

Ασκήσεις στον κύκλο

1. Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου

$$C : x^2 + y^2 = 25$$

στο σημείο του:

- (i) $A(3, 4)$
- (ii) $B(-4, \mu), \mu > 0$

2. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_1 που είναι ομόκεντρος του κύκλου:

$$C_2 : (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 7$$

και εφάπτεται της ευθείας:

$$(\varepsilon) : 4x - 3y + 2 = 0.$$

3. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται της ευθείας

$$(\varepsilon_1) : 4x + 3y = 12$$

στο σημείο $A(3, 0)$ και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία

$$(\varepsilon_2) : y = x - 1.$$

4. Δίνεται η εξίσωση

$$(2x - 1)^2 + 2y(2y + 1) = 0. \quad (1)$$

Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο και στη συνέχεια να βρείτε το κέντρο του K και την ακτίνα του ρ .

5. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + 4\lambda y + 5\lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \quad (1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- (i) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) παριστάνει κύκλο.
- (ii) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που ορίζονται από την (1) βρίσκονται σε ευθεία.

6. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2x\eta\mu\theta - 2y\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta - 3 = 0 \quad (1), \quad \theta \in \mathbb{R}$$

- (i) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$.
- (ii) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των παραπάνω κύκλων ανήκουν στον μοναδιαίο κύκλο.

7. Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1 : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5^2 \text{ και } C_2 : (x + 1)^2 + y^2 = 3^2.$$

- (i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) του κύκλου C_1 στο σημείο του $A(-1, 5)$.
 - (ii) Να αποδείξετε ότι η (ε) εφάπτεται του κύκλου C_2 .
8. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου

$$C : (x - 1)^2 + y^2 = 2^2,$$

που είναι παράλληλη στην ευθεία:

$$(\zeta) : y = x + 1.$$

9. Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου

$$C : x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$$

που διέρχονται από το σημείο $A(-1, 0)$.

10. Από το σημείο $M(4, 3)$ φέρουμε τις εφαπτομένες στον κύκλο

$$C : x^2 + y^2 = 2.$$

Αν A, B είναι τα σημεία επαφής, να βρείτε:

- (i) την ευθεία AB ,
- (ii) την απόσταση της αρχής των αξόνων από την ευθεία AB .

11. Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1 : x^2 + y^2 = 4 \text{ και } C_2 : (x - 5)^2 + y^2 = 25.$$

Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των κύκλων C_1 και C_2 .

12. Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1 : x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0 \text{ και } C_2 : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0.$$

- (i) Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.
- (ii) Να βρείτε το σημείο επαφής των 2 κύκλων.
- (iii) Να βρείτε την κοινή εσωτερική εφαπτομένη των 2 κύκλων.

13. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\lambda y + 4\lambda - 2 = 0 \quad (1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- (i) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) παριστάνει κύκλο.
- (ii) Να αποδείξετε ότι όλοι οι παραπάνω κύκλοι διέρχονται από ένα σταθερό σημείο, το οποίο να βρείτε.

14. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C , όταν ισχύουν τα ακόλουθα:

- (i) η ευθεία $(\varepsilon) : y = -2x$ τέμνει τον κύκλο C στα σημεία $A(3, 1)$ και B .
- (ii) Ο κύκλος C διέρχεται από το σημείο $\Gamma(-1, 0)$.
- (iii) $\overrightarrow{\Gamma A} \cdot \overrightarrow{\Gamma B} = 0$.

15. Δίνεται ο κύκλος

$$C : (x - 1)^2 + y^2 = 4.$$

Αν το σημείο A κινείται στον κύκλο C με κέντρο K , να βρείτε που κινείται το σημείο M , για το οποίο ισχύει:

$$\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{KA}.$$