

Ασκήσεις στις κωνικές τομές

1. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται της ευθείας

$$(\varepsilon_1) : 4x + 3y = 12$$

στο σημείο $A(3, 0)$ και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία

$$(\varepsilon_2) : y = x - 1.$$

2. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2x\eta\mu\theta - 2y\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta - 3 = 0 \quad (1), \quad \theta \in \mathbb{R}$$

- (i) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$.
- (ii) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των παραπάνω κύκλων ανήκουν στον μοναδιαίο κύκλο.

3. Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1 : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5^2 \quad \text{και} \quad C_2 : (x + 1)^2 + y^2 = 3^2.$$

- (i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) του κύκλου C_1 στο σημείο του $A(-1, 5)$.
- (ii) Να αποδείξετε ότι η (ε) εφάπτεται του κύκλου C_2 .

4. Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1 : x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0 \quad \text{και} \quad C_2 : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0.$$

- (i) Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.
- (ii) Να βρείτε το σημείο επαφής των 2 κύκλων.
- (iii) Να βρείτε την κοινή εσωτερική εφαπτομένη των 2 κύκλων.

5. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\lambda y + 4\lambda - 2 = 0 \quad (1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- (i) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) παριστάνει κύκλο.

- (ii) Να αποδείξετε ότι όλοι οι παραπάνω κύκλοι διέρχονται από ένα σταθερό σημείο, το οποίο να βρείτε.
6. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και η ευθεία $(\varepsilon) : y = x - 1$.
- (i) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) περνά από την εστία της παραβολής.
- (ii) Να βρείτε τα κοινά σημεία A, B της ευθείας (ε) και της παραβολής.
- (iii) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της παραβολής στα σημεία A, B είναι κάθετες.
7. Δίνεται η παραβολή $2y^2 = x$.
- (i) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.
- (ii) Να βρείτε την απόσταση του σημείου της $A(2, 1)$ από την εστία E και να την συγκρίνετε με την απόσταση (OE) .
- (iii) Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραβολή το σημείο της με την μικρότερη απόσταση από την εστία είναι η κορυφή της O .
- (iv) Να βρείτε σημείο στην παραβολή $y^2 = 2px$ που να απέχει από την εστία απόσταση διπλάσια της OE .
8. Ο κύκλος με κέντρο το $O(0, 0)$ και ακτίνα β διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, με $\alpha > \beta$. Να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης.
9. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει τις εστίες της στον άξονα $x'x$, συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων και:
- (i) έχει εστιακή απόσταση $(E'E) = 6$ και εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{3}{2}$.
- (ii) έχει εστιακή απόσταση $(E'E) = 20$ και ασύμπτωτες $y = \frac{4}{3}x$ και $y = -\frac{4}{3}x$.
- (iii) έχει εστιακή απόσταση $(E'E) = 4$ και ασύμπτωτες τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων.