

Σύνολα

- Πραγματικοί αριθμοί: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$
- Φυσικοί αριθμοί: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$
- Ακέραιοι αριθμοί: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$
- $\pi \approx 3,14$, $e \approx 2.71$, $\sqrt{2} \approx 1,41$, $\sqrt{3} \approx 1,73$

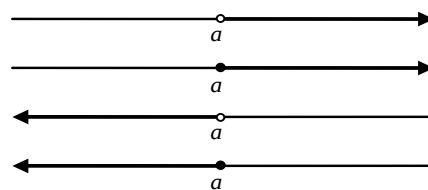
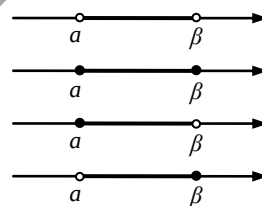
Διαστήματα πραγματικών αριθμών

Αν $a, \beta \in \mathbb{R}$ με $a < \beta$, τότε ονομάζουμε **διαστήματα με άκρα τα a, β** καθένα από τα παρακάτω σύνολα:

- $(a, \beta) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < \beta\}$: **ανοικτό διάστημα**
- $[a, \beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq \beta\}$: **κλειστό διάστημα**
- $[a, \beta) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < \beta\}$: **κλειστό-ανοικτό διάστημα**
- $(a, \beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq \beta\}$: **ανοικτό-κλειστό διάστημα**

Αν $a \in \mathbb{R}$, τότε ονομάζουμε **μη φραγμένα διαστήματα με άκρο το a** καθένα από τα παρακάτω σύνολα:

- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
- $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$



Τα σημεία ενός διαστήματος Δ , που είναι διαφορετικά από τα άκρα του, λέγονται **εσωτερικά σημεία του Δ** .

Ταυτότητες

- $(a \pm \beta)^2 = a^2 \pm 2a\beta + \beta^2$
- $(a \pm \beta)^3 = a^3 \pm 3a^2\beta + 3a\beta^2 \pm \beta^3$
- $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$
- $\alpha^3 \pm \beta^3 = (\alpha \pm \beta)(\alpha^2 \mp \alpha\beta + \beta^2)$
- $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$
- $x^\nu - a^\nu = (x - a) \cdot (x^{\nu-1} + x^{\nu-2}a + x^{\nu-3}a^2 + \dots + a^{\nu-1})$, $\nu \in \mathbb{N}^*$

Ισότητες

- $\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και γενικά $\alpha^\nu = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$, $\nu \in \mathbb{N}^*$
- $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $\beta = 0$
- $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$
- α, β αντίθετοι $\Leftrightarrow \alpha + \beta = 0$
- α, β αντίστροφοι $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = 1$

Ιδιότητες των ανισοτήτων

- $\alpha^2 \geq 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ και γενικά $\alpha^{2\nu} \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$, όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$
- $\alpha^{2\nu} > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$
- $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$
- $\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$
- $\alpha^2 + \beta^2 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $\beta = 0$
- Αν $\alpha \geq \beta$ και $\beta \geq \gamma$ τότε $\alpha \geq \gamma$
- $\frac{\alpha}{\beta} \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha \geq 0 \text{ και } \beta \neq 0)$
- $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \geq \frac{1}{\beta}$ όπου α, β ομόσημοι αριθμοί δηλαδή $\alpha\beta > 0$
- $\alpha \geq \beta \xRightarrow{+\gamma} \alpha + \gamma \geq \beta + \gamma$
- $\alpha \geq \beta \xRightarrow{* \gamma > 0} \alpha\gamma \geq \beta\gamma$
- $\alpha \geq \beta \xRightarrow{* \gamma < 0} \alpha\gamma \leq \beta\gamma$
- $\alpha \geq \beta \xRightarrow{: \gamma > 0} \frac{\alpha}{\gamma} \geq \frac{\beta}{\gamma}$
- $\alpha \geq \beta \xRightarrow{: \gamma < 0} \frac{\alpha}{\gamma} \leq \frac{\beta}{\gamma}$
- $\left. \begin{matrix} \alpha \geq \beta \\ \gamma \geq \delta \end{matrix} \right\} \xRightarrow{+} \alpha + \gamma \geq \beta + \delta$
- $\left. \begin{matrix} \alpha \geq \beta > 0 \\ \gamma \geq \delta > 0 \end{matrix} \right\} \xRightarrow{*} \alpha\gamma \geq \beta\delta$
- Δεν διαιρούμε και δεν αφαιρούμε κατά μέλη δύο ανισότητες.

Απόλυτη τιμή

- $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$
- $|x| \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$, $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$
- $|x| \geq x$ και $|x| \geq -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $|x| = |-x|$, $|x|^2 = x^2$ και γενικά $|x|^{2\nu} = x^{2\nu}$ όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$
- $|a\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$, $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$ με $\beta \neq 0$
- $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$
- $|x| = \theta \xLeftrightarrow{\theta > 0} x = \theta \text{ ή } x = -\theta$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $|x| = a \xLeftrightarrow{a < 0}$ αδύνατη
- $|x| = |\theta| \Leftrightarrow x = \theta \text{ ή } x = -\theta$
- $|x| \neq \theta \xLeftrightarrow{\theta > 0} x \neq \theta \text{ και } x \neq -\theta$
- $|x| \geq \theta \xLeftrightarrow{\theta > 0} x \geq \theta \text{ ή } x \leq -\theta$
- $|x| \leq \theta \xLeftrightarrow{\theta > 0} -\theta \leq x \leq \theta$
- $|x| \leq a \xLeftrightarrow{a < 0}$ αδύνατη, $|x| \geq a \xLeftrightarrow{a < 0} x \in \mathbb{R}$
- $|x| < 0 \Leftrightarrow$ αδύνατη, $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

Δυνάμεις

- $\alpha^v = \overbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}^{v \text{ παράγοντες}} \quad (v > 1)$
- $\alpha^1 = \alpha, \alpha^0 = 1 \quad (\alpha \neq 0)$
- $\alpha^{-v} = \frac{1}{\alpha^v} \quad (\alpha \neq 0 \text{ και } v \geq 1)$
- $\alpha^\mu \cdot \alpha^v = \alpha^{\mu+v}, \quad \frac{\alpha^\mu}{\alpha^v} = \alpha^{\mu-v}$
- $(\alpha^\mu)^v = \alpha^{\mu \cdot v}, \quad \alpha^v \cdot \beta^v = (\alpha \cdot \beta)^v$
- $\frac{\alpha^v}{\beta^v} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^v, \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-v} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^v$
- $(-\alpha)^v = \alpha^v \text{ αν } v \text{ άρτιος}$
- $(-\alpha)^v = -\alpha^v \text{ αν } v \text{ περιττός}$
- $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha^v \leq \beta^v \text{ όπου } v \text{ περιττός}$
- $\alpha \leq \beta \xLeftrightarrow{\alpha, \beta > 0} \alpha^v \leq \beta^v \text{ όπου } v \text{ άρτιος}$
- $\alpha \leq \beta \xLeftrightarrow{\alpha, \beta < 0} \alpha^v \geq \beta^v \text{ όπου } v \text{ άρτιος}$

Ρίζες

- $\sqrt{\alpha} = x \xLeftrightarrow{\alpha \geq 0, x \geq 0} x^2 = \alpha$
 - $\sqrt[v]{\alpha} = x \xLeftrightarrow{\alpha \geq 0, x \geq 0} x^v = \alpha$
 - $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha \text{ για } \alpha \geq 0, \sqrt{\alpha^2} = |\alpha| \text{ για } \alpha \in \mathbb{R}$
 - $(\sqrt[v]{\alpha})^v = \alpha \text{ για } \alpha \geq 0$
 - $\sqrt[v]{\alpha^v} = |\alpha| \text{ για } \alpha \in \mathbb{R} \text{ και } v \text{ άρτιος}$
 - $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}, \quad \sqrt[v]{\alpha} \cdot \sqrt[v]{\beta} = \sqrt[v]{\alpha \cdot \beta}, \quad \alpha, \beta \geq 0$
 - $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad \frac{\sqrt[v]{\alpha}}{\sqrt[v]{\beta}} = \sqrt[v]{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad \alpha \geq 0 \text{ και } \beta > 0$
 - $\alpha^{\frac{\mu}{v}} = \sqrt[v]{\alpha^\mu}, \text{ όπου } \alpha > 0, \mu \in \mathbb{Z}, v \in \mathbb{N}^*$
 - $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \text{ όπου } x \geq 0$
 - Αν $v \in \mathbb{N}^*$ και $\mu \in \mathbb{N}^*$ τότε $\sqrt[v]{x^{2\mu}} = \sqrt[v]{|x|^{2\mu}} = |x|^{\frac{2\mu}{v}} = \begin{cases} x^{\frac{2\mu}{v}}, & x > 0 \\ (-x)^{\frac{2\mu}{v}}, & x < 0 \end{cases}$
- $$\text{π.χ. } \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{|x|^2} = |x|^{\frac{2}{3}} = \begin{cases} x^{\frac{2}{3}}, & x \geq 0 \\ (-x)^{\frac{2}{3}}, & x < 0 \end{cases}$$
- $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \sqrt[v]{\alpha} \leq \sqrt[v]{\beta} \text{ όπου } \alpha, \beta \geq 0$

Παραγοντοποίηση

Με τον όρο παραγοντοποίηση εννοούμε την διαδικασία κατά την οποία μία αλγεβρική παράσταση από μορφή πρόσθεσης μετατρέπεται σε μορφή γινομένου, χωρίς να αλλάξει το αποτέλεσμα της.

Τρόποι παραγοντοποίησης

- Κοινός παράγοντας
- Ομαδοποίηση
- Διάσπαση και ομαδοποίηση
- Διαφορά τετραγώνων: $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$
- Διαφορά-άθροισμα κύβων: $\begin{cases} \alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) \\ \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) \end{cases}$
- Ανάπτυγμα τετραγώνου: $\begin{cases} \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 \\ \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 \end{cases}$
- Τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$: $\begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2) \text{ αν } \Delta > 0 \\ \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)^2 \text{ αν } \Delta = 0 \end{cases}$
- Σχήμα Horner: Έστω $P(x)$ ένα πολυώνυμο 3^{ου} ή μεγαλύτερου βαθμού. Για να το παραγοντοποιήσουμε εργαζόμαστε ως εξής:
 - Βρίσκουμε τις πιθανές ακέραιες ρίζες του $P(x)$ (είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου). Με αντικατάσταση ή με σχήμα Horner βρίσκουμε ποια από αυτές είναι ρίζα ρ του $P(x)$.
 - Κάνουμε τη διαίρεση $P(x) : (x - \rho)$ με σχήμα Horner, αν δεν έχει προηγηθεί στο προηγούμενο βήμα, η οποία θα είναι τέλεια, και η ταυτότητα της θα είναι της μορφής:

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x)$$
 - Αν το πηλίκο $\pi(x)$ είναι 3^{ου} ή μεγαλύτερου βαθμού, επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία για το $\pi(x)$.

Εξισώσεις α βαθμού

Εξίσωση α βαθμού με έναν άγνωστο λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta = 0$ με $\alpha \neq 0$.

- Αν $\alpha \neq 0$ τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση.
- Αν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$ δηλαδή είναι της μορφής $0x = 0$, τότε κάθε αριθμός είναι λύση της (ταυτότητα).
- Αν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$ δηλαδή είναι της μορφής $0x = -\beta$, τότε δεν έχει λύση (αδύνατη).

Βήματα επίλυσης

- 1) Απαλοιφή παρονομαστών
- 2) Απαλοιφή παρενθέσεων
- 3) Χωρίζω γνωστούς από αγνώστους
- 4) Αναγωγή ομοίων όρων
- 5) Διαιρώ με τον συντελεστή του αγνώστου (αν δεν είναι μηδέν).

Η εξίσωση $x^v = a$ (διωνυμική)

- Αν $a > 0$ και v περιττός φυσικός αριθμός (1,3,5,7,9,...), τότε:

$$x^v = a \Leftrightarrow x = \sqrt[v]{a}$$

- Αν $a > 0$ και v άρτιος φυσικός αριθμός (2,4,6,8,...), τότε:

$$x^v = a \Leftrightarrow x = \sqrt[v]{a} \text{ ή } x = -\sqrt[v]{a}$$

- Αν $a < 0$ και v περιττός φυσικός αριθμός (1,3,5,7,9,...), τότε:

$$x^v = a \Leftrightarrow x = -\sqrt[v]{-a}$$

- Αν $a < 0$ και v άρτιος φυσικός αριθμός (2,4,6,8,...), τότε:

$$x^v = a \Leftrightarrow \text{αδύνατη}$$

Εξισώσεις β βαθμού

Εξίσωση β βαθμού με έναν άγνωστο λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής $ax^2 + bx + c = 0$ με $a \neq 0$. Οι αριθμοί a, b, c λέγονται συντελεστές της εξίσωσης και συγκεκριμένα ο c λέγεται σταθερός όρος.

Έστω η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ με διακρίνουσα $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Αν $\Delta > 0$, τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Αν $\Delta = 0$, τότε η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα την $x_1 = \frac{-b}{2a}$.
- Αν $\Delta < 0$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Αν η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2 τότε ισχύουν ο τύποι του Vieta:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ και } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

- Αν $b = 0$, δηλαδή έχουμε $ax^2 + c = 0$, τότε η εξίσωση αυτή αντί να λυθεί με τον παραπάνω τρόπο μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:

$$\begin{aligned} ax^2 + c = 0 &\Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x = \sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ ή } x = -\sqrt{-\frac{c}{a}}, & \text{αν } -\frac{c}{a} > 0 \\ \text{αδύνατη,} & \text{αν } -\frac{c}{a} < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- Αν $c = 0$, δηλαδή έχουμε $ax^2 + bx = 0$, τότε η εξίσωση αυτή αντί να λυθεί με τον παραπάνω τρόπο μπορούμε να εργαστούμε με παραγοντοποίηση, δηλαδή:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx = 0 &\Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } ax + b = 0 \Leftrightarrow \\ &x = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Πολυωνυμικές εξισώσεις ν βαθμού

Πολυωνυμική εξίσωση ν βαθμού ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής:

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0, \alpha_n \neq 0.$$

Για την επίλυση των πολυωνυμικών εξισώσεων θα αναλύουμε το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ σε γινόμενο παραγόντων (παραγοντοποίηση) ώστε να πάρει τη μορφή $P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot \dots \cdot P_k(x) = 0$ και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα

$$\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

θα λύνουμε τις επιμέρους εξισώσεις

$$P_1(x) = 0 \text{ ή } P_2(x) = 0 \text{ ή } \dots \text{ ή } P_k(x) = 0$$

οι οποίες θα είναι πρώτου βαθμού ή δευτέρου ή διωνυμικές.

Πρόσημο πολυωνύμου $\alpha x + \beta$ -Ανισώσεις β βαθμού

- Για να βρω το πρόσημο ενός πολυωνύμου της μορφής $\alpha x + \beta$, πρώτα βρίσκω τη ρίζα ρ λύνοντας την εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$, και στη συνέχεια κατασκευάζω τον παρακάτω πίνακα προσημών:

x	$-\infty$	ρ	$+\infty$
$\alpha x + \beta$	ετερόσημο του α	$\bigcirc$	ομόσημο του α

- Για να λύσουμε μια ανίσωση α βαθμού εργαζόμαστε ακριβώς όπως τις εξισώσεις πρώτου βαθμού προσέχοντας όμως όταν διαιρούμε ή πολλαπλασιάζουμε με αρνητικό αριθμό να αλλάζουμε τη φορά της ανίσωσης.

Πρόσημο πολυωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ -Ανισώσεις β βαθμού

- Για να βρω το πρόσημο ενός πολυωνύμου της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, λύνω πρώτα την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ και ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσας, φτιάχνω και τον κατάλληλο πίνακα προσημών. Δηλαδή:

A. Αν $\Delta > 0$ τότε:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$	ομόσημο του α	$\bigcirc$	ετερόσημο του α	ομόσημο του α

Β. Αν $\Delta = 0$ τότε:

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$ax^2 + bx + \gamma$	ομόσημο του a  ομόσημο του a		

Γ. Αν $\Delta < 0$ τότε:

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + \gamma$	ομόσημο του a	

- Για να λύσουμε μια ανίσωση β βαθμού ($ax^2 + bx + \gamma \geq 0$ ή ≤ 0) εργαζόμαστε ως εξής:
 - Βρίσκουμε τις ρίζες (αν έχει) του τριωνύμου $ax^2 + bx + \gamma$ λύνοντας την εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$.
 - Κατασκευάζουμε τον κατάλληλο πίνακα προσήμων.
 - Από τον πίνακα βρίσκουμε τις λύσεις της ανίσωσης.

Ανισώσεις της μορφής $ax^2 + bx > 0$ ή ≤ 0 και $ax^2 + \gamma > 0$ ή ≤ 0

- Για να λύσουμε μια ανίσωση της μορφής $ax^2 + bx \geq 0$ ή ≤ 0 ή $ax^2 + \gamma \geq 0$ ή ≤ 0 μπορούμε να ακολουθήσουμε την διαδικασία που κάνουμε στις ανισώσεις δευτέρου βαθμού, απλά θεωρούμε το $\gamma = 0$ ή το $\beta = 0$ αντίστοιχα.
- Ένας άλλος (πιο σύντομος) τρόπος για να λύσουμε μία ανίσωση της μορφής $ax^2 + \gamma \geq 0$ ή ≤ 0 είναι ο εξής:
 - Χωρίζω γνωστούς από αγνώστους και διαιρώ με τον συντελεστή του αγνώστου (αν είναι αρνητικός αλλάζουμε την φορά).
 - Αν και τα δύο μέλη είναι θετικοί όροι, βάζουμε ρίζες ώστε να φύγει το τετράγωνο εφαρμόζοντας την ιδιότητα $\sqrt{x^2} = |x|$.
 - Τέλος εφαρμόζουμε την κατάλληλη ιδιότητα απολύτων:
 $|x| \geq \theta \Leftrightarrow x \geq \theta \text{ ή } x \leq -\theta$ ή $|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$
 - Αν το ένα μέλος δεν είναι θετικός αλλά αρνητικός όρος, τότε η ανίσωση θα είναι είτε αδύνατη είτε θα έχει άπειρες λύσεις, δηλαδή $x \in \mathbb{R}$.

Πρόσημο πολυωνύμου $ax^{2n+1} + \beta$

Ο πίνακας προσήμων του πολυωνύμου $ax^{2n+1} + \beta$ (όπου $2n + 1$ συμβολίζει περιττό αριθμό) είναι ακριβώς ίδιος με τον πίνακα προσήμων του $ax + \beta$, δηλαδή:

x	$-\infty$	ρ	$+\infty$
$ax^{2n+1} + \beta$	ετερόσημο του a  ομόσημο του a		

Πρόσημο πολυωνύμου $ax^{2ν} + γ$

Ο πίνακας προσήμων του πολυωνύμου $ax^{2ν} + γ$ (όπου $2ν$ συμβολίζει άρτιο αριθμό) είναι ακριβώς ίδιος με τον πίνακα προσήμων του $ax^2 + βx + γ$ στην περίπτωση που $Δ > 0$ ή $Δ < 0$ δηλαδή:

A. Αν η εξίσωση $ax^{2ν} + γ = 0$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 , τότε:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^{2ν} + γ$	ομόσημο του a	ετερόσημο του a	ομόσημο του a	

B. Αν η εξίσωση $ax^{2ν} + γ = 0$ είναι αδύνατη τότε:

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^{2ν} + γ$	ομόσημο του a	

Πρόσημο γινομένου-Ανισώσεις γινομένου

- Για να βρούμε το **πρόσημο** ενός γινομένου $P(x) = A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x)$ όπου τα $A(x), B(x), \dots, \Phi(x)$ είναι πολυώνυμα της μορφής $ax + β$ ή $ax^2 + βx + γ$ ή $ax^n + β$ εργαζόμαστε ως εξής:

A. Βάζουμε τον κάθε παράγοντα ίσο με μηδέν και βρίσκουμε τις ρίζες τους. Δηλαδή λύνουμε τις εξισώσεις $A(x) = 0, B(x) = 0, \dots, \Phi(x) = 0$.

B. Αν $x_1, x_2, x_3, \dots$ είναι οι ρίζες των προηγούμενων εξισώσεων με $x_1 < x_2 < x_3 \dots$ τότε κατασκευάζουμε ένα πίνακα προσήμων συμπληρώνοντας τον σύμφωνα με τους κανόνες που είδαμε παραπάνω. Ο πίνακας θα έχει την μορφή

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	$\dots$	$+\infty$
$A(x)$						
$B(x)$						
$\vdots$						
$\Phi(x)$						
$P(x)$						

Στην τελευταία σειρά του πίνακα (αυτή που αντιστοιχεί στο $P(x)$) συμπληρώνουμε τα πρόσημα χρησιμοποιώντας τους γνωστούς κανόνες γινομένου προσήμων.

- Για να λύσουμε μια **ανίσωση γινόμενο** της μορφής $A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) > 0$ ή < 0 όπου τα $A(x), B(x), \dots, \Phi(x)$ είναι πολυώνυμα της μορφής $ax + \beta$ ή $ax^2 + \beta x + \gamma$ ή $ax^n + \beta$, αρκεί να βρούμε το πρόσημο του γινομένου

$$P(x) = A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x)$$

κατασκευάζοντας τον αντίστοιχο πίνακα προσήμων του όπως είδαμε παραπάνω. Από τον πίνακα αυτό βρίσκουμε τις λύσεις της ανίσωσης.

Πρόσημο πηλίκου-Κλασματικές ανισώσεις

- Για να βρούμε το **πρόσημο** ενός πηλίκου $P(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ όπου τα $A(x), B(x)$ είναι πολυώνυμα που αποτελούνται από παράγοντες της μορφής $ax + \beta$ ή $ax^2 + \beta x + \gamma$ ή $ax^n + \beta$ εργαζόμαστε ως εξής:

A. Βάζουμε τον περιορισμό $B(x) \neq 0$ και λύνοντας τον βρίσκουμε τους αριθμούς που πρέπει να εξαιρέσουμε από τις λύσεις της ανίσωσης.

B. Στη συνέχεια βρίσκουμε τις ρίζες των πολυωνύμων $A(x), B(x)$ λύνοντας τις εξισώσεις $A(x) = 0, B(x) = 0$.

Γ. Τέλος κατασκευάζουμε ένα πίνακα προσήμων όπως ακριβώς είδαμε στο πρόσημο γινομένου με την διαφορά ότι στον αριθμό (ή τους αριθμούς) που μηδενίζει τον παρανομαστή θα βάλουμε διπλή γραμμή (για να μας υπενθυμίζει ότι εξαιρούνται από τις λύσεις).

- Για να λύσουμε μια κλασματική ανίσωση, την φέρνουμε πρώτα στη μορφή $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ ή < 0 και στη συνέχεια κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων του πηλίκου $\frac{A(x)}{B(x)}$ όπως είδαμε προηγουμένως. Από τον πίνακα αυτό βρίσκουμε τις λύσεις της ανίσωσης.

Εκθετικές εξισώσεις-ανισώσεις

Εκθετική εξίσωση/ανίσωση λέγεται η εξίσωση/ανίσωση που έχει τον άγνωστο σε έναν τουλάχιστον εκθέτη.

Για να λυθεί μία εκθετική εξίσωση/ανίσωση χρήσιμα είναι τα εξής:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \xLeftrightarrow{a>1} f(x) < g(x)$$

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \xLeftrightarrow{0<a<1} f(x) > g(x)$$

Λογάριθμοι

Ο $\ln \theta$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον αριθμό e για να βρούμε τον θετικό αριθμό θ . Δηλαδή, αν $\theta > 0$, τότε:

$$\ln \theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$$

- $\ln e^x = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $e^{\ln \theta} = \theta$ για κάθε $\theta > 0$
- $\ln e = 1, \ln 1 = 0$
- $\ln(\theta_1 \theta_2) = \ln \theta_1 + \ln \theta_2$ για κάθε $\theta_1, \theta_2 > 0$
- $\ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \ln \theta_1 - \ln \theta_2$ για κάθε $\theta_1, \theta_2 > 0$
- $\ln \theta^\kappa = \kappa \ln \theta$ για κάθε $\theta > 0$ και $\kappa \in \mathbb{R}$

Λογαριθμικές εξισώσεις-ανισώσεις

Λογαριθμική εξίσωση/ανίσωση λέγεται η εξίσωση/ανίσωση που έχει τον άγνωστο σε έναν τουλάχιστον λογάριθμο.

Για να λυθεί μία λογαριθμική εξίσωση/ανίσωση βάζουμε πρώτα τους κατάλληλους περιορισμούς, δηλαδή τις παραστάσεις που είναι μέσα στους λογαρίθμους τις βάζουμε μεγαλύτερες του μηδενός. Στη συνέχεια λύνουμε την εξίσωση/ανίσωση χρησιμοποιώντας τις εξής ιδιότητες:

$$\ln f(x) = a \Leftrightarrow f(x) = e^a$$

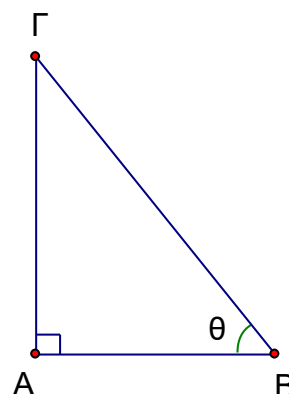
$$\ln f(x) = \ln g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

$$\ln f(x) < \ln g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$

Τριγωνομετρία

Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας

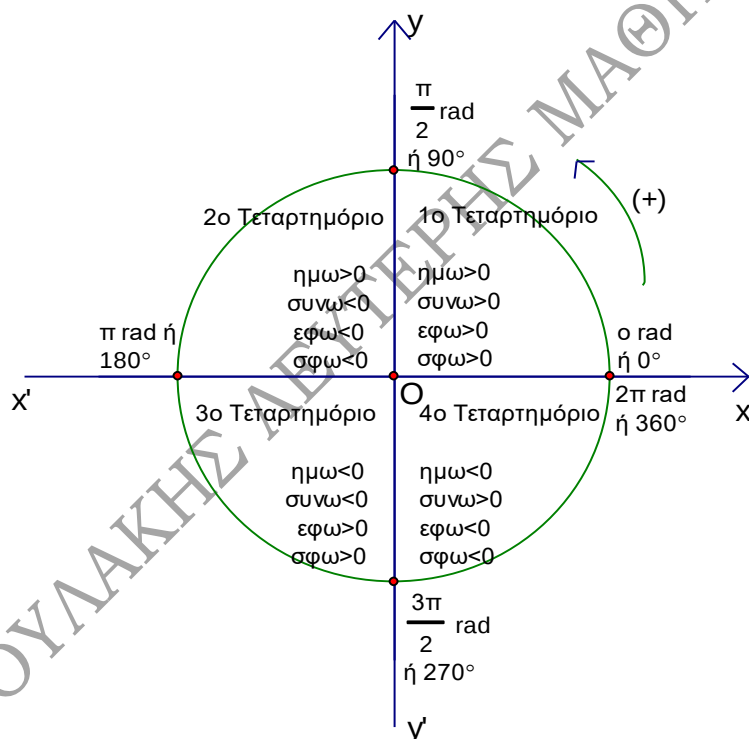
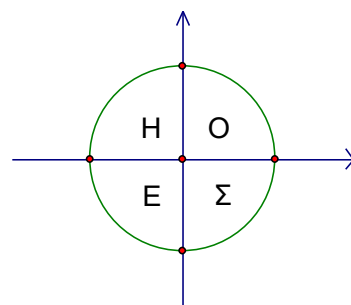
- Ημίτονο της γωνίας θ : $\eta\mu\theta = \frac{\text{απένταντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$
- Συνημίτονο της γωνίας θ : $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\text{προσκειμένη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{AB}{B\Gamma}$
- Εφαπτομένη της γωνίας θ : $\epsilon\varphi\theta = \frac{\text{απένταντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκειμένη κάθετη πλευρά}} = \frac{A\Gamma}{AB}$
- Συνεφαπτομένη της γωνίας θ : $\sigma\varphi\theta = \frac{\text{προσκειμένη κάθετη πλευρά}}{\text{απένταντι κάθετη πλευρά}} = \frac{AB}{A\Gamma}$



Γωνίες μεγαλύτερες των 360°

$\eta\mu(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \eta\mu\omega$	$\sigma\upsilon\nu(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
$\epsilon\varphi(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \epsilon\varphi\omega$	$\sigma\varphi(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\varphi\omega$

$\eta\mu(2\kappa\pi + \omega) = \eta\mu\omega$	$\sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
$\epsilon\varphi(2\kappa\pi + \omega) = \epsilon\varphi\omega$	$\sigma\varphi(2\kappa\pi + \omega) = \sigma\varphi\omega$

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$.**Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών****Μνημονικός κανόνας ΟΗΕΣ****Ο** = Όλα θετικά**Η** = Ημίτονο θετικό**Ε** = Εφαπτομένη θετική (και συνεφαπτομένη)**Σ** = Συνημίτονο θετικό

Παρατηρήσεις

1. $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1 \Leftrightarrow |\sigma\upsilon\nu\omega| \leq 1$ και $-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1 \Leftrightarrow |\eta\mu\omega| \leq 1$

2. $0 \leq \eta\mu^2\omega \leq 1$ και $0 \leq \sigma\upsilon\nu^2\omega \leq 1$

3. $\eta\mu^2\omega = (\eta\mu\omega)^2$ ενώ $\eta\mu^2\omega \neq \eta\mu\omega^2$. Όμοια για τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

4. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των βασικών γωνιών φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

ω	$0^\circ \text{ ή } 0 \text{ rad}$	$30^\circ \text{ ή } \frac{\pi}{6} \text{ rad}$	$45^\circ \text{ ή } \frac{\pi}{4} \text{ rad}$	$60^\circ \text{ ή } \frac{\pi}{3} \text{ rad}$	$90^\circ \text{ ή } \frac{\pi}{2} \text{ rad}$	$180^\circ \text{ ή } \pi \text{ rad}$	$270^\circ \text{ ή } \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$	$360^\circ \text{ ή } 2\pi \text{ rad}$
$\eta\mu\omega$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\sigma\upsilon\nu\omega$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\epsilon\phi\omega$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$\sigma\phi\omega$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

Τριγωνομετρικές ταυτότητες

1. $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu^2\omega = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega \\ \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega \end{cases}$ 2. $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ και $\sigma\phi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$

3. $\sigma\upsilon\nu^2\omega - 1 = -\eta\mu^2\omega$ και $\eta\mu^2\omega - 1 = -\sigma\upsilon\nu^2\omega$

4. $\eta\mu^2\omega = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = (1 - \sigma\upsilon\nu\omega)(1 + \sigma\upsilon\nu\omega)$
 $\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = (1 - \eta\mu\omega)(1 + \eta\mu\omega)$

5. $\epsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \epsilon\phi\omega = \frac{1}{\sigma\phi\omega} \\ \sigma\phi\omega = \frac{1}{\epsilon\phi\omega} \end{cases}$

6. $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \epsilon\phi^2\omega} \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = 1 + \epsilon\phi^2\omega$.

7. $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$ 8. $\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha$
 $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$ $\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha$

$$9. \quad \begin{aligned} \varepsilon\varphi(\alpha + \beta) &= \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta} \\ \varepsilon\varphi(\alpha - \beta) &= \frac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}{1 + \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta} \end{aligned}$$

$$10. \quad \begin{aligned} \sigma\varphi(\alpha + \beta) &= \frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta - 1}{\sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\alpha} \\ \sigma\varphi(\alpha - \beta) &= \frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta + 1}{\sigma\varphi\beta - \sigma\varphi\alpha} \end{aligned}$$

$$11. \eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\alpha$$

$$12. \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \quad 13. \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \begin{cases} 1 - 2\eta\mu^2\alpha \\ \text{ή} \\ 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \end{cases}$$

$$14. \varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}$$

Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

$$\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega \quad \sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega \quad \varepsilon\varphi(-\omega) = -\varepsilon\varphi\omega \quad \sigma\varphi(-\omega) = -\sigma\varphi\omega$$

$$\eta\mu(\pi - \omega) = \eta\mu\omega \quad \eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(\pi - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega \quad \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\varepsilon\varphi(\pi - \omega) = -\varepsilon\varphi\omega \quad \varepsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\varepsilon\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi(\pi - \omega) = -\sigma\varphi\omega \quad \sigma\varphi(180^\circ - \omega) = -\sigma\varphi\omega$$

$$\eta\mu(\pi + \omega) = -\eta\mu\omega \quad \eta\mu(180^\circ + \omega) = -\eta\mu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(\pi + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega \quad \sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\varepsilon\varphi(\pi + \omega) = \varepsilon\varphi\omega \quad \varepsilon\varphi(180^\circ + \omega) = \varepsilon\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi(\pi + \omega) = \sigma\varphi\omega \quad \sigma\varphi(180^\circ + \omega) = \sigma\varphi\omega$$

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\omega \quad \eta\mu(90^\circ - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \eta\mu\omega \quad \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$$

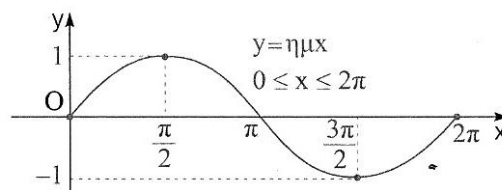
$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\varphi\omega \quad \varepsilon\varphi(90^\circ - \omega) = \sigma\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \varepsilon\varphi\omega \quad \sigma\varphi(90^\circ - \omega) = \varepsilon\varphi\omega$$

Η συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$

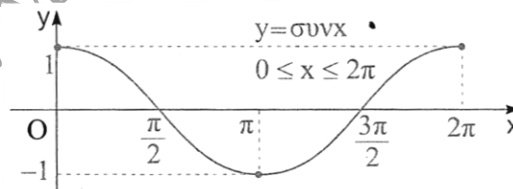
- Η $f(x) = \eta\mu x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$ και ισχύει $f \uparrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f \downarrow \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $f \downarrow \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, $f \uparrow \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
- στο διάστημα $[0, 2\pi]$ η $f(x) = \eta\mu x$ παρουσιάζει μέγιστο για $x = \frac{\pi}{2}$, το $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1$ και ελάχιστο για $x = \frac{3\pi}{2}$, το $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \eta\mu \frac{3\pi}{2} = -1$

- Η γραφική παράσταση της $f(x) = \eta\mu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Η συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$

- Η $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$ και ισχύει $f \downarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f \downarrow \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $f \uparrow \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, $f \uparrow \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
- στο διάστημα $[0, 2\pi]$ η $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ παρουσιάζει μέγιστο για $x = 0$, και $x = 2\pi$, το $f(0) = f(2\pi) = \sigma\upsilon\nu 0 = \sigma\upsilon\nu 2\pi = 1$ και ελάχιστο για $x = \pi$, το $f(\pi) = \sigma\upsilon\nu \pi = -1$
- Η γραφική παράσταση της $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Τριγωνομετρικές εξισώσεις

- $\eta\mu x = \eta\mu \theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2k\pi + (\pi - \theta) \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$
- $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2k\pi - \theta \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$
- $\epsilon\varphi x = \epsilon\varphi \theta \text{ ή } \sigma\varphi x = \sigma\varphi \theta \Leftrightarrow x = k\pi + \theta, k \in \mathbb{Z}$

Διάφοροι χρήσιμοι τύποι

- Τύπος απόστασης μεταξύ δύο σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
- Μήκος κύκλου ακτίνας ρ : $L = 2\pi\rho$
- Εμβαδόν κύκλου ακτίνας ρ : $E = \pi\rho^2$