

Εξισώσεις α βαθμού

Ορισμός

Κάθε εξίσωση της μορφής $ax + \beta = 0$ με $a \neq 0$, ονομάζεται **εξίσωση 1^{ου} βαθμού**.

Ορισμός

Λύση ή ρίζα της εξίσωσης $ax + \beta = 0$, $a \neq 0$ ονομάζεται ένας αριθμός ρ που την επαληθεύει, δηλαδή $a\rho + \beta = 0$.

Επίλυση της εξίσωσης $ax + \beta = 0$

Η επίλυση της εξίσωσης $ax + \beta = 0$ γίνεται ως εξής:

$$ax + \beta = 0 \Leftrightarrow ax = -\beta \quad (1)$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1^η περίπτωση: Αν $a \neq 0$, τότε από την εξίσωση (1) έχουμε:

$$\frac{ax}{a} = -\frac{\beta}{a} \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{a}$$

δηλαδή η εξίσωση έχει **μοναδική λύση**.

2^η περίπτωση: Αν $a = 0$, τότε η εξίσωση (1) γίνεται $0x = -\beta$, η οποία:

- αν είναι $\beta \neq 0$, θα λέμε ότι είναι **αδύνατη** δηλαδή δεν έχει καμία λύση.
- αν είναι $\beta = 0$, τότε θα πάρει την μορφή $0x = 0$ η οποία αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x , είναι δηλαδή **ταυτότητα** (ή **αόριστη**).

Παρατηρήσεις

1. Αν μια εξίσωση είναι της μορφής $0x = 0$, τότε είναι ταυτότητα (ή αόριστη) δηλαδή αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
2. Αν μια εξίσωση είναι της μορφής $0x = \beta$ με $\beta \neq 0$, τότε είναι αδύνατη (δεν έχει καμία λύση).
3. Αν μια εξίσωση είναι της μορφής $ax = 0$ με $a \neq 0$, τότε έχει μοναδική λύση την $x = \frac{0}{a} \Leftrightarrow x = 0$.

Βήματα επίλυσης εξισώσεων πρώτου βαθμού

Για να λύσουμε μια εξίσωση 1^{ου} βαθμού, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- 1) Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών (αν υπάρχουν) , πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους με το Ε.Κ.Π των παρονομαστών . Όταν απλοποιούμε τα κλάσματα βάζουμε τους αριθμητές σε παρένθεση αν χρειάζεται.
- 2) Κάνουμε απαλοιφή παρενθέσεων (επιμεριστική).
- 3) Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους (όποιος όρος αλλάξει μέλος αλλάζει και πρόσημο) .
- 4) Κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων (προσθέσεις και αφαιρέσεις).
- 5) Διαιρούμε και τα δύο μέλη με τον συντελεστή του αγνώστου (δηλαδή με τον αριθμό που πολλαπλασιάζεται με τον άγνωστο).

Παράδειγμα 1

Να λύσετε την εξίσωση:

$$4(5 - x) - 2(x - 3) = -(4 - x) - 3(x + 2)$$

Λύση

$$4(5 - x) - 2(x - 3) = -(4 - x) - 3(x + 2) \Leftrightarrow$$

$$20 - 4x - 2x + 6 = -4 + x - 3x - 6 \Leftrightarrow$$

$$-4x - 2x - x + 3x = -4 - 6 - 6 - 20 \Leftrightarrow$$

$$-7x + 3x = -36 \Leftrightarrow$$

$$-4x = -36 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-4x}{-4} = \frac{-36}{-4} \Leftrightarrow$$

$$x = 9$$

Κάνουμε πρώτα την επιμεριστική ιδιότητα για να φύγουν οι παρενθέσεις.

Χωρίσαμε γνωστούς από αγνώστους και αλλάξαμε το πρόσημο σε όποιον όρο άλλαξε μέλος.

Κάναμε αναγωγή ομοίων όρων, δηλαδή προσθέσεις και αφαιρέσεις.

Διαιρέσαμε και τα δύο μέλη με τον συντελεστή του αγνώστου, δηλαδή με το -4 .

Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = 9$.

Παράδειγμα 2

Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{x+1}{2} - \frac{3x-1}{6}$$

Λύση

Το Ε.Κ.Π. των παραιννομαστών 3,2 και 6 είναι το 6. Άρα έχουμε:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{x+1}{2} - \frac{3x-1}{6} \Leftrightarrow$$

$$6 \cdot \frac{x-2}{3} = 6 \cdot \frac{x+1}{2} - 6 \cdot \frac{3x-1}{6} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{x-2}{3} = \frac{3}{6} \cdot \frac{x+1}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{3x-1}{6} \Leftrightarrow$$

$$2(x-2) = 3(x+1) - 1(3x-1) \Leftrightarrow$$

$$2x - 4 = 3x + 3 - 3x + 1 \Leftrightarrow$$

$$2x - \cancel{3x} + \cancel{3x} = 4 + 3 + 1 \Leftrightarrow$$

$$2x = 8 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x = 4}$$

Πολλαπλασιάσαμε όλους τους όρους της εξίσωσης με το ΕΚΠ.

Γράψαμε τι έχει μείνει βάζοντας τους αριθμητές σε παρένθεση.

Διαιρέσαμε το ΕΚΠ με τον κάθε παραιννομαστή και γράψαμε το αποτέλεσμα.

Από εδώ και κάτω ακολουθούν τα βήματα που εφάρμοσα και στο προηγούμενο παράδειγμα.

Άρα η εξίσωση έχει **μοναδική λύση** την $x = 4$.

Παράδειγμα 3

Να λύσετε την εξίσωση:

$$3 - 5x - 2(4 - 5x) = -4(x - 1) + 3(3x - 2) - 3$$

Λύση

$$3 - 5x - 2(4 - 5x) = -4(x - 1) + 3(3x - 2) - 3 \Leftrightarrow$$

$$3 - 5x - 8 + 10x = -4x + 4 + 9x - 6 - 3 \Leftrightarrow$$

$$-5x + 10x + 4x - 9x = -3 + 8 + 4 - 6 - 3 \Leftrightarrow$$

$$-14x + 14x = -12 + 12 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{0x = 0}$$

Άρα η εξίσωση είναι **ταυτότητα**, δηλαδή έχει άπειρες λύσεις.

Παράδειγμα 4

Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{1}{2}(x+1) = x - \frac{1}{4}(2x+3)$$

Λύση

$$\frac{1}{2}(x+1) = x - \frac{1}{4}(2x+3) \Leftrightarrow$$

$$\frac{x+1}{2} = x - \frac{2x+3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{4} \cdot \frac{x+1}{2} = 4 \cdot x - 4 \cdot \frac{2x+3}{4} \Leftrightarrow$$

$$2(x+1) = 4x - 1(2x+3) \Leftrightarrow$$

$$2x+2 = 4x-2x-3 \Leftrightarrow$$

$$2x-4x+2x = -2-3 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{0x = -5}$$

Άρα η εξίσωση είναι **αδύνατη**, δηλαδή δεν έχει καμία λύση.

Γνωρίζουμε ότι:

- $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \gamma = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta}$
- $\frac{1}{\nu} \cdot \kappa = \frac{\kappa}{\nu}$