

2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικών αριθμών

Ορισμός

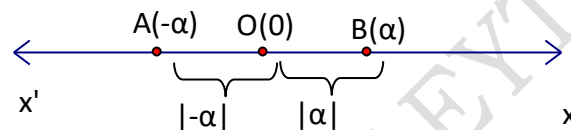
Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με $|\alpha|$ και ορίζεται από τον τύπο:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

Συμπεράσματα του ορισμού

Από τον ορισμό προκύπτουν ότι:

- $|\alpha| \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$, $|\alpha| > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$.
- $|\alpha| = |-\alpha|$, $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$, δηλαδή η απόλυτη τιμή δύο αντίθετων αριθμών είναι ίδια.



- $|\alpha| \geq \alpha \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| = \alpha \Leftrightarrow \alpha \geq 0$.
- $|\alpha| \geq -\alpha \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| = -\alpha \Leftrightarrow \alpha \leq 0$.
- $|\alpha|^2 = \alpha^2$, $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha - \beta)^2$ και γενικά $|\alpha|^{2\nu} = \alpha^{2\nu}$ όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Για την επίλυση εξισώσεων με απόλυτες τιμές χρησιμοποιούμε τα παρακάτω:

- $|x| = \theta \Leftrightarrow \begin{matrix} \theta > 0 \\ x = \theta \text{ ή } x = -\theta \end{matrix}$
- $|x| = \theta \Leftrightarrow \begin{matrix} \theta > 0 \\ \text{αδύνατη} \end{matrix}$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|x| = |\theta| \Leftrightarrow x = \theta \text{ ή } x = -\theta$
- $|x| + |y| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ και } y = 0$
- $|x| \neq \theta \Leftrightarrow \begin{matrix} \theta > 0 \\ x \neq \theta \text{ και } x \neq -\theta \end{matrix}$
- $|x| \neq \theta \Leftrightarrow \begin{matrix} \theta < 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix}$
- $|x| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$
- $|x| \neq |\theta| \Leftrightarrow x \neq \theta \text{ και } x \neq -\theta$
- $|x| + |y| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ ή } y \neq 0$

Για την επίλυση ανισώσεων με απόλυτες τιμές χρησιμοποιούμε τα παρακάτω:

- $|x| \geq \theta \Leftrightarrow \begin{matrix} \theta > 0 \\ x \geq \theta \text{ ή } x \leq -\theta \end{matrix}$
- $|x| \geq \theta \Leftrightarrow \begin{matrix} \theta < 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix}$
- $|x| \leq \theta \Leftrightarrow \begin{matrix} \theta > 0 \\ -\theta \leq x \leq \theta \end{matrix}$
- $|x| \leq \theta \Leftrightarrow \begin{matrix} \theta < 0 \\ \text{αδύνατη} \end{matrix}$
- $|x| < 0 \Leftrightarrow \text{αδύνατη}$
- $|x| \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|x| \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$
- $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$
- $|x| + |y| \geq 0 \Leftrightarrow x, y \in \mathbb{R}$
- $|x| + |y| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ ή } y \neq 0$

Ιδιότητες των απόλυτων τιμών

1. Η απόλυτη τιμή του γινομένου δύο αριθμών ισούται με το γινόμενο των απόλυτων τιμών τους. Δηλαδή:

$$|a \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$$

Απόδειξη

Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|a \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε:

$$\begin{aligned} |a \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta| &\Leftrightarrow |a \cdot \beta|^2 = (|\alpha| \cdot |\beta|)^2 \\ &\Leftrightarrow (\alpha \cdot \beta)^2 = |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2 \\ &\Leftrightarrow (\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2, \text{ που ισχύει.} \quad \square \end{aligned}$$

2. Η απόλυτη τιμή του πηλίκου δύο αριθμών ισούται με το πηλίκο των απόλυτων τιμών τους. Δηλαδή:

$$\left| \frac{a}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}, \quad \beta \neq 0$$

Απόδειξη

Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $\left| \frac{a}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} &\Leftrightarrow \left| \frac{a}{\beta} \right|^2 = \left(\frac{|\alpha|}{|\beta|} \right)^2 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 = \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}, \text{ που ισχύει.} \quad \square \end{aligned}$$

3. Η απόλυτη τιμή του αθροίσματος δύο αριθμών είναι μικρότερη ή ίση από το άθροισμα των απόλυτων τιμών τους. Δηλαδή:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

Απόδειξη

Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε:

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| &\Leftrightarrow |\alpha + \beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \\ &\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \leq |\alpha|^2 + 2|\alpha| \cdot |\beta| + |\beta|^2 \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \leq \alpha^2 + 2|\alpha \cdot \beta| + \beta^2 \\ &\Leftrightarrow 2\alpha\beta \leq 2|\alpha \cdot \beta| \\ &\Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta| \geq \alpha\beta, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι η ισότητα $|\alpha \cdot \beta| = \alpha \cdot \beta$ ισχύει αν και μόνο αν $\alpha \cdot \beta \geq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν. □

Παρατηρήσεις

1. Η ισότητα $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ ισχύει και για περισσότερους παράγοντες. Δηλαδή

$$|a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \dots \cdot |a_n|$$

Στην περίπτωση που είναι $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$, έχουμε: $|a^n| = |a|^n$.

2. Η ισότητα $|a + b| = |a| + |b|$ ισχύει, αν και μόνο αν $|ab| = ab \Leftrightarrow ab \geq 0$. Δηλαδή οι αριθμοί a και b είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν. Άρα:

$$|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab > 0 \text{ ή } ab = 0$$

3. Η ανισότητα $|a + b| \leq |a| + |b|$ ισχύει και για περισσότερους προσθετέους. Δηλαδή

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

4. Από την ανισότητα $|a + b| \leq |a| + |b|$ προκύπτει ότι:

$$|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$$

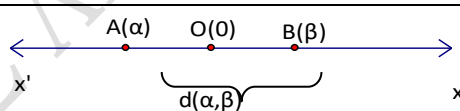
Δηλαδή:

$$|a - b| \leq |a| + |b|$$

Απόσταση δύο αριθμών

Ορισμός

Έστω δύο αριθμοί a, b οι οποίοι παριστάνονται πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών με τα σημεία A και B αντίστοιχα.



Απόσταση των αριθμών a και b λέγεται το μήκος του τμήματος AB , συμβολίζεται με $d(a, b)$, και ισούται με $|a - b|$. Δηλαδή:

$$(AB) = d(a, b) = |a - b|$$

Παρατηρήσεις

1. Ισχύει ότι $d(a, b) = d(b, a)$ αφού $|a - b| = |b - a|$.

2. Ισχύει ότι $d(a, 0) = d(0, a) = |a|$.

2.4. Τετραγωνικές ρίζες πραγματικών αριθμών

Τετραγωνική ρίζα μη αρνητικού αριθμού

Ορισμός

Η **τετραγωνική ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού a συμβολίζεται με $\sqrt{a}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον a .

Έστω x ο αριθμός αυτός τότε:

$$\sqrt{a} = x \iff x^2 = a \quad x \geq 0$$

Σύμφωνα με τον ορισμό έχουμε:

Αν $a \geq 0$, η $\sqrt{a}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = a$.

Ιδιότητες

Για τις τετραγωνικές ρίζες ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $\sqrt{a} \geq 0$, για κάθε $a \geq 0$.
2. $(\sqrt{a})^2 = a$, για κάθε $a \geq 0$.
3. $\sqrt{a^2} = a$, για κάθε $a \geq 0$.
4. $\sqrt{a^2} = |a|$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.
5. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$, για κάθε $a, b \geq 0$.
6. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, για κάθε $a \geq 0$ και $b > 0$.
7. $\sqrt{a^2 b} = |a| \sqrt{b}$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και $b \geq 0$.

Παρατηρήσεις

1. Δεν ισχύει $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b}$.
2. Για την πρόσθεση ριζών ισχύει: $\kappa\sqrt{a} + \lambda\sqrt{a} = (\kappa + \lambda)\sqrt{a}$.
3. Στην παράσταση $\sqrt{a}$, το a λέγεται υπόρριζο.
4. Η τετραγωνική ρίζα έχει νόημα μόνο όταν το υπόρριζο είναι μη αρνητικός αριθμός οπότε δεν ορίζεται η ρίζα αρνητικού αριθμού.
5. Σύμφωνα με τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας ισχύουν:
 $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, ..., $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{121} = 11$, $\sqrt{144} = 12$, $\sqrt{169} = 13$,
 $\sqrt{196} = 14$, $\sqrt{225} = 15$, $\sqrt{256} = 16$, $\sqrt{400} = 20$, $\sqrt{625} = 25$
6. Για τις ρίζες $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ είναι γνωστό ότι:
• $\sqrt{2} \cong 1,41$ • $\sqrt{3} \cong 1,73$ • $\sqrt{5} \cong 2,23$

2.4 ν-οστές ρίζες πραγματικών αριθμών

ν-οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού

Ορισμός

Έστω $n \in \mathbb{N}^*$, τότε ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού a είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στη n , δίνει τον a και συμβολίζεται με $\sqrt[n]{a}$.

Έστω x ο αριθμός αυτός τότε:

$$\sqrt[n]{a} = x \iff x^n = a \quad x \geq 0$$

Σύμφωνα με τον ορισμό έχουμε:

Αν $a \geq 0$, η $\sqrt[n]{a}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^n = a$.

Παρατηρήσεις

1. Στην παράσταση $\sqrt[n]{a}$, το n λέγεται δείκτης ή τάξη της ρίζας και το a λέγεται υπόρριζο.
2. Στην παράσταση $\sqrt[n]{a}$ έχουμε:
 - Για $n = 1$ γράφουμε $\sqrt[1]{a} = a$.
 - Για $n = 2$ είναι $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ δηλαδή η τετραγωνική ρίζα ή απλά ρίζα του a .
 - Για $n = 3$ είναι $\sqrt[3]{a}$ και διαβάζουμε τρίτη ρίζα ή τρίτης τάξης ρίζα του a .
 - Για $n = 4$ είναι $\sqrt[4]{a}$ και διαβάζουμε τέταρτη ρίζα ή τέταρτης τάξης ρίζα του a .

Ιδιότητες

1. $\sqrt[n]{a^n} = a$ και $\sqrt[n]{a^n} = a$ αν $a \geq 0$.
2. $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ αν $a \in \mathbb{R}$ και n άρτιος.
3. $\sqrt[n]{a^n} = a$ αν $a \geq 0$ και n περιττός.
4. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{a \cdot \beta}$ αν $a, \beta \geq 0$.

Απόδειξη

Έχουμε:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{a \cdot \beta} &\iff (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{\beta})^n = (\sqrt[n]{a \cdot \beta})^n \\ &\iff (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{\beta})^n = a \cdot \beta \\ &\iff a \cdot \beta = a \cdot \beta, \quad \text{που ισχύει.}\end{aligned}$$

□

5. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{\beta}} = \sqrt[n]{\frac{a}{\beta}}$ αν $a \geq 0$ και $\beta > 0$.

6. $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$ αν $a \geq 0$.

$$7. \sqrt[n]{a^n \beta} = a \sqrt[n]{\beta} \text{ αν } a, \beta \geq 0.$$

$$8. \alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt[n]{\alpha} < \sqrt[n]{\beta} \text{ αν } a, \beta \geq 0.$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της ν-οστής ρίζας ισχύουν:

$\sqrt[n]{0} = 0$	$\sqrt[n]{1} = 1$ αφού $\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{1^n} = 1$	$\sqrt[3]{8} = 2$ αφού $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$
$\sqrt[3]{27} = 3$ αφού $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$	$\sqrt[3]{64} = 4$ αφού $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$	$\sqrt[3]{125} = 5$ αφού $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$
$\sqrt[4]{16} = 2$ αφού $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$	$\sqrt[4]{81} = 3$ αφού $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$	$\sqrt[5]{32} = 2$ αφού $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$
$\sqrt[6]{64} = 2$ αφού $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$	$\sqrt[10]{1024} = 2$ αφού $\sqrt[10]{1024} = \sqrt[10]{2^{10}} = 2$	

Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Ορισμός

Αν $a > 0$, μ ακέραιος και n θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε:

$$a^{\frac{\mu}{n}} = \sqrt[n]{a^\mu}$$

Παρατηρήσεις

1. Αν μ, n θετικοί ακέραιοι, τότε ορίζουμε $0^{\frac{\mu}{n}} = 0$.

2. Αν $a \geq 0$, τότε $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$, $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$ κ.τ.λ.

3. Αν $n \in \mathbb{N}^*$ και $\mu \in \mathbb{N}$, τότε η παράσταση:

- $A = \sqrt[n]{x^\mu}$ όπου μ **περιττός** ορίζεται για $x^\mu \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ και ισχύει ότι

$$A = \sqrt[n]{x^\mu} = x^{\frac{\mu}{n}}$$

- $A = \sqrt[n]{x^\mu}$ όπου μ **άρτιος** ορίζεται για $x^\mu \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Όμως η ιδιότητα $\sqrt[n]{a^\mu} = a^{\frac{\mu}{n}}$ ισχύει για $a \geq 0$, οπότε εργαζόμαστε ως εξής:

$$A = \sqrt[n]{x^\mu} = \sqrt[n]{|x|^\mu} = |x|^{\frac{\mu}{n}} = \begin{cases} x^{\frac{\mu}{n}}, & \text{αν } x \geq 0 \\ (-x)^{\frac{\mu}{n}}, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$