

Ασκήσεις στα διανύσματα

- Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, με $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$.
 - Υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.
 - Αν τα διανύσματα $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $k\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι κάθετα να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού k .
 - Υπολογίστε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.
- Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\vec{AB} = (-4, -6)$ και $\vec{A\Gamma} = (2, -8)$.
 - Υπολογίστε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AM}$, όπου AM είναι η διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$.
 - Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι οξεία.
 - Αν στο τρίγωνο $AB\Gamma$ επιπλέον ισχύει $A(3, 1)$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών B και Γ .
- Δίνονται τα διανύσματα $\vec{OA} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{OB} = 3\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{O\Gamma} = 5\vec{i} - 5\vec{j}$, όπου $\vec{i}$, $\vec{j}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.
 - Να βρείτε τις συντεταγμένες των $\vec{AB}$ και $\vec{B\Gamma}$.
 - Εξετάστε αν τα σημεία A, B, Γ μπορεί να είναι κορυφές τριγώνου.
- Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, με $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}| = 4$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -8$.
 - Υπολογίστε την γωνία $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}$.
 - Να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} + 2\vec{\alpha} = \vec{0}$.
- Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, 3)$ και $\vec{\beta} = (-2, -\frac{1}{2})$.
 - Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.
 - Να βρείτε τον θετικό αριθμό x για τον οποίο τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v} = (x^2, x - 1)$ είναι κάθετα.
- Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, με $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$.
 - Υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

- (ii) Υπολογίστε την τιμή της παράστασης $\vec{a}^2 + \vec{a} \cdot (2\vec{\beta})$.
- (iii) Υπολογίστε το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{a} - 2\vec{\beta}$ και $\vec{\beta} + 2\vec{a}$.
7. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 6k)$ και $\vec{\beta} = (3k, -36k^2 + 6)$.
- (i) Αν τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ είναι αντίθετα, να δείξετε ότι $k = -\frac{1}{3}$.
- (ii) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε τα διανύσματα $\vec{\gamma} = (1, -2)$ και $\vec{\delta} = (\lambda, 3 - \lambda^2)$ να είναι παράλληλα.
8. Δίνονται τα σημεία $A(1 + 2\alpha, 4\alpha - 2)$ και $B(5\alpha + 1, -\alpha)$, όπου α ακέραιος.
- (i) Να γράψετε το $\vec{AB}$ συναρτήσει του α και να βρείτε το α ώστε $|\vec{AB}| = 10$.
- (ii) Έστω $\alpha = 2$. Να βρείτε σημείο M του άξονα $x'x$, ώστε το τρίγωνο MAB να είναι ισοσκελές με βάση την AB .
9. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{OA} = (4, -2)$, $\vec{OB} = (1, 2)$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.
- (i) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$ είναι κάθετα.
- (ii) Έστω $\Gamma(\alpha, \beta)$ σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B .
- (α) Να αποδείξετε ότι $\vec{AB} = (-3, 4)$ και $\vec{A\Gamma} = (\alpha - 4, \beta + 2)$.
- (β) Να αποδείξετε ότι $4\alpha + 3\beta = 10$.
- (γ) Αν επιπλέον τα διανύσματα $\vec{O\Gamma}$, $\vec{AB}$ είναι κάθετα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ .
10. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύουν

$$\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \quad \text{και} \quad \frac{|\vec{a}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{4} = \frac{|\vec{\gamma}|}{7}.$$

- (i) Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$.
- (ii) Να αποδείξετε ότι $7\vec{a} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}$.