπορεί να «κατέβει» κάτω από την ευθεία αυτή;

(Μονάδες 5)

(Θεωρήστε: $\ln 6 = 1,79$)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 09)

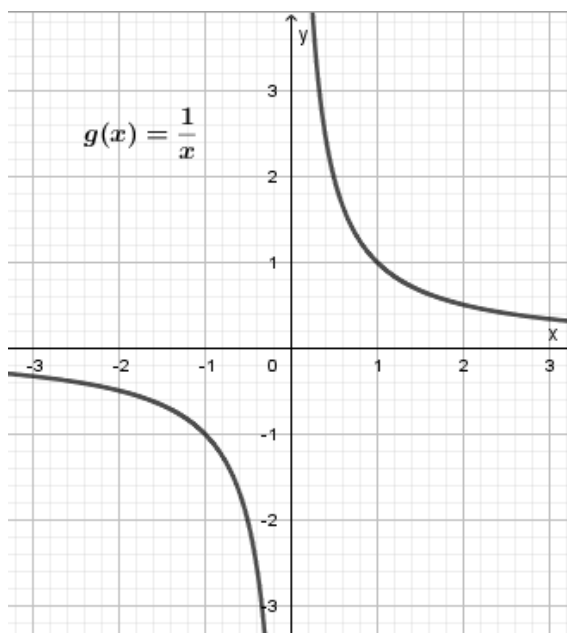
β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

(Μονάδες 05)

γ) i. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

(Μονάδες 02)

ii. Αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{x}$ είναι η παρακάτω,



να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 04)

δ) Να λύσετε την εξίσωση: $\left| \frac{1}{f(x)} \right| = 1$.

(Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - \alpha x^2 + 2x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$. Αν $P(1) = 2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$ ισούται με 15,

α) Να δείξετε ότι $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $\pi(x) = x^2 + 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

(Μονάδες 5)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\sin^3 x + \sin x = 1 - \frac{1}{2} \eta \mu^2 x$, $x \in (0, 2\pi)$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται γωνία x με $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ και οι παραστάσεις:

$$A = \eta\mu^2(\pi - x) + \eta\mu^2(\pi + x) + \sigma\upsilon\nu^2(-x),$$

$$B = \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}.$$

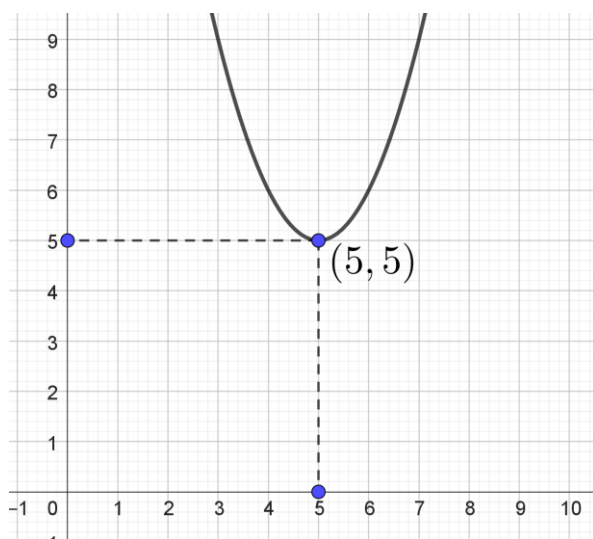
- α) Να αποδείξετε ότι $A = \eta\mu^2 x + 1$. (Μονάδες 08)
- β) Να απλοποιήσετε την παράσταση B . (Μονάδες 08)
- γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x για την οποία οι παραστάσεις A και B να είναι ίσες. (Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 + \sqrt{3}\varepsilon\phi\omega \cdot \eta\mu x, x \in \mathbb{R}$. Αν για τη γωνία ω ισχύει η σχέση $-2\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu\omega = -1, \omega \in [0, \frac{\pi}{2}]$, τότε:

- α) i. Να αποδείξετε ότι $\varepsilon\phi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$. (Μονάδες 10)
- ii. Για $\varepsilon\phi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f . (Μονάδες 04)

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x^2 - 10x + 30, x \in \mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση στο παρακάτω σχήμα.



- i. Να βρείτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης g . (Μονάδες 04)
- ii. Να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν κοινά σημεία. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)

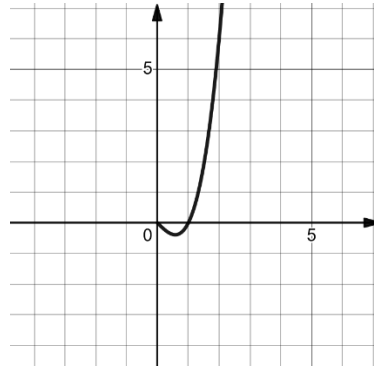
ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \text{όταν } x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$ και $h(x) = x^3 - x, x \in \mathbf{R}$.

α) i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι περιττή.

(Μονάδες 03)

ii. Να συμπληρώσετε το παρακάτω σχήμα ώστε να παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h .



(Μονάδες 04)

iii. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε το παραπάνω σχήμα, να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 08)

β) Αν $x \geq 0$ να αποδείξετε ότι: η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από την ευθεία $\varepsilon: y = x$ αν και μόνο αν η γραφική παράσταση της h βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$. Στο διπλανό σχήμα δίνεται, για τις μη αρνητικές τιμές του x , η γραφική της παράσταση. Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια, τότε:

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση για τις αρνητικές τιμές του x .

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της, την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν οι ακρότατες τιμές της;

(Μονάδες 8)

γ) Έστω θ ένας αριθμός με $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

i. $\eta\mu\theta$ και $\sin\theta$.

(Μονάδες 5)

ii. $f(\eta\mu\theta)$ και $f(\sin\theta)$

(Μονάδες 5)

