

2.1 Οι πράξεις και οι ιδιότητες τους

• Ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha\beta = \beta\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$
Ουδέτερο Στοιχείο	$\alpha + 0 = \alpha$	$\alpha \cdot 1 = \alpha$
Επιμεριστική	$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$	

Ορισμός

Δύο αριθμοί α και β λέγονται **αντίθετοι** όταν έχουν άθροισμα μηδέν, δηλαδή όταν ισχύει:

$$\alpha + \beta = 0$$

Ο αντίθετος του αριθμού α είναι ο $-\alpha$.

Ορισμός

Δύο αριθμοί α και β (διάφοροι του μηδενός) λέγονται **αντίστροφοι** όταν έχουν γινόμενο τη μονάδα, δηλαδή όταν ισχύει:

$$\alpha\beta = 1$$

Ο αντίστροφος του αριθμού $\alpha \neq 0$ είναι ο $\frac{1}{\alpha}$.

Παρατηρήσεις

1. Ο αριθμός 0 λέγεται και **ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης**, διότι προστιθέμενος σε οποιονδήποτε αριθμό δεν τον μεταβάλλει. Δηλαδή: $\alpha + 0 = \alpha$.

2. Ο αριθμός 1 λέγεται και **ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού**, διότι οποιοσδήποτε αριθμός πολλαπλασιάζεται με αυτόν δεν μεταβάλλεται. Δηλαδή: $\alpha \cdot 1 = \alpha$.

3. Η **αφαίρεση** δύο αριθμών α και β ορίζεται με τη βοήθεια της πρόσθεσης ως εξής:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

Δηλαδή για να βρούμε τη διαφορά $\alpha - \beta$, προσθέτουμε στον μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου.

4. Το **πηλίκιο** δύο αριθμών α και β , με $\beta \neq 0$, ορίζεται με τη βοήθεια του πολλαπλασιασμού ως εξής:

$$\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}, \quad \beta \neq 0$$

Δηλαδή για να βρούμε το πηλίκιο $\alpha : \beta$, με $\beta \neq 0$, πολλαπλασιάζουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

• Ιδιότητες των πράξεων και ισότητες

Για τις τέσσερις πράξεις και την ισότητα ισχύουν και οι ακόλουθες ιδιότητες που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο:

1. Αν $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta$, τότε $\alpha + \gamma = \beta + \delta$

δηλαδή μπορούμε να προσθέσουμε κατά μέλη δυο ισότητες.

2. Αν $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta$, τότε $\alpha\gamma = \beta\delta$

δηλαδή μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δυο ισότητες.

3. Αν $\alpha = \beta$, τότε $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$

δηλαδή, μπορούμε και στα δυο μέλη μιας ισότητας να προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό γ .

4. Αν $\alpha = \beta$, τότε $\alpha - \gamma = \beta - \gamma$

δηλαδή, μπορούμε και στα δυο μέλη μιας ισότητας να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό γ .

5. Αν $\gamma \neq 0$, τότε $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma = \beta\gamma$

δηλαδή, μπορούμε τα μέλη μιας ισότητας να τα πολλαπλασιάσουμε ή να τα διαιρέσουμε με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό γ .

6. Αν $\alpha \cdot \beta = 0$, τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$ δηλαδή, το γινόμενο δυο πραγματικών είναι ίσο με μηδέν αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους δυο είναι μηδέν.

7. Αν $\alpha \cdot \beta \neq 0$, τότε $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$ δηλαδή, το γινόμενο δυο πραγματικών είναι διαφορετικό του μηδενός αν και μόνο αν και οι δυο είναι διαφορετικοί του μηδενός.

Σχόλιο

Στην ιδιότητα: $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha\gamma = \beta\gamma$ ο αριθμός γ μπορεί να ισούται με μηδέν.

Όμως στην αντίστροφη πρόταση: $\alpha\gamma = \beta\gamma \Rightarrow \alpha = \beta$ που διαγράφουμε τον αριθμό γ και από τα δυο μέλη, διαιρώντας με αυτόν, πρέπει να είναι διαφορετικός του μηδενός.

• Πολλαπλάσια ακέραιου αριθμού-Άρτιοι και περιττοί αριθμοί

➤ Ένας ακέραιος αριθμός β είναι πολλαπλάσιο ενός ακέραιου αριθμού α , όταν υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$, ώστε:

$$\beta = k\alpha$$

➤ Ένας ακέραιος αριθμός λέγεται **άρτιος** όταν διαιρείται με το 2 (ή είναι πολλαπλάσιο του 2). Για να γενικεύσουμε τους άρτιους αριθμούς τους γράφουμε στην μορφή:

$$\alpha = 2k, \quad \text{όπου } k \in \mathbb{Z}$$

➤ Ένας ακέραιος αριθμός λέγεται **περιττός** όταν δε διαιρείται με το 2. Για να γενικεύσουμε τους περιττούς αριθμούς τους γράφουμε στην μορφή:

$$\alpha = 2k + 1, \quad \text{όπου } k \in \mathbb{Z}$$

• Αναλογίες-Ιδιότητες αναλογιών

Ορισμός

Λόγος δύο αριθμών ονομάζουμε το πηλίκο της διαίρεσης τους. Δηλαδή ο λόγος των αριθμών α και β (με $\beta \neq 0$) είναι:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \alpha : \beta \quad \text{με } \beta \neq 0$$

Ορισμός

Οι αριθμοί α, β λέμε ότι είναι **ανάλογοι** των αριθμών γ, δ , όταν ισχύει $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ (1). Η ισότητα (1) λέγεται **αναλογία**.

Οι αναλογίες έχουν τις εξής ιδιότητες:

1. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma, \quad \beta\delta \neq 0$

2. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}, \quad \beta\gamma\delta \neq 0$

3. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}, \quad \beta\gamma\delta \neq 0$

4. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, τότε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}, \quad \beta\delta(\beta+\delta) \neq 0$

• Δυνάμεις

Ορισμός

Η **δύναμη** με βάση έναν πραγματικό αριθμό α και εκθέτη ένα φυσικό αριθμό $n > 1$ συμβολίζεται με α^n και είναι ένα γινόμενο από n παράγοντες ίσους με α . Δηλαδή:

$$\alpha^n = \overbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}^{n \text{ παράγοντες}} \quad (n > 1)$$

Ιδιότητες δυνάμεων

1. $\alpha^1 = \alpha$

2. $\alpha^0 = 1 \quad \text{με } \alpha \neq 0$

3. $1^n = 1$

4. $0^n = 0 \quad \text{με } n \neq 0$

5. $\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n} \quad \text{με } \alpha \neq 0$

6. $\frac{1}{\alpha^{-n}} = \alpha^n \quad \text{με } \alpha \neq 0$

7. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-n} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \quad \text{με } \alpha, \beta \neq 0$

8. $\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$

9. $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$

10. $\alpha^n \cdot \beta^n = (\alpha \cdot \beta)^n$

11. $\frac{\alpha^n}{\beta^n} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n$

12. $(\alpha^\mu)^n = \alpha^{\mu \cdot n}$

Πρόσημο δύναμης

➤ Όταν η **βάση** μιας δύναμης είναι **θετικός** αριθμός τότε η **δύναμη** είναι **θετική**. Δηλαδή:

$$\alpha > 0 \Rightarrow \alpha^n > 0$$

➤ Όταν η **βάση** μιας δύναμης είναι **αρνητικός** αριθμός τότε:

➤ η **δύναμη** θα είναι **θετική** αν ο **εκθέτης** είναι **άρτιος**, δηλαδή

$$(\alpha < 0 \text{ και } n \text{ άρτιος}) \Rightarrow \alpha^n > 0 \quad \text{ή} \quad (-\alpha)^n = \alpha^n \text{ αν } n \text{ άρτιος}$$

➤ η **δύναμη** θα είναι **αρνητική** αν ο **εκθέτης** είναι **περιττός**, δηλαδή

$$(\alpha < 0 \text{ και } n \text{ περιττός}) \Rightarrow \alpha^n < 0 \quad \text{ή} \quad (-\alpha)^n = -\alpha^n \text{ αν } n \text{ περιττός}$$

Παρατηρήσεις

1. Ισχύει ότι: $(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ -1, & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$

2. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha, \beta \neq 0$. Ισχύει η εξής συνεπαγωγή:

$$\alpha^n = \beta^n \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \text{ ή } \alpha = -\beta, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ \alpha = \beta, & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$$

3. Αν n φυσικός αριθμός με $n \geq 2$ τότε ισχύουν τα εξής:

$$10^n = 1 \overbrace{00 \dots 0}^{n \text{ μηδενικά}} \text{ και } 10^{-n} = \frac{1}{10^n} = 0, \overbrace{00 \dots 1}^{n \text{ δεκαδικά ψηφία}}$$

π.χ. $10^4 = 10.000$ και $10^{-3} = 0,001$

• Ταυτότητες

Ορισμός

Ταυτότητα λέμε κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών.

Οι βασικές ταυτότητες είναι οι παρακάτω:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Παρατηρήσεις

1) Δεν ισχύει $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ δηλαδή $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$.

2) Η ταυτότητα $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ μπορεί να πάρει την μορφή

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

3) Γνωρίζουμε ότι $(-a)^2 = a^2$ και $(-a)^3 = -a^3$. Οπότε:

- $(-a - b)^2 = [-(a + b)]^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ δηλαδή

$$(-a - b)^2 = (a + b)^2$$

- $(-a + b)^2 = [-(a - b)]^2 = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ δηλαδή

$$(-a + b)^2 = (a - b)^2$$

- $(-\alpha - \beta)^3 = [-(\alpha + \beta)]^3 = -(\alpha + \beta)^3 = -\alpha^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 - \beta^3$ δηλαδή

$$(-\alpha - \beta)^3 = -(\alpha + \beta)^3$$

- $(-\alpha + \beta)^3 = [-(\alpha - \beta)]^3 = -(\alpha - \beta)^3 = -\alpha^3 + 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ δηλαδή

$$(-\alpha + \beta)^3 = -(\alpha - \beta)^3$$

• Μέθοδοι απόδειξης

Για την απόδειξη ενός ισχυρισμού χρησιμοποιούμε μια από τις παρακάτω μεθόδους:

- 1) Ευθεία απόδειξη
- 2) Ταυτότητα υπό συνθήκη
- 3) απαγωγή σε άτοπο
- 4) Αντιπαράδειγμα

A. Ευθεία απόδειξη

Για να αποδείξουμε μια ταυτότητα χρησιμοποιούμε έναν από τους παρακάτω τρόπους:

1^{ος} τρόπος

Παίρνουμε το πιο σύνθετο μέλος και με κατάλληλους μετασχηματισμούς καταλήγουμε στο άλλο μέλος, (όταν λέμε μετασχηματισμούς εννοούμε: τις πράξεις, την παραγοντοποίηση, την εφαρμογή ταυτοτήτων κ.λ.π.).

2^{ος} τρόπος

Αν και τα δύο μέλη είναι πολύπλοκα, τότε παίρνουμε το 1^ο μέλος κάνουμε μετασχηματισμούς και καταλήγουμε σε μία παράσταση A . Στη συνέχεια παίρνουμε το 2^ο μέλος κάνουμε μετασχηματισμούς και καταλήγουμε σε μια παράσταση B . Αν $A = B$, τότε αποδείξαμε το ζητούμενο.

3^{ος} τρόπος

Παίρνουμε την ισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε και με **ισοδυναμίες**, αφού κάνουμε μετασχηματισμούς καταλήγουμε σε μια ισότητα, η οποία:

- ή είναι προφανής από θεωρία
- ή ισχύει από υπόθεση.

B. Ταυτότητα υπό συνθήκη

1η περίπτωση: Αντικατάσταση από την συνθήκη

Για να αποδείξουμε μια ταυτότητα με την προϋπόθεση ότι ισχύει κάποια συνθήκη, τότε ξεκινάμε από την συνθήκη και με κατάλληλους μετασχηματισμούς καταλήγουμε στην ισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε.

2η περίπτωση: Αντικατάσταση από την συνθήκη

Για να αποδείξουμε μια ταυτότητα με την προϋπόθεση ότι ισχύει κάποια συνθήκη, ακολουθούμε τις γενικές μεθόδους ευθείας απόδειξης χρησιμοποιώντας τη δοσμένη συνθήκη είτε όπως είναι είτε λύνοντας την πρώτα ως προς μια μεταβλητή και στη συνέχεια να την αντικαταστήσουμε στο ένα ή και στα δύο μέλη της ταυτότητας που θέλουμε να αποδείξουμε.

Γ. Η μέθοδος απαγωγής σε άτοπο

Μπορούμε να αποδείξουμε έναν ισχυρισμό, εφαρμόζοντας τη μέθοδο απαγωγής σε άτοπο. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται ως εξής:

Υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός που θέλουμε να αποδείξουμε δεν ισχύει, οπότε θα ισχύει η άρνηση του ισχυρισμού. Χρησιμοποιώντας σωστούς συλλογισμούς καταλήγουμε σε ένα συμπέρασμα που έρχεται σε αντίθεση με αυτό που γνωρίζουμε ότι ισχύει. Καταλήγουμε όπως λέμε σε άτοπο. Άρα ο ζητούμενος ισχυρισμός (που υποθέσαμε ότι δεν ισχύει) είναι τελικά σωστός.

Δ. Αντιπαράδειγμα

Για να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός **δεν είναι αληθής**, αρκεί να βρούμε ένα παράδειγμα για το οποίο ο συγκεκριμένος ισχυρισμός δεν ισχύει. Αρκεί δηλαδή να βρούμε, όπως λέμε, ένα αντιπαράδειγμα.

• Παραγοντοποίηση

Ορισμός

Η διαδικασία με την οποία μια παράσταση που είναι άθροισμα, μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων, λέγεται **παραγοντοποίηση**.

Μέθοδοι παραγοντοποίησης

- Κοινός παράγοντας
- Ομαδοποίηση
- Ταυτότητες

A. Κοινός παράγοντας

Στη μέθοδο αυτή παρατηρούμε αν όλοι οι όροι της παράστασης έχουν κάποιο κοινό παράγοντα και με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας $\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta = \alpha(\beta + \gamma + \delta)$ μετατρέπουμε την παράσταση σε γινόμενο.

B. Ομαδοποίηση

Στην μέθοδο αυτή, αν δεν μπορούμε να βγάλουμε κοινό παράγοντα από όλους τους όρους της παράστασης, χωρίζουμε τους όρους σε ομάδες και βγάζουμε κοινό παράγοντα σε κάθε ομάδα. Αφού τελειώσουμε την παραγοντοποίηση κάθε ομάδας πρέπει οι παρενθέσεις που θα μείνουν να είναι ίδιες ώστε να ξαναβγεί κοινός παράγοντας.

Διάσπαση όρου

Αν έχουμε μια παράσταση με τρεις όρους και δεν υπάρχει κοινός παράγοντας τότε κάνουμε το εξής: διασπάμε τον ένα από τους τρεις όρους (συνήθως τον μεσαίο) σε δύο κατάλληλους όρους και στη συνέχεια κάνουμε ομαδοποίηση.

Γ. Ταυτότητες

Αν οι δύο προηγούμενοι τρόποι δεν μπορούν να εφαρμοστούν, τότε για να παραγοντοποιήσουμε την παράσταση χρησιμοποιούμε μια από τις παρακάτω ταυτότητες:

$$(1) \begin{cases} \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 \\ \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 \end{cases}$$

$$(2) \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

$$(3) \begin{cases} \alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) \\ \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) \end{cases}$$

Σχόλιο: Μία ένδειξη για το πια ταυτότητα μπορεί να υπάρχει στη παράσταση αποτελεί το πλήθος των όρων που υπάρχουν. Έτσι αν υπάρχουν 2 όροι πιθανόν να έχουμε την ταυτότητα (2) ή (3) ενώ αν υπάρχουν 3 όροι πιθανόν να υπάρχουν οι ταυτότητες (1).