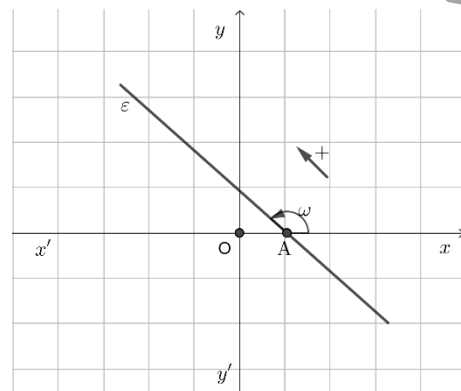
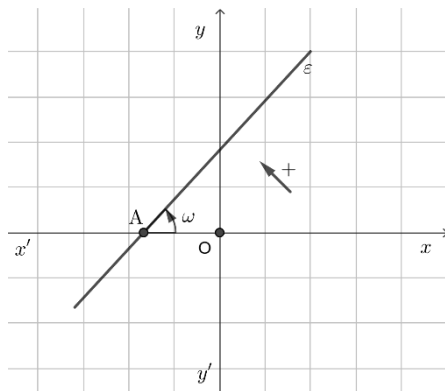


Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$

Γωνία ευθείας με τον άξονα $x'x$

Σε ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων Oxy δίνεται μια ευθεία ε .

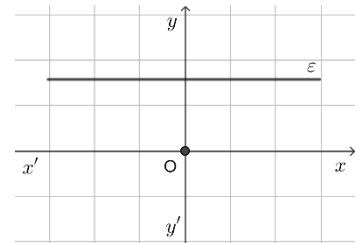
- Αν η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα σημείο A , τότε η γωνία ω που διαγράφει η ημιευθεία Ax , όταν στραφεί γύρω από τον σημείο A κατά τη θετική φορά (αντίθετη από τη φορά των δεικτών του ρολογιού) μέχρι να συμπίψει με την ευθεία ε , ονομάζεται **γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$** .



- Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ (ή ταυτίζεται με τον άξονα $x'x$), τότε θεωρούμε ότι η ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 0^\circ$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για τη γωνία ω που σχηματίζει μια ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ ισχύει:

$$0^\circ \leq \omega < 180^\circ$$



Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας

Ως **συντελεστή διεύθυνσης** ή **κλίση** μιας ευθείας ε ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ και συνήθως τον συμβολίζουμε με λ_ε ή απλά με λ . Είναι δηλαδή:

$$\lambda = \varepsilon\varphi\omega$$

Ισχύουν τα εξής:

- Αν η γωνία ω είναι οξεία, τότε $\lambda > 0$.
- Αν η γωνία ω είναι αμβλεία, τότε $\lambda < 0$.
- Αν $\omega = 0^\circ$, τότε $\lambda = 0$.
- Αν $\omega = 90^\circ$, δηλαδή αν η ευθεία ε είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, τότε **δεν ορίζουμε** συντελεστή διεύθυνσης για την ευθεία ε .

Παρατήρηση

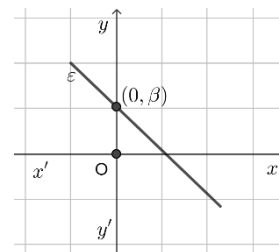
Γνωρίζουμε ότι:

- $\varepsilon\varphi 0^\circ = 0$
- $\varepsilon\varphi 45^\circ = 1$ και $\varepsilon\varphi 135^\circ = -1$
- Η $\varepsilon\varphi 90^\circ$ δεν ορίζεται.
- $\varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ και $\varepsilon\varphi 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\varepsilon\varphi 60^\circ = \sqrt{3}$ και $\varepsilon\varphi 120^\circ = -\sqrt{3}$

Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax + \beta$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax + \beta$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = ax + \beta$, η οποία:

- τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, \beta)$ και
- έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = a$.



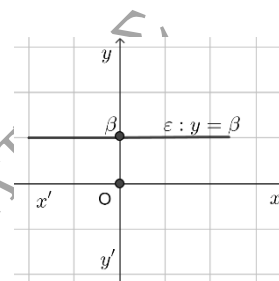
Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \beta$

Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$, στην περίπτωση που είναι $a = 0$, παίρνει τη μορφή:

$$f(x) = \beta \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

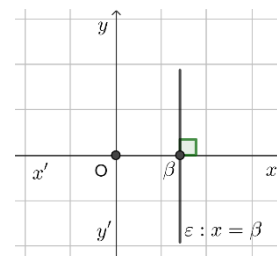
Μια συνάρτηση της μορφής $f(x) = \beta$ ($y = \beta$) λέγεται **σταθερή συνάρτηση** και η γραφική της παράσταση είναι μια ευθεία η οποία:

- είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$,
- τέμνει τον άξονα $y'y$ στο β .



Σχόλιο

Αν $\omega = 90^\circ$, δηλαδή δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης, τότε η ευθεία έχει εξίσωση της μορφής $x = \beta$ που είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το β του άξονα $x'x$. Η $x = \beta$ δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης αφού για ένα x αντιστοιχούν άπειρα y .



Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax$

Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$, στην περίπτωση που είναι $\beta = 0$, παίρνει τη μορφή:

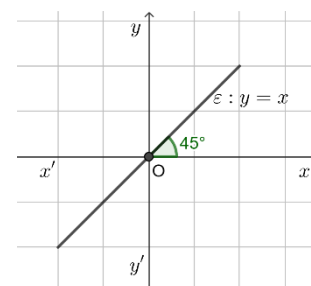
$$f(x) = ax \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax$ ($y = ax$) είναι μια ευθεία η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων.

Ειδικότερα:

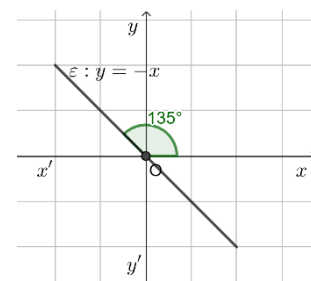
- Για $a = 1$ έχουμε την ευθεία $y = x$.

Για τη γωνία ω , που σχηματίζει η ευθεία αυτή με τον άξονα $x'x$, ισχύει $\varepsilon\varphi\omega = a = 1$, δηλαδή $\omega = 45^\circ$. Επομένως η ευθεία $y = x$ είναι η διχοτόμος των γωνιών $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ των αξόνων.



- Για $a = -1$ έχουμε την ευθεία $y = -x$.

Για τη γωνία ω , που σχηματίζει η ευθεία αυτή με τον άξονα $x'x$, ισχύει $\varepsilon\varphi\omega = a = -1$, δηλαδή $\omega = 135^\circ$. Επομένως η ευθεία $y = -x$ είναι η διχοτόμος των γωνιών $y\hat{O}x'$ και $y'\hat{O}x$ των αξόνων.



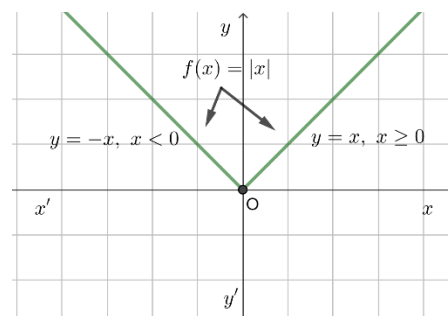
Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x|$

Σύμφωνα με τον ορισμό της απόλυτης τιμής έχουμε:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{αν } x < 0 \\ x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x|$ αποτελείται από τις δύο ημιευθείες:

- $y = -x$ με $x < 0$, δηλαδή την διχοτόμο της γωνίας $x'Oy$ και
- $y = x$ με $x \geq 0$, δηλαδή την διχοτόμο της γωνίας $x'Oy$.



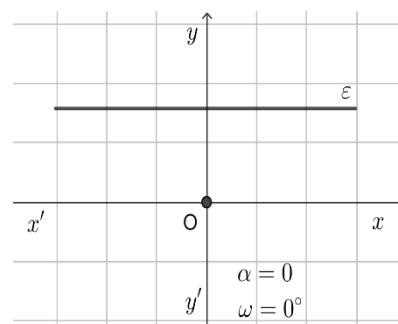
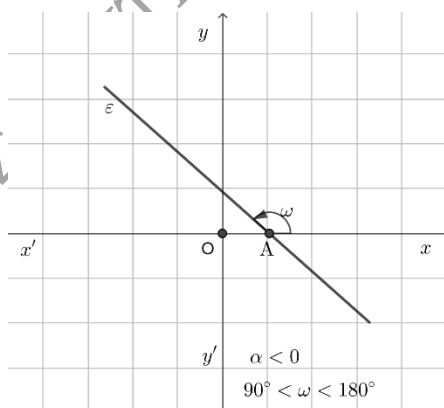
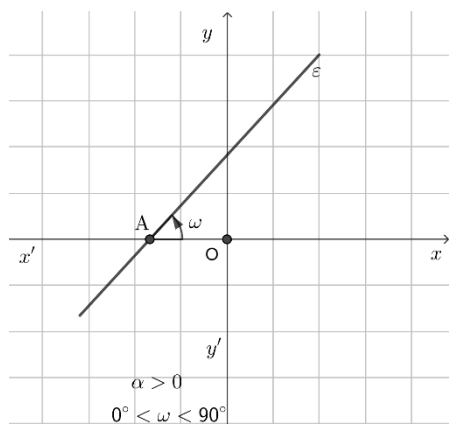
Είδος γωνίας που σχηματίζει η ευθεία $y = ax + \beta$ με τον άξονα x'

Όπως είδαμε, μια ευθεία ε με εξίσωση $y = ax + \beta$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = a$. Δηλαδή, αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x' , τότε ισχύει ότι:

$$\alpha = \varepsilon\varphi\omega$$

Είναι προφανές ότι:

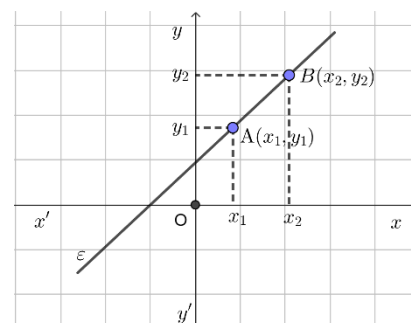
- Αν $a > 0$, τότε $0^\circ < \omega < 90^\circ$.
- Αν $a < 0$, τότε $90^\circ < \omega < 180^\circ$.
- Αν $a = 0$, τότε $\omega = 0^\circ$.



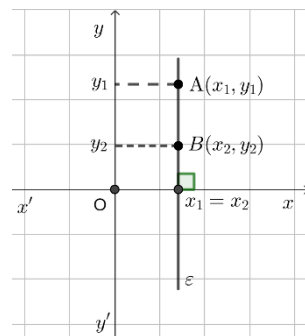
Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας όταν γνωρίζουμε δυο σημεία της

Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, με $x_1 \neq x_2$, είναι δύο σημεία μιας ευθείας ε με εξίσωση $y = ax + \beta$, τότε ισχύει ότι:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



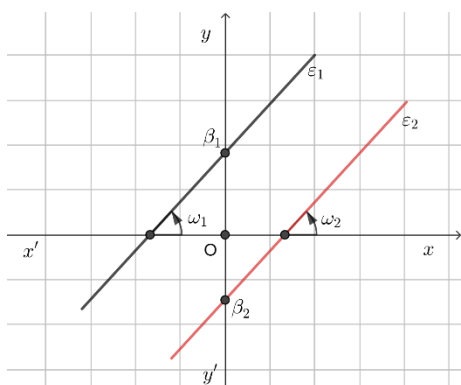
Αν $x_1 = x_2$, τότε δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης και η ευθεία σ' αυτή την περίπτωση θα είναι κατακόρυφη.



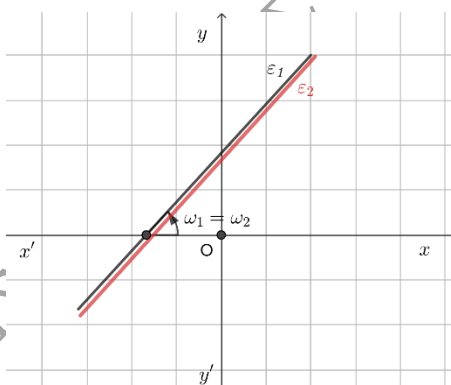
Σχετικές θέσεις δυο ευθειών

Ας θεωρήσουμε δυο ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $y = a_1x + \beta_1$ και $y = a_2x + \beta_2$ αντιστοίχως και ας υποθέσουμε ότι οι ευθείες αυτές σχηματίζουν με τον άξονα x' γωνίες ω_1 και ω_2 αντιστοίχως.

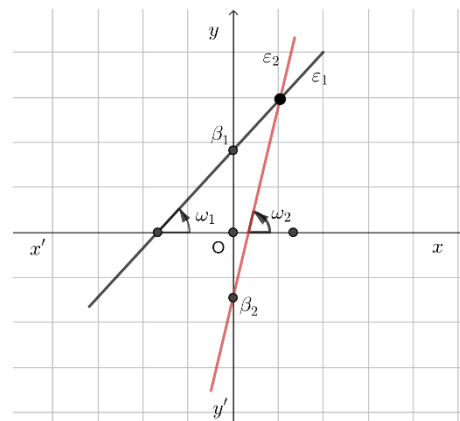
- Αν $\boxed{a_1 = a_2}$, τότε $\varepsilon\varphi\omega_1 = \varepsilon\varphi\omega_2$, οπότε $\omega_1 = \omega_2$ και άρα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι **παράλληλες ή συμπίπτουν**. Ειδικότερα:
 - Αν $\boxed{a_1 = a_2}$ και $\boxed{\beta_1 \neq \beta_2}$, τότε οι ευθείες είναι **παράλληλες** (Σχ1), ενώ
 - Αν $\boxed{a_1 = a_2}$ και $\boxed{\beta_1 = \beta_2}$, τότε οι ευθείες **ταυτίζονται** (Σχ2).
- Αν $\boxed{a_1 \neq a_2}$, τότε $\varepsilon\varphi\omega_1 \neq \varepsilon\varphi\omega_2$, οπότε $\omega_1 \neq \omega_2$ και άρα οι ευθείες ε_1 και ε_2 **τέμνονται** (Σχ3).



Σχ1



Σχ2



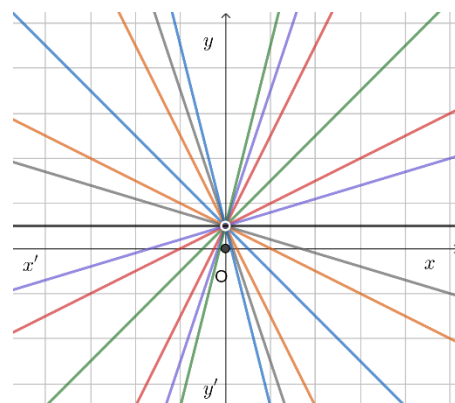
Σχ3

Οικογένειες ευθειών

- Οι ευθείες της μορφής $y = ax + 1$, με $a \in \mathbb{R}$, όπως είναι για παράδειγμα οι ευθείες:
 $y = x + 1$, $y = -x + 1$, $y = 2x + 1$ κτλ.
 διέρχονται όλες από το ίδιο σημείο, το 1 του άξονα $y'y$.

Γενικά

Οι ευθείες της μορφής $y = ax + \beta$, όπου **β σταθερό** και **a μεταβλητό** διέρχονται όλες από το σημείο β του άξονα $y'y$.



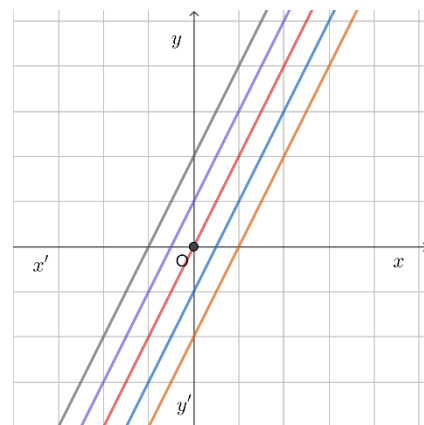
- Οι ευθείες της μορφής $y = ax + \beta$, με $\beta \in \mathbb{R}$, όπως είναι για παράδειγμα οι ευθείες:

$$y = 2x, \quad y = 2x - 1, \quad y = 2x + 3 \text{ κτλ.}$$

είναι παράλληλες μεταξύ τους, αφού έχουν όλες κλίση $\alpha = 2$.

Γενικά

Οι ευθείες της μορφής $y = ax + \beta$, όπου **α σταθερό** και **β μεταβλητό**, είναι όλες παράλληλες μεταξύ τους.



ΧΟΥΣΤΟΥΛΑΚΗΣ ΛΕΥΤΕΡΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ