

Ασκήσεις στα Όρια

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^2 - 4x + 3}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{2x - 8}$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{3\sqrt{x-2} - 3}$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 2}{x^2 - 7x}$$

$$(vi) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1| - 3x + 3}{x^2 - 4x + 3}$$

2. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι:

$$x - x^2 \leq f(x) \leq x + x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 3f(x)}{3x - f(x)}$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta_{\mu} x}$$

3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$(i) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \eta_{\mu}(3x)$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta_{\mu}(\alpha x)}{x}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi(\alpha x)}{x}$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta_{\mu}(3x)}{\eta_{\mu}(5x)}$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta_{\mu}(2x)}{\eta_{\mu x + \varepsilon\varphi}(3x)}$$

- (vi) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma \cup \nu x}{x^2}$
- (vii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma \cup \nu(\alpha x)}{x^2}$
4. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{\eta \mu(5x)}$.
5. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.
6. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} (x^\nu \cdot \eta \mu(\frac{1}{x})) = 0$, $\nu = 1, 2, \dots$
7. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $g(x) \leq M$ κοντά στο x_0 για κάποιον $M > 0$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.
8. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:
- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} [\eta \mu x \cdot \sigma \nu(\frac{2}{x})]$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} [\frac{\eta \mu^2 x}{x} \cdot \eta \mu(\frac{1}{x})]$
9. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:
- (i) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1 - 2\sqrt{x^2 + 2x + 1}}{|x + 3| - 2}$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^3 + x^2 - 3| - |x^2 - 5x - 3|}{\sqrt{x - 1} - 1}$
10. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $xf(x) + 2\sigma \nu^2 x \leq 2$. Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό l .
11. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια:
- (i) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{|x - 3|}$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - 1}{|x - 3|}$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x + 1}$
- (iv) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + 1}{|x^2 - 4x + 3|}$
- (v) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + 1}{x^2 - 4x + 3}$

- (vi) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x+1}{x|x|}$
 (vii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-3}{x^3-2x^2+x}$

12. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια:

- (i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{(x-1)^3}$
 (ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$
 (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x-\eta\mu x}$
 (iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+\eta\mu x}{x-\eta\mu x}$
 (v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+3}{x \cdot \eta\mu x}$

13. Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} [(x-1)^2 \cdot f(x)] = 3$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 - (\beta+2)x+3}{x^2-1}$. Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α , β ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$.

15. Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ , να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\lambda-1)x^2-3x+\lambda}{x^2-1}$.

16. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια:

- (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2+2x+3}+3x]$
 (ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2+2x+3}-3x]$
 (iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2+2x+3}-x]$
 (iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 3^x + 5^x}{3 \cdot 5^x - 2^x}$
 (v) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \cdot 3^x + 5^x}{3 \cdot 5^x - 2^x}$
 (vi) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [|x^2-4x+3| - |2x^3+x-1|]$

17. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x + 5] = 0$, να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

- (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

18. Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α , να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(\alpha^2 - 2\alpha - 3)x^2 + 3\alpha x - 1].$$

19. Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ , να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\lambda - 2)x^2 + 3x - \lambda}{(\lambda - 1)x^3 + \lambda x + 1}.$$

20. Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 4x + 1} + \alpha x + \beta] = 2.$$

21. Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 3}{x - 1} + \alpha x + \beta \right).$$

22. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + \alpha x + \beta} - x) = \frac{\alpha}{2}.$

(ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + \alpha x + \beta} + x) = -\frac{\alpha}{2}.$

23. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta_{\mu x}}{x} = 0.$

24. Αν $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$, να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2f(x) + 1}{f^2(x) + 3f(x) + 5}.$$

25. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2 - 3x}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5^{-\frac{x^2 + 2}{x + 1}}$

(iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2\ln(x + 1) - \ln(x^2 + x + 3))$

Ασκήσεις στα Θεωρήματα Rolle και Μέσης Τιμής

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$, με $x \in \Delta = [0, \frac{\pi}{2}]$. Εξετάστε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f στο $\Delta = [0, \frac{\pi}{2}]$.

2. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \leq 1 \\ 3x, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

- (i) Εξετάστε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f στο $\Delta = [-1, 4]$.
 (ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [-1, 4]$, ώστε $f'(x_0) = 0$.

3. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & \text{αν } x \leq 1 \\ x^2 + \gamma x - 2, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

Να προσδιορίσετε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α , β , γ , ώστε να ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f στο $\Delta = [-3, 5]$.

4. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu(\frac{1}{x}), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

- (i) Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f στο $[0, \frac{1}{\pi}]$.
 (ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, \frac{1}{\pi})$, ώστε $\sigma\varphi(\frac{1}{\xi}) = 2\xi$.
5. Έστω f άρτια και παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$, ώστε $f'(\xi) = 0$.
6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 2)\ln x$, $x \in [1, 2]$.
- (i) Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f στο $[1, 2]$.

- (ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^x = e^{2-x}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, 2)$.

7. Υποθέτουμε ότι η εξίσωση

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$$

έχει 3 πραγματικές και άνισες ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.

(i) Να αποδείξετε ότι $\beta^2 > 3\alpha\gamma$.

(ii) Να αποδείξετε ότι $\rho_1 < -\frac{\beta}{3\alpha} < \rho_3$.

8. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$e^x + x^3 - 3 = 0$$

έχει ακριβώς μία ρίζα.

9. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 2x - \eta\mu x.$$

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f που να είναι παράλληλες μεταξύ τους.

10. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$3x^2 + 4\lambda x - 2\lambda - 1 = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

11. Αν

$$\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 0, \text{ με } \alpha \neq 0$$

να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα στο $(0, 1)$.

12. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(2) = 2f(1)$.

(i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ ώστε $f(\xi) = \xi \cdot f'(\xi)$.

(ii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

13. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και $f(1) = f(0) + 1$.

(i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $t_1 \in (0, 1)$ ώστε $f'(t_1) = 2t_1$.

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $t_2 \in (0, 1)$ ώστε $f'(t_2) = 4t_2$.

14. Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, β ρίζα της f και $\alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $t \in (\alpha, \beta)$ ώστε

$$f'(t) = \frac{f(t)}{\alpha - t}.$$

15. Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και α, β ρίζες της f , με $\alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $t \in (\alpha, \beta)$ ώστε

$$f'(t) + 2f(t) = 0.$$

16. Έστω f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, ώστε

$$f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι x_1, x_2 είναι διαδοχικές ρίζες της g με $x_1 < x_2$.

(i) Να αποδείξετε ότι x_1, x_2 δεν είναι ρίζες της f .

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της f στο (x_1, x_2) .

17. Έστω f 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, με $f(0) = 0$ και $f(-1) = f(1) = 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ ώστε $f''(\xi) = 2$.

18. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, $A(\alpha, f(\alpha)), B(\beta, f(\beta))$ δύο σημεία της γραφικής παράστασης της f και (ε) η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A, B . Θεωρούμε επίσης σημείο $M(\gamma, \delta)$ πάνω στην ευθεία (ε) , εκτός του $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, στο οποίο η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $M(\gamma, \delta)$.

19. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + \alpha x^2, & \text{αν } x \leq 1 \\ x^2 + \beta x, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

Να προσδιορίσετε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α , β , ώστε να ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο $\Delta = [0, 2]$.

20. Υποθέτουμε ότι για την συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[0, 2]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $t_1, t_2 \in (0, 2)$ με $t_1 \neq t_2$ ώστε

$$f'(t_1) + f'(t_2) = 0.$$

21. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f(7) - f(0) = 2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $t_1, t_2 \in (0, 7)$ με $t_1 \neq t_2$ ώστε

$$3f'(t_1) + 4f'(t_2) = 2.$$

22. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 3$ και $f(2) = 1$.

(i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 2)$, ώστε $f(x_0) = x_0 + 1$.

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $t_1, t_2 \in (0, 2)$ με $t_1 \neq t_2$ ώστε

$$f'(t_1) \cdot f'(t_2) = 1.$$

23. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

(i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$, ώστε

$$f(x_0) = \frac{f(\alpha) + 3f(\beta)}{4}.$$

(ii) Αν επιπλέον η f είναι συνάρτηση ένα προς ένα, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $t_1, t_2, t_3 \in (\alpha, \beta)$, με $t_1 \neq t_2 \neq t_3$ ώστε

$$\frac{3}{f'(t_1)} + \frac{1}{f'(t_2)} = \frac{4}{f'(t_3)}.$$

24. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $\alpha < \beta < \gamma$ και $f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma)$, με f' συνεχής. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \gamma)$, ώστε

$$f'(\xi) = 0.$$

25. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[1, 3]$ με $f'(1) = 4$. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}, & \text{αν } x \in (1, 3] \\ 2, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι:

- (i) η g είναι συνεχής στο $x_0 = 1$,
 - (ii) αν $f(1) = f(3)$, τότε υπάρχει $\xi \in (1, 3)$, στο οποίο η γραφική παράσταση της g σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 135 μοιρών.
26. Έστω f μία 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με

$$2f(2) = f(1) + f(3).$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 3)$, ώστε $f''(\xi) = 0$.

27. Έστω f μία 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με

$$f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}, \text{ με } \alpha < \beta.$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε $f''(\xi) = 0$.

28. Έστω $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μία 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με

$$f(\beta) - f(\alpha) = (\beta - \alpha)f'(\alpha).$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε $f''(\xi) = 0$.

29. Έστω $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μία 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο α τέμνει την γραφική παράσταση της f στο σημείο $B(\beta, f(\beta))$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε $f''(\xi) = 0$.

30. Έστω f μία 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και η ευθεία (ε) εφάπτεται με την γραφική παράσταση της f στα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον 2 ρίζες.

31. Έστω f μία 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και η ευθεία (ε) τέμνει την γραφική παράσταση της f στα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$, $\Gamma(\gamma, f(\gamma))$, με $\alpha < \beta < \gamma$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \gamma)$, ώστε $f''(\xi) = 0$.

32. Έστω f συνεχής στο $[0, 3]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 3)$ με $f'(x) \geq 1$ για κάθε $x \in (0, 3)$ και $f(0) = 1$. Να αποδείξετε ότι $f(3) \geq 4$.

33. Έστω f μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ ώστε

$$-2 \leq f'(x) \leq 2, \text{ για κάθε } x \in (2, 4).$$

Αν τα σημεία $A(2, f(2))$, $B(4, f(4))$ ανήκουν στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να αποδείξετε ότι το μήκος της χορδής AB είναι μικρότερο ή ίσο του $2\sqrt{5}$.

34. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι

$$e^\alpha < \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} < e^\beta.$$

35. Έστω $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} < \frac{\varepsilon \varphi \beta - \varepsilon \varphi \alpha}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\sin^2 \beta}.$$

36. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{6 - e}{3} < \ln 3 < \frac{3}{e}.$$

37. (i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$|\eta \mu x - \eta \mu y| \leq |x - y|.$$

(ii) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\eta \mu(\sqrt{x+1}) - \eta \mu(\sqrt{x})).$$

38. Έστω f μία 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με

$$f(-1) = f(1) = 0.$$

(i) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (-1, 0)$, $\xi_2 \in (0, 1)$ ώστε

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0.$$

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi_1 \in (-1, 1)$ ώστε

$$|f''(\xi)| > |f(0)|.$$

39. (i) Να αποδείξετε ότι

$$\ln x \leq x - 1, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

(ii) Να αποδείξετε ότι

$$e^x \geq x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

40. Να λυθεί η εξίσωση

$$2^x + 5^x = 3^x + 4^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ασκήσεις στην σταθερή συνάρτηση

1. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση, ώστε

$$f^2(x) \cdot f'(x) = 0 \text{ και } f(1) = 1.$$

Να βρείτε την συνάρτηση f που ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες.

2. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση, ώστε

$$f^3(x) \cdot f'(x) = 0 \text{ και } f(1) = 1.$$

Να βρείτε την συνάρτηση f που ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες.

3. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}^*$, ώστε

$$f'(x) = 1 + \frac{f(x)}{x}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^* \text{ και } f(-1) = 1, f(1) = 2.$$

Να βρείτε την συνάρτηση f που ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες.

4. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση, ώστε

$$f''(x) = f(x) \text{ και } f(0) = f'(0) = 1.$$

Να βρείτε την συνάρτηση f που ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες.

5. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση, ώστε

$$f'(x) = 2x \cdot f(x), \text{ με } f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 1.$$

Να βρείτε την συνάρτηση f που ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες.

6. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση, ώστε

$$f'(x) = \frac{1}{1 + e^x}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0.$$

Να αποδείξετε ότι $f(-x) = f(x) - x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ασκήσεις στην μονοτονία συνάρτησης

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\sin(2x) = 3x + 2$$

έχει το πολύ μία ρίζα.

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^3 + \alpha x^2 + \alpha^2 x - 1$$

έχει ακριβώς μία ρίζα για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Να λυθεί η εξίσωση

$$e^{3x} + 2x = 1.$$

4. Να λυθεί η εξίσωση

$$x^5 + 2x - 3 = 0.$$

5. Να λυθεί η εξίσωση

$$(\eta\mu\alpha)^x + (\sigma\upsilon\nu\alpha)^x = 1, \quad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

6. Να λυθεί η εξίσωση

$$3^x + 4^x = 5^x.$$

7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\eta\mu x = x \sigma\upsilon\nu x$$

δεν έχει καμία ρίζα στο $(0, \pi)$.

8. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$3x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 1 = 0$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες.

9. Να αποδείξετε ότι

$$e^x \geq x + 1, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

10. Να αποδείξετε ότι

$$\ln x \leq x - 1, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

11. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}.$$

12. Να αποδείξετε ότι

$$\varepsilon\varphi x + \eta\mu x \geq 2x, \text{ για κάθε } x \in [0, \frac{\pi}{2}).$$

13. Να αποδείξετε ότι

$$x^2 + 3\ln x + 2 > 3x, \text{ για κάθε } x > 1.$$

14. Αν $\alpha < \beta < 1$, να αποδείξετε ότι

$$e^{\alpha-\beta} < \frac{\alpha-1}{\beta-1}.$$

15. Αν $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta} > \frac{\alpha}{\beta}.$$

16. Να αποδείξετε ότι

(i)

$$\eta\mu x < x - \frac{x^3}{6}, \text{ για κάθε } x < 0.$$

(ii)

$$\eta\mu x > x - \frac{x^3}{6}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

17. Να αποδείξετε ότι

$$4e^x \geq x^2 \cdot e^2, \text{ για κάθε } x > 0.$$

18. Έστω $f(x) = x^3 + 3x + 3$. Να λύσετε την ανίσωση

$$f(f(x)) < -1.$$

19. Να λύσετε την ανίσωση

$$x^3 > e^{1-x}.$$

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, με $x > 0$.

(i) Μελετήστε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

(ii) Να αποδείξετε ότι $\sqrt[2022]{2022} < \sqrt[2021]{2021}$.

21. Έστω f μία 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) = f(\beta)$. Αν επιπλέον η f' είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι

$$f'(\alpha) \cdot f'(\beta) < 0.$$

22. Έστω f μία 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, $\gamma \in (\alpha, \beta)$, με $f(\gamma) = f'(\gamma) = 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \neq \gamma$.

23. Έστω f μία 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και $f(\beta) = f'(\alpha) = 0$. Αν επιπλέον η f' είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, να βρείτε το πρόσημο της f στο $[\alpha, \beta]$.

Ασκήσεις στα ακρότατα

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 3x - 1$ δεν έχει ακρότατα.
2. Αν $|\alpha| < 1$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + \alpha x + 2) \cdot e^x$ δεν έχει ακρότατα.
3. Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$f^3(x) + xf(x) = x + 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$. Να βρείτε τα τοπικά και τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης f .
5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$. Να βρείτε τα τοπικά και τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης f .
6. Να εξετάσετε ως προς τα τοπικά ακρότατα την συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.
7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + 3x + 1$. Αν η f έχει δύο διαφορετικά τοπικά ακρότατα, να αποδείξετε ότι $|\alpha| > 3$.
8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + \alpha x^2$, $x > 0$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = \frac{1}{2}$, τότε:
 - (i) να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α ,
 - (ii) να αποδείξετε ότι $f(x) \leq -\ln 2 - \frac{1}{2}$, για κάθε $x > 0$.
9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 - \ln x$, $x > 0$. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α , ώστε $f(x) \geq f(1)$, για κάθε $x > 0$.
10. Αν $0 < \alpha \neq 1$ και $x^\alpha \leq \alpha^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.
11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$, με $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$, στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, το οποίο είναι μοναδικό.
12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^3 - \alpha x^2 + \beta x - 3$. Αν η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία με τετμημένες $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{5}{9}$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α , β .

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{2\alpha}{x} + \beta$. Αν $f(1) = 0$ και η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β .
14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$, με $m > 0$. Να βρείτε τον θετικό αριθμό m , ώστε $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, με $x > -1$ και $0 < \alpha \neq 1$. Αν $f(x) \geq 1$, για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.
16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 4$, με $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα τοπικά και τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης f , καθώς και το σύνολο τιμών της f .
17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 \cdot \ln x$, $x > 0$. Να βρείτε το σημείο στο οποίο η κλίση της f είναι ελάχιστη.
18. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση, ώστε

$$f^3(x) + f(x) = e^x - x - 1.$$

Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει σε κάποιο σημείο τοπικό ελάχιστο, το οποίο να βρείτε.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \lambda x - 1$, $\lambda > 0$.
- (i) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f .
 - (ii) Από όλες τις ελάχιστες τιμές, να βρείτε ποια είναι η μεγαλύτερη.
20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \lambda x$, $x > 0$.
- (i) Να βρείτε την μέγιστη τιμή της f .
 - (ii) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του λ , ώστε

$$\ln x \leq \lambda x, \text{ για κάθε } x > 0.$$

21. Να εγγράψετε ορθογώνιο με το μέγιστο εμβαδόν σε δοσμένο κύκλο.

Κυρτότητα - Σημεία καμπής

1. Εξετάστε την συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
2. Εξετάστε την συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 2x + 3$ ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
3. Εξετάστε την συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$ ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2+1}$ δεν έχει σημεία καμπής.
5. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ έχει άπειρα σημεία καμπής.
6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Να αποδείξετε ότι έχει 3 σημεία καμπής, τα οποία είναι συνευθειακά.
7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \eta\mu x$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , εκτός από το σημείο επαφής δεν έχει άλλα κοινά σημεία με την γραφική παράσταση της f .
8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x+1) \cdot \ln x$, $x > 0$.
 - (i) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
 - (ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.
 - (iii) Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{2}\ln x < \frac{x-1}{x+1}, \text{ για κάθε } x \in (0, 1).$$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot \ln x$, $x > 0$.
 - (i) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.
 - (ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(1, 0)$.
 - (iii) Να αποδείξετε ότι

$$\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

(iv) Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ με $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq 3.$$

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \frac{x^3}{3} + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- (i) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
- (ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$.
- (iii) Να αποδείξετε ότι

$$e^x \geq \frac{x^3}{3} + x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ακρότατο. Να αποδείξετε ότι στο x_0 η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

12. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, η οποία παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ακρότατο. Να αποδείξετε ότι το σημείο με τετμημένη x_0 δεν είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

13. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση, με

$$2x^2 \leq f(x) \leq x^4 + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- (i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(1, f(1))$.
 - (ii) Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι κοίλη.
14. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση, η οποία έχει 2 ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$. Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$, για κάθε $x \in (x_1, x_2)$.

15. (i) Έστω f κυρτή συνάρτηση στο Δ και $\alpha, \beta \in \Delta$ με $\alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι

$$f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \leq \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}.$$

- (ii) Έστω f κοίλη συνάρτηση στο Δ και $\alpha, \beta \in \Delta$ με $\alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι

$$f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \geq \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}.$$

(Ανισότητα Jensen)

16. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση, με $f(x) > 0$ και

$$f''(x) \cdot f(x) - (f'(x))^2 > 0.$$

- (i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
(ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \ln(g(x))$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
(iii) Να αποδείξετε ότι

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \sqrt{f(x_1) \cdot f(x_2)} \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Ασύμπτωτες - Κανόνες De L' Hospital - Μελέτη συνάρτησης

1. Να βρεθούν οι πλάγιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 2}$$

καθώς και τα κοινά σημεία των ασύμπτωτων με την γραφική παράσταση της f και η σχετική τους θέση.

2. Να βρεθούν οι πλάγιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = 2x + \frac{\eta\mu x}{x}$$

3. Να βρεθούν όλων των ειδών οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 5} - x}{x + 1}$$

4. Να βρεθούν οι πλάγιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{3x + 1}{x^2 + 1} + 2x - 3$$

5. Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις με την ιδιότητα:

$$g'(x) = f'(x) + 3.$$

Επιπλέον οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = 2$ και η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$. Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g στο $+\infty$.

6. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με

$$f''(x) = \frac{1}{x^4}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Η ευθεία $y = 3x + 4$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f . Να βρείτε την συνάρτηση f .

7. Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f . Να βρεθεί η ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f ,

- (i) αν η f είναι περιττή
- (ii) αν η f είναι άρτια

8. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{\varepsilon\varphi 2x}$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x^2}$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$
- (iv) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$
- (v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{x^2 \cdot \eta\mu x}$

9. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

- (i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}}$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x}{3^x}$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \eta\mu^3 x}{(e^x - 1)^4}$
- (iv) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^4 x}{(x - 1) \cdot \eta\mu^3(x - 1)}$
- (v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{x \cdot \ln(x + 1) \cdot \eta\mu x}$
- (vi) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\eta\mu x}}{x - \eta\mu x}$

10. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x + \beta \eta\mu x}{x^3} = 2.$$

11. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(0) = 1$. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + f(x)}{1 - \sigma\upsilon\nu x}.$$

12. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} = f''(x_0).$$

13. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^{100} + 3x^{99}}{3x^{100} + 2}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 5^x}{3^x + 4^x}$

(iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sigma \cup \vee x}{x}$

(iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln(e^x+1)}$

14. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma \varphi x}{\ln x}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x)$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \sigma \varphi x)$

(iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x \cdot \eta \mu(\frac{1}{x})]$

15. Να βρεθούν όλων των ειδών οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x}.$$

16. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x)$

(ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^2 x - x^2 + x)$

(iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln x - \ln(x+1)]$

(iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \ln(1 + e^x)]$

(v) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\eta \mu x})$

(vi) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\frac{1}{x} + \ln x)$

17. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

(ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

18. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις επόμενες συναρτήσεις:

(i) $f(x) = x^3 - 3x^2$

(ii) $g(x) = x + \frac{4}{x-1}$

Ολοκληρώματα

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα.

(i) $\int_0^1 x \cdot e^x dx$

(ii) $\int_0^1 x \cdot e^{2x} dx$

(iii) $\int_0^1 x^2 \cdot e^x dx$

(iv) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x dx$

(v) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 \cdot \eta\mu 2x dx$

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα.

(i) $\int_1^e \ln x dx$

(ii) $\int_e^{e^2} \ln^3 x dx$

(iii) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

(iv) $\int_2^e \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$

(v) $\int_1^e x^2 \cdot \ln x dx$

3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα.

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \sin x dx$

(ii) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{2x} \cdot \eta\mu 3x dx$

(iii) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\varphi x dx$

(iv) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-x}{\eta\mu^2 x} dx$

(v) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx$

(vi) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$

4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα.

(i) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$

(ii) $\int_0^1 \ln(2x+1) dx$

(iii) $\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$

(iv) $\int_0^1 \frac{x^2+3x+5}{(x+1)^2} dx$

(v) $\int_2^6 x \cdot \sqrt{x-2} dx$

5. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα.

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^3 x dx$

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^3 x dx$

(iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu x dx$

(iv) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x dx$

6. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = x^3 + 3x + 1$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής. Να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_1^5 f^{-1}(x) dx$.

7. Έστω $f : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη, γνησίως αύξουσα συνάρτηση, ώστε $f(0) = 0$ και $f(\alpha) = \beta$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^\alpha f(x) dx + \int_0^\beta f^{-1}(x) dx = \alpha \cdot \beta.$$

8. Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^\alpha f(x) dx = \int_0^\alpha f(\alpha + \beta - x) dx$$

και στη συνέχεια ότι

$$\int_0^\alpha f(x) dx = f(\alpha - x) \quad \text{και} \quad \int_{-\alpha}^\alpha f(x) dx = \int_{-\alpha}^\alpha f(-x) dx.$$

9. Έστω συνάρτηση $f : [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$

(i) Αν η f είναι άρτια, να αποδείξετε ότι

$$\int_{-\alpha}^\alpha f(x) dx = 2 \int_0^\alpha f(x) dx.$$

(ii) Αν η f είναι περιττή, να αποδείξετε ότι

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) = 0.$$

10. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα.

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x dx$

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx$

11. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$3f(x) + f(2-x) = 4x^2 - 4x + 8.$$

Να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^2 f(x) dx$.

12. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{αν } x < 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^2 f(x) dx$.

13. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα.

(i) $\int_2^3 \frac{1}{1-x^2} dx$

(ii) $\int_3^4 \frac{5x-7}{x^2-3x+2} dx$

(iii) $\int_2^3 \frac{6x^2-2x-2}{x^3-x} dx$

(iv) $\int_2^3 \frac{2x^3+x^2-2x+3}{x^2-1} dx$

(v) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{(e^x+1)(e^x+2)} dx$

(vi) $\int_{\ln 2}^{\ln 7} \frac{1}{\sqrt{2+e^x}} dx$

(vii) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta\mu x} dx$

14. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα.

(i) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} dx$

- (ii) $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \eta \mu \sqrt{x} dx$
- (iii) $\int_0^1 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$
- (iv) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^3 x \cdot \sigma \upsilon \nu^3 x dx$
- (v) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma \upsilon \nu^5 x dx$
- (vi) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi^2 x dx$
- (vii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi^3 x dx$
- (viii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi^4 x dx$

15. Έστω $I_\nu = \int_0^1 x^\nu \cdot e^x dx$, $\nu = 0, 1, 2, \dots$

- (i) Να αποδείξετε ότι $I_\nu = e - \nu \cdot I_{\nu-1}$.
- (ii) Να υπολογίσετε το I_3 .

16. Έστω $I_\nu = \int_1^e \ln^\nu x dx$, $\nu = 0, 1, 2, \dots$

- (i) Να αποδείξετε ότι $I_\nu = e - I_{\nu-1}$.
- (ii) Να υπολογίσετε το I_4 .

17. Έστω f, g δύο συναρτήσεις, ώστε οι f'', g'' είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, με $f(\alpha) = f(\beta) = g(\alpha) = g(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι

$$\int_\alpha^\beta f''(x) \cdot g(x) dx = \int_\alpha^\beta f(x) \cdot g''(x) dx.$$

18. Έστω $f(x) = \frac{\sigma \upsilon \nu x}{1+e^x}$.

- (i) Να αποδείξετε ότι $f(x) + f(-x) = \sigma \upsilon \nu x$.
- (ii) Να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$.

19. Έστω f συνάρτηση με την ιδιότητα:

$$f(x) = f(\alpha + \beta - x).$$

Να αποδείξετε ότι

$$\int_\alpha^\beta x \cdot f(x) dx = \frac{\alpha + \beta}{2} \int_\alpha^\beta f(x) dx.$$

20. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, ισχύει

$$\int_1^{e^{\varphi\alpha}} \frac{x}{1+x^2} dx + \int_1^{\sigma^{\varphi\alpha}} \frac{1}{x(1+x^2)} dx = 0.$$

21. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f(2-x) + f(2+x) = 6.$$

Να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^4 f(x) dx$.

22. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f^3(x) + 2f(x) = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι υπάρχει η $f'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ότι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

- (i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- (ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .
- (iii) Να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^3 f(x) dx$.

23. Να αποδείξετε ότι:

(i)

$$\frac{1}{5} \int_1^3 \frac{x^2}{x^2+1} dx < 9.$$

(ii)

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} dx > \frac{1}{2} \ln 2.$$

24. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+2x+3}.$$

(i) Να βρείτε πραγματικούς αριθμούς m, M ώστε

$$m \leq \int_0^4 f(x) dx \leq M.$$

(ii) Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 2.$$

25. (i) Να αποδείξετε ότι

$$\int_2^3 f^2(x)dx + 1 \geq 2 \int_2^3 f(x).$$

(ii) Αν $\int_1^4 f^2(x)dx = 3$, να αποδείξετε ότι

$$\int_1^4 x \cdot f(x)dx \leq 12.$$

26. Έστω $1 \leq f(x) \leq 3$ και $\int_0^1 f(x)dx = 2$. Να αποδείξετε ότι:

(i)

$$\int_0^1 f^2(x)dx \leq 5.$$

(ii)

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx \leq \frac{2}{3}.$$

(iii) Να βρείτε πραγματικό αριθμό M ώστε

$$\int_0^1 f^3(x)dx \leq M.$$

27. Να αποδείξετε ότι:

(i)

$$\int_0^1 x^3 \cdot \eta\mu x dx < \frac{1}{4}.$$

(ii)

$$\int_0^1 \frac{\eta\mu x}{x^2 + 1} dx < \frac{1}{2} \ln 2.$$

(iii)

$$\int_0^1 \frac{2x \cdot \eta\mu(3x)}{x^4 + x^2 + 1} dx < \ln 2.$$

28. Να αποδείξετε ότι:

(i)

$$\int_1^2 \ln(2x^2 + 3) dx < \frac{20}{3}.$$

(ii)

$$\frac{4}{3} \int_0^1 e^{x^2} dx < e.$$

(iii)

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx > \frac{2}{3}.$$

(iv)

$$\int_0^1 e^{x^2} dx > \frac{4}{3}.$$

(v)

$$\int_2^4 \left(\ln x + \frac{4}{\ln x} \right) dx > 8.$$

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

- (i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.
- (ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $(2, f(2))$.
- (iii) Να αποδείξετε ότι

$$\int_1^3 \frac{e^x}{x} dx > e^2.$$

30. (i) Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι:

$$\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_{\alpha}^{\beta} f^2(x) dx \right) \cdot \left(\int_{\alpha}^{\beta} g^2(x) dx \right).$$

(Ανισότητα Cauchy-Schwartz)

- (i) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx > \frac{3}{4}.$$

31. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2$, του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x = 1$, $x = 3$.
32. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$, του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x = -2$, $x = -1$.
33. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \ln x$, του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x = \frac{1}{e}$, $x = \frac{3}{e}$.
34. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 3x + 2$ και του άξονα $x'x$.
35. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3 - x$, του άξονα $x'x$ και της ευθείας $x = 2$.
36. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{x}$ και των ευθειών $x = 2$, $x = 3$.
37. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x$, $g(x) = x^2$.
38. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = 4$.
39. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = e^x$, του άξονα $y'y$ και των ευθειών $y = e$, $y = e^2$.
40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1}$, $x \geq 1$.
- (i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f που διέρχεται από το $O(0,0)$.
 - (ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , της ευθείας (ε) και του άξονα $x'x$.

41. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει η σχέση:

$$f^3(x) + 2f(x) = 3x.$$

- (i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .
 - (ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f^{-1} , του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x = 1$, $x = 2$.
42. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 1 + \ln x$, $x > 0$.

- (i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} .
- (ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f^{-1} , του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x = 0$, $x = e$.