

2.2 Διάταξη πραγματικών αριθμών

Ορισμός της σύγκρισης δύο αριθμών- Διάταξη αριθμών

- Ο αριθμός α είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό β και γράφουμε $\alpha > \beta$, όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι θετικός αριθμός. Δηλαδή:

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$$

Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει $\alpha > \beta$ ή $\alpha = \beta$, τότε γράφουμε $\alpha \geq \beta$ και διαβάζουμε « α μεγαλύτερος ή ίσος του β »

- Ο αριθμός α είναι μικρότερος από τον αριθμό β και γράφουμε $\alpha < \beta$, όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι αρνητικός αριθμός. Δηλαδή:

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0$$

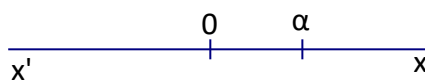
Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει $\alpha < \beta$ ή $\alpha = \beta$, τότε γράφουμε $\alpha \leq \beta$ και διαβάζουμε « α μικρότερος ή ίσος του β »

Παρατηρήσεις

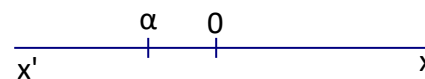
1. Η ανισότητα $\alpha > \beta$ γεωμετρικά σημαίνει ότι πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών ο αριθμός α βρίσκεται πιο δεξιά από τον αριθμό β .



2. Κάθε θετικός αριθμός α είναι μεγαλύτερος από το μηδέν και γράφουμε $\alpha > 0$. Γεωμετρικά σημαίνει ότι πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών ο αριθμός α βρίσκεται πιο δεξιά από το μηδέν.



3. Κάθε αρνητικός αριθμός α είναι μικρότερος από το μηδέν και γράφουμε $\alpha < 0$. Γεωμετρικά σημαίνει ότι πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών ο αριθμός α βρίσκεται πιο αριστερά από το μηδέν.



4. Ένας αριθμός α που είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το μηδέν λέγεται μη αρνητικός και γράφουμε $\alpha \geq 0$.

5. Ένας αριθμός α που είναι μικρότερος ή ίσος από το μηδέν λέγεται μη θετικός και γράφουμε $\alpha \leq 0$.

Κανόνες προσήμου για το άθροισμα, το γινόμενο και το πηλίκο δύο αριθμών

1.

$$\boxed{\text{Αν } \alpha > 0 \text{ και } \beta > 0, \text{ τότε } \alpha + \beta > 0}$$

δηλαδή το άθροισμα δυο θετικών αριθμών είναι θετικός αριθμός.

2.

$$\boxed{\text{Αν } \alpha < 0 \text{ και } \beta < 0, \text{ τότε } \alpha + \beta < 0}$$

δηλαδή το άθροισμα δύο αρνητικών αριθμών είναι αρνητικός αριθμός.

3.

$$\boxed{\text{Αν } \alpha, \beta \text{ ομόσημοι, τότε } \alpha \cdot \beta > 0 \text{ και } \frac{\alpha}{\beta} > 0}$$

δηλαδή το γινόμενο και το πηλίκο δυο ομόσημων αριθμών είναι θετικός αριθμός.

4.

$$\boxed{\text{Αν } \alpha, \beta \text{ ετερόσημοι, τότε } \alpha \cdot \beta < 0 \text{ και } \frac{\alpha}{\beta} < 0}$$

δηλαδή το γινόμενο και το πηλίκο δυο ετερόσημων αριθμών είναι αρνητικός αριθμός.

5. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^2 \geq 0$ δηλαδή το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού είναι μεγαλύτερος ή ίσος του μηδενός (μη αρνητικός).

Στην ανισότητα $\alpha^2 \geq 0$, η ισότητα $\alpha^2 = 0$ ισχύει μόνο όταν $\alpha = 0$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η ανισότητα $\alpha^2 > 0$ ισχύει για κάθε $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Επομένως:

$$\begin{aligned} &\bullet \alpha^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R} \\ &\bullet \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \\ &\bullet \alpha^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \end{aligned}$$

6.

$$\boxed{\text{Για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ ισχύει } \alpha^2 + \beta^2 \geq 0}$$

δηλαδή το άθροισμα δυο μη αρνητικών αριθμών είναι μη αρνητικός αριθμός.

Στην ανισότητα $\alpha^2 + \beta^2 \geq 0$, η ισότητα $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ ισχύει μόνο όταν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$ δηλαδή μόνο όταν και οι δυο είναι ταυτόχρονα μηδέν. Επομένως:

$$\boxed{\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0.}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η ανισότητα $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ ισχύει όταν $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ δηλαδή τουλάχιστον ένας από τους δύο δεν είναι μηδέν που σημαίνει ότι τα α, β δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα. Επομένως:

$$\boxed{\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0.}$$

7.

$$\boxed{\text{Αν } \alpha, \beta \text{ ομόσημοι, τότε ισχύει } \alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}}$$

δηλαδή όταν αντιστρέφουμε τους όρους μιας ανισότητας και οι όροι είναι ομόσημοι **αλλάζει** η φορά της ανισότητας.

Ιδιότητες των ανισοτήτων

1. Μεταβατική ιδιότητα

$$(\alpha > \beta \text{ και } \beta > \gamma) \Rightarrow \alpha > \gamma$$

2. Πρόσθεση ενός αριθμού και στα δύο μέλη μια ανισότητας

$$\alpha > \beta \stackrel{+\gamma}{\Leftrightarrow} \alpha + \gamma > \beta + \gamma$$

δηλαδή σε μία ανισότητα μπορούμε να προσθέσουμε και στα δύο μέλη της τον ίδιο αριθμό (θετικό ή αρνητικό) χωρίς να αλλάξει η φορά της.

3. Πολλαπλασιασμός των δύο μελών μιας ανισότητας με έναν αριθμό

$$\text{Αν } \gamma > 0, \text{ τότε } \alpha > \beta \stackrel{\gamma > 0}{\Leftrightarrow} \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$$

δηλαδή σε μια ανισότητα μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της με έναν θετικό αριθμό χωρίς να αλλάξει η φορά της.

$$\text{Αν } \gamma < 0, \text{ τότε } \alpha > \beta \stackrel{\gamma < 0}{\Leftrightarrow} \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$$

δηλαδή σε μια ανισότητα μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της με έναν αρνητικό αριθμό **αλλάζοντας** όμως την φορά της ανισότητας.

4. Διάρθρωση των δύο μελών μιας ανισότητας με έναν αριθμό

$$\text{Αν } \gamma > 0, \text{ τότε } \alpha > \beta \stackrel{\gamma > 0}{\Leftrightarrow} \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$$

δηλαδή σε μια ανισότητα μπορούμε να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της με έναν θετικό αριθμό χωρίς να αλλάξει η φορά της.

$$\text{Αν } \gamma < 0, \text{ τότε } \alpha > \beta \stackrel{\gamma < 0}{\Leftrightarrow} \frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$$

δηλαδή σε μια ανισότητα μπορούμε να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της με έναν αρνητικό αριθμό **αλλάζοντας** όμως την φορά της ανισότητας.

5. Πρόσθεση κατά μέλη δύο ανισοτήτων

$$\left. \begin{array}{l} \alpha > \beta \\ \gamma > \delta \end{array} \right\} \stackrel{+}{\Rightarrow} \alpha + \gamma > \beta + \delta$$

δηλαδή μπορούμε να προσθέσουμε κατά μέλη δύο ανισότητες που έχουν την ίδια φορά χωρίς να αλλάξει η φορά.

6. Πολλαπλασιασμός κατά μέλη δύο ανισοτήτων

$$\left. \begin{array}{l} \alpha > \beta > 0 \\ \gamma > \delta > 0 \end{array} \right\} \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$$

δηλαδή μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ανισότητες που έχουν την ίδια φορά και θετικά μέλη χωρίς να αλλάξει η φορά.

Παρατηρήσεις

1. Η ιδιότητα 5 ισχύει και για περισσότερες από δύο ανισότητες. Δηλαδή:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 > \beta_1 \\ \alpha_2 > \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n > \beta_n \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$$

2. Η ιδιότητα 6 ισχύει και για περισσότερες από δύο ανισότητες. Δηλαδή:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 > \beta_1 > 0 \\ \alpha_2 > \beta_2 > 0 \\ \vdots \\ \alpha_n > \beta_n > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n > \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \dots \cdot \beta_n$$

3. Δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε κατά μέλη δύο ανισότητες.

Παράδειγμα

Ισχύουν ότι $8 < 11$ και $2 < 9$. Αν τις αφαιρέσουμε κατά μέλη, προκύπτει:

$$8 - 2 < 11 - 9 \Leftrightarrow 6 < 2, \text{ που είναι λάθος.}$$

4. Δεν μπορούμε να διαιρέσουμε κατά μέλη δύο ανισότητες.

Παράδειγμα

Ισχύουν ότι $8 < 12$ και $2 < 4$. Αν τις διαιρέσουμε κατά μέλη, προκύπτει:

$$\frac{8}{2} < \frac{12}{4} \Leftrightarrow 4 < 3, \text{ που είναι λάθος.}$$

Ανισότητες και δυνάμεις

1. Αν $\alpha, \beta > 0$ και n θετικός ακέραιος ($n \in \mathbb{N}^*$), τότε:

$$\boxed{\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^n > \beta^n}$$

2. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και n περιττός θετικός ακέραιος (1,3,5,7,9 ...), τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$\boxed{\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^n > \beta^n}$$

3. Αν n άρτιος θετικός ακέραιος (2,4,6,8, ...), τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$\boxed{\text{Αν } \alpha, \beta > 0 \text{ τότε } \alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^n > \beta^n}$$

$$\boxed{\text{Αν } \alpha, \beta < 0 \text{ τότε } \alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^n < \beta^n}$$

δηλαδή όταν υψώσουμε σε άρτιο εκθέτη τους όρους μιας ανισότητας και οι όροι είναι θετικοί η φορά δεν αλλάζει ενώ όταν υψώσουμε σε άρτιο εκθέτη τους όρους μιας ανισότητας και οι όροι είναι αρνητικοί η φορά αλλάζει.

Παρατήρηση

Η φορά μιας ανισότητας αλλάζει στις παρακάτω περιπτώσεις:

- όταν πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με ένα αρνητικό αριθμό,
- όταν διαιρούμε και τα δύο μέλη με ένα αρνητικό αριθμό,
- όταν αντιστρέφουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας και τα μέλη είναι ομόσημοι αριθμοί και
- όταν υψώνουμε και τα δύο μέλη μια ανισότητας σε άρτιο εκθέτη και τα μέλη είναι αρνητικοί αριθμοί.

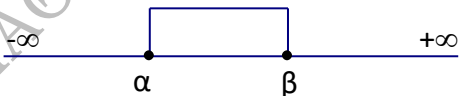
Διαστήματα

Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$, τότε ονομάζουμε **διαστήματα με άκρα τα α, β** καθένα από τα παρακάτω σύνολα:

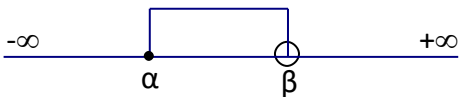
- $\{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x < \beta\} = (\alpha, \beta)$, το οποίο διαβάζεται ανοικτό διάστημα α, β και γράφουμε $x \in (\alpha, \beta)$.



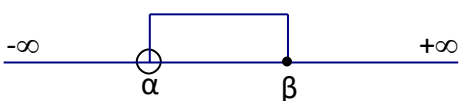
- $\{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x \leq \beta\} = [\alpha, \beta]$, το οποίο διαβάζεται κλειστό διάστημα α, β και γράφουμε $x \in [\alpha, \beta]$.



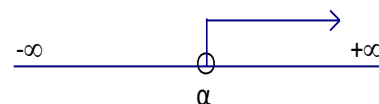
- $\{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x < \beta\} = [\alpha, \beta)$, το οποίο διαβάζεται κλειστό-ανοικτό διάστημα α, β και γράφουμε $x \in [\alpha, \beta)$.



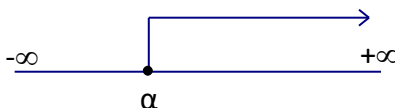
- $\{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x \leq \beta\} = (\alpha, \beta]$, το οποίο διαβάζεται ανοικτό-κλειστό διάστημα α, β και γράφουμε $x \in (\alpha, \beta]$.



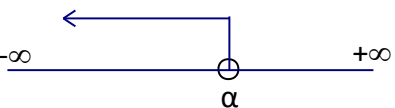
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x > \alpha\} = (\alpha, +\infty)$, το οποίο διαβάζεται ανοικτό α κόμμα συν άπειρο και γράφουμε $x \in (\alpha, +\infty)$.



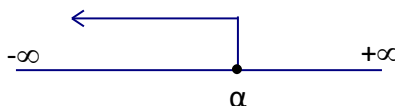
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \alpha\} = [\alpha, +\infty)$, το οποίο διαβάζεται κλειστό α κόμμα συν άπειρο και γράφουμε $x \in [\alpha, +\infty)$.



- $\{x \in \mathbb{R} \mid x < \alpha\} = (-\infty, \alpha)$, το οποίο διαβάζεται πλην άπειρο κόμμα α ανοικτό και γράφουμε $x \in (-\infty, \alpha)$.



- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \alpha\} = (-\infty, \alpha]$, το οποίο διαβάζεται πλην άπειρο κόμμα α κλειστό και γράφουμε $x \in (-\infty, \alpha]$.



Παρατηρήσεις

- 1) Τα σύμβολα $+\infty$ (συν άπειρο) και $-\infty$ (πλην άπειρο) δεν είναι πραγματικοί αριθμοί οπότε στα διαστήματα παριστάνονται με παρένθεση (ανοικτό).
- 2) Στον άξονα των πραγματικών αριθμών σημειώνουμε με κουκίδα το άκρο του διαστήματος που είναι κλειστό και με κυκλάκι το άκρο του διαστήματος που είναι ανοικτό.

ΧΟΥΣΤΟΥΛΑΚΗΣ ΛΕΥΤΕΡΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ